УДК 514.185
DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-2-27-34

Н.С. Умбетов
Канд. техн. наук, ст. преподаватель ЮКУ им. М. Ауезова,
Республика Казахстан, 160016, г. Шымкент,
пр. Тауке хана 5,
e-mail: nurlanumbetov@mail.ru

Демонстрация общих элементов инволюции на простом примере

Аннотация. Рассматривается инволюция проективных рядов с общим носителем, ее геометрическая интерпретация. Приняв частный случай геометрической интерпретации инволюции, решается задача построения гармонически сопряженных точек при заданных начальных условиях, когда даны одна окружность и радикальная ось этой окружности с пучком соответствующих окружностей с общей радикальной осью. Дано предложение о существовании единственной окружности в пучке, диаметральные точки которой на линии центров составляют гармоническую четверку с соответствующими диаметральными точками заданной окружности. Приводится способ построения искомой окружности в эллиптической инволюции с использованием частного случая теоремы Паскаля о шестиугольнике и другие алгоритмы. Даны пояснения относительно гармонических отношений в гиперболической и параболической инволюциях, которые позволяют осуществлять взаимный переход от одной инволюции к другой. Показано, что, используя диаметральные точки заданной окружности и точек *PQ* радикальной оси в эллиптической инволюции, можно построить двойные точки *X, Y* гиперболической инволюции для неразделенных точек *A*, *A′* и *B*, *B′*, а также радикальную ось *pq* окружностей в гиперболической инволюции. А если из вертикально-диаметральной точки окружности пучка w_1 провести касательную к окружности, проходящей через двойные точки гиперболической инволюции, то точка касания есть точка *P* (*Q*) радикальной оси эллиптической инволюции.

Установлено, что диагонали четырехугольников, полученных при пересечении всех окружностей пучка, ортогонального к двум заданным в эллиптической инволюции, пересекаются в точке на пересечении радикальной оси и линии центров заданных окружностей гиперболической инволюции, а диагонали четырехугольников всех окружностей пучка в гиперболической инволюции пересекаются в точке на пересечении радикальной оси и линии центров заданных окружностей эллиптической инволюции.

Построено геометрическое место каждой точки гармонической четверки. При этом ГМ пары гармонической четверки в эллиптической инволюции получается эллипс, который имеет в точках *P, Q* общую касательную с окружностью двойных точек гиперболической инволюции. А ГМ пары гармонической четверки для гиперболической инволюции – две ветви гиперболы, которые проходят через центры окружностей, задающих эллиптическую инволюцию.

Ключевые слова: геометрические преобразования, гармонически сопряженные точки, радикальная ось, радикальный центр, эллиптическая инволюция, гиперболическая инволюция.

N.S. Umbetov
Ph.D. of Engineering, Senior Teacher,
Auezov SKU,
5, Tauke khan avenue, Shymkent, 160016, Republic of Kazakhstan
e-mail: nurlanumbetov@mail.ru

Demonstration of Common Elements of Involution on a Simple Example

Abstract. The involution of projective rows with a common support, its geometric interpretation are considered. Taking the special case of the geometric interpretation of involution, the problem of constructing harmonically conjugate points is solved for given initial conditions, when one circle and a radical axis of this circle with a bundle of corresponding circles with a common radical axis are given. A proposal is given on the existence of a single circle in a bundle, the diametrical points of which on the lines of centers make up a harmonic four with diametral points of a given circle. It is shown that using the diametrical points of a given circle and points *P, Q* of the radical axis in elliptical involution, you can build double points *X, Y* and the radical axis of the *PQ* of circles in hyperbolic involution. And the tangent from the vertical diammetral point of the circle w_1 to the circle passing through double points of hyperbolic involution — there is a point *P*(*Q*) of the radical axis of elliptical involution. The indicated properties make it possible to carry out a mutual transition from one involution to another. It was established that the diagonals of the quadrangles obtained when crossing all the circles of the bundle, orthogonal to the two given in elliptical involution, intersect in the center of the radical axis of the given circles in hyperbolic involution, and the diagonals of the quadrangles of all circles of the beam in hyperbolic involution are intersected in the center of the radical axis of the given circles in elliptical Involution.

The geometric place (GP) of each point of the harmonic four is constructed. In this case, the geometric place a pair of harmonic four in an elliptic involution turns out to be an ellipse that has a common tangent at points *P, Q* with the circle of double points of the hyperbolic involution. And the GP pairs of the harmonic four for hyperbolic involution are two branches of the hyperbola that pass through the centers of the circles that define the elliptical involution.

Keywords: geometric transformations, harmonically conjugate points, radical axis, radical center, elliptic involution, hyperbolic involution.

Квадратичная инволюция, базирующаяся на гармоническом отношении четырех точек прямой, имеет теоретическое и прикладное значение и в сочетании с классическими методами проективной геометрии может быть эффективно использовано для точного конструктивного решения различных задач геометрического моделирования [23–26].

Для определения инволюции достаточно задать две пары соответственных элементов.

Инволюция на прямой может быть осуществлена с помощью пучка окружностей [3; 17; 18; 32]. Если на прямой *u* имеем инволюцию, заданную двумя парами соответственных точек *A*, *A′* и *B*, *B′*, то, проведя одну окружность через точки *A*, *A′* и точку *P*, вторую окружность — через точки *B*, *B′* и точку *P*, получим две взаимно пересекающиеся окружности с радикальной осью *PQ* и радикальным центром *O*. Можно построить совокупность окружностей, проходящих через точки P и Q — пучок окружностей ω_1^*, ω_2^*.

Прямая «u» (рис. 1) пересекает каждую из пучка окружностей в парах точек инволюции. Если прямая «u» пересекает хорду PQ, то имеем эллиптическую инволюцию, если не пересекает, то имеем гиперболическую инволюцию. А если прямая «u» проходит через одну из точек P и Q, имеем параболическую инволюцию.

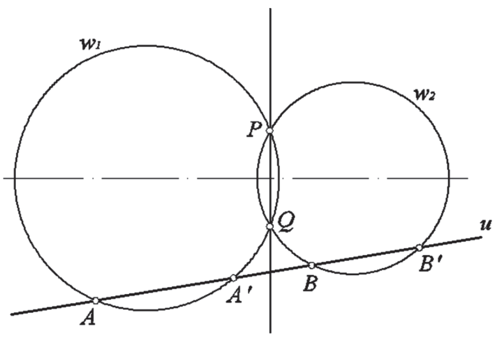

Рис. 1

Понятия радикальной оси и радикального центра могут быть использованы при решении некоторых геометрических задач на построение [1; 2; 29; 30].

Известно, что радикальная ось проходит через точки пересечения окружностей, причем, если это пересечение явное, то прямая проходит через действительные точки пересечения; если же явного пересечения нет, то радикальная ось проходит через две мнимые комплексносопряженные точки определяющих ее окружностей. Поэтому для окружностей, имеющих вещественные центр и радиус, построение радикальной оси даже вручную не составляет особого труда [5–9; 11–16].

Рассмотрим частный случай данной (рис. 1) геометрической интерпретации инволюции, когда прямая «u» совпадает с линией центров заданных окружностей пучков w_1, w_2. Тогда мы имеем три следующих положения с гиперболической (рис. 2, *а*), эллиптической (рис. 2, *б*) и параболической инволюцией (рис. 2, *в*).

Для каждой окружности с парой точек A_i, A_i' имеем пучок эксцентрических окружностей ω_2^* с парой точек B_i, B_i' и наоборот.

Предложение. Если даны окружность с парой диаметральных точек A, A' и пучок окружностей ω_2 с парой диаметральных точек B_i, B_i', обладающих общей радикальной осью PQ, то в данном пучке существует единственная окружность, когда точки A, A', B, B' образуют гармоническую четверку.

Наша задача — отыскать в пучке окружностей ту единственную, у которой точки на линии центров гармонически сопряжены с точками A, A'. Для решения этой задачи в случае эллиптической инволюции воспользуемся частным случаем теоремы Паскаля, которая гласит: «Во всяком шестиугольнике, вписанном в кривую второго порядка, точки пересечения противоположных сторон лежат на одной прямой» [4; 19–22].

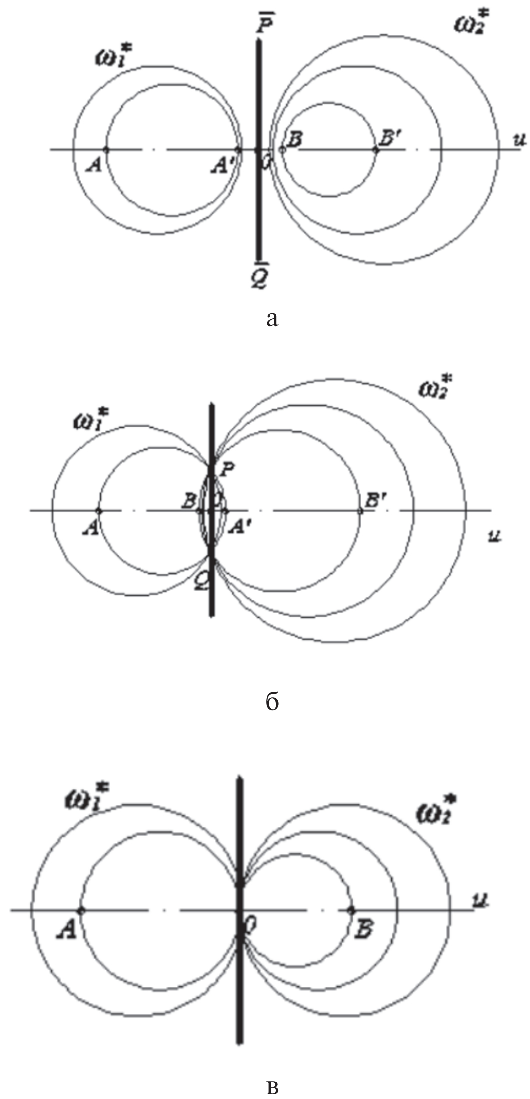

Рис. 2

Выполним построение, соединим прямой линией точку A с точкой P, а точку A' с точкой Q. Точка пересечения этих прямых дает нам точку M, принадлежащей искомой окружности (рис. 3).

Через три точки P, Q и M, инцидентных искомой окружности ω_2, однозначно можно ее построить (рис. 3).

Точки A, A' и B, B' гармонически сопряженные точки эллиптической инволюции.

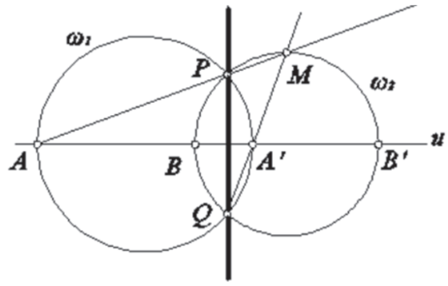

Рис. 3

Прямая, проведенная через вертикально-диаметральную точку окружности и третью точку гармонической четверки, проходит через точку $P(Q)$ радикальной оси пучков w_1, w_2. Поэтому задание окружности и радикальной оси окружностей достаточно для получения 3 и 4 гармонически расположенных точек.

Соединяем вертикально-диаметральную точку окружности с точкой P и восстанавливаем перпендикуляр к этой прямой. Точки пересечения этих прямых с линией «u» дадут нам искомые точки B, B' (рис. 4).

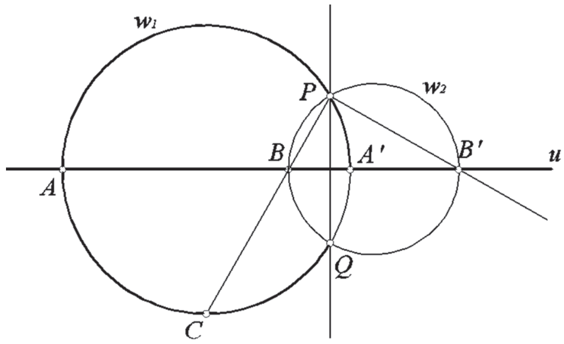

Рис. 4

Справедливо также соединить горизонтально-диаметральную точку A окружности с точкой P и повернуть продолжение этой прямой в точке P на 45°. Точка пересечения этой прямой с линией «u» дает нам точку B', принадлежащую искомой окружности w_2 (рис. 5)

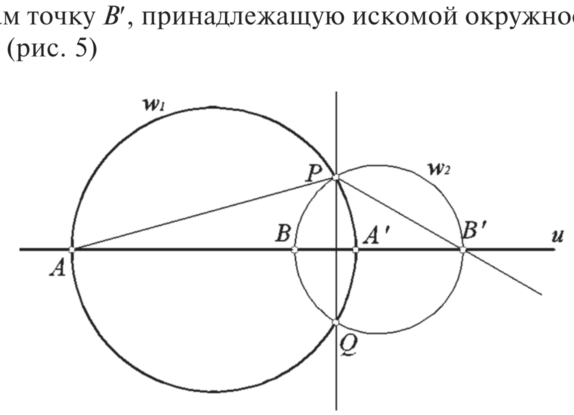

Рис. 5

Для гиперболической инволюции такой алгоритм не работает.

Однако между эллиптической и гиперболической инволюциями существует связь, которую можно использовать для решения второй задачи. Эта связь позволит осуществлять взаимный переход от одной инволюции к другой.

1. Соединяем горизонтально-диаметральную точку A с точкой Q, получаем точку T пересечения прямых AQ и CP (рис. 6). Если через точки TPQ провести окружность, то в пересечении этой окружности с линией «u» центров окружностей получим двойные точки X, Y гиперболической инволюции для неразделенных точек A, A' и B, B', а также радикальную ось pq окружностей в гиперболической инволюции (рис. 7, 8).

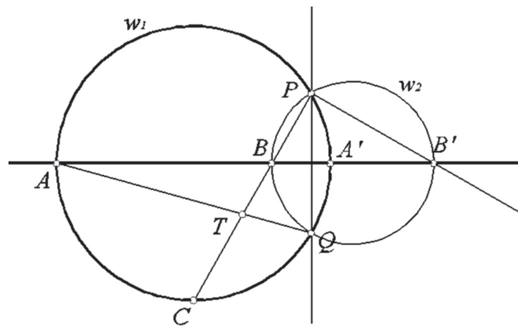

Рис. 6

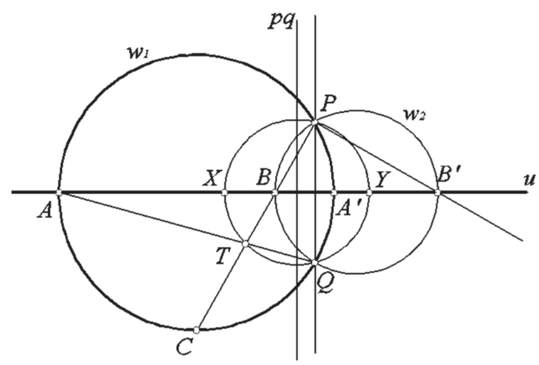

Рис. 7

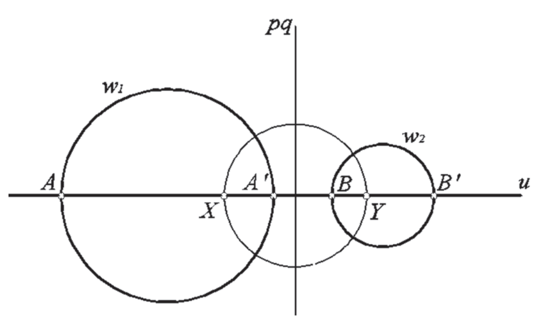

Рис. 8

2. Теперь пусть имеем окружность пучка w_1 и радикальную ось pq (рис. 9). Чтобы получить вторую пару точек B, B', необходимо произвести переход на эллиптическую инволюцию. Для этого воспользуемся следующим свойством: если из вертикально-диаметральной точки C окружности пучка w_1 провести касательную к окружности, проходящей через двойные точки гиперболической инволюции, то точка касания есть точка P радикальной оси эллиптической инволюции, а окружность пучка w_1 эллиптической инволюции проходит через точки A, P и Q (рис. 10). Далее отыскание гармонической четверки не представляет сложности.

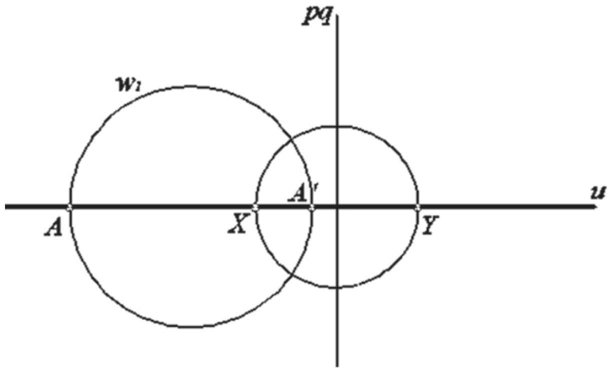

Рис. 9

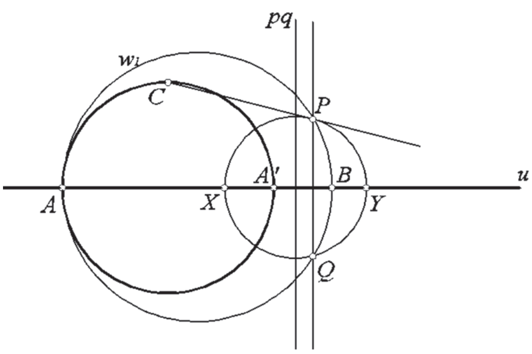

Рис. 10

В обоих случаях приведенной выше инволюции имеется еще один пучок окружностей, ортогональных заданным двум [27]. Каждая окружность третьего пучка пересекает заданные две в четырех точках. Если соединить каждые две точки, не принадлежащие одной окружности, прямой линией, то все прямые сойдутся в одной точке F на линии центров заданных окружностей. Причем, если наложить обе картинки друг на друга, то точки F окажутся одной общей точкой (рис. 11, 12).

Кроме этого, точки пересечения трех окружностей позволяют построить полный четырехугольник (четырехсторонник).

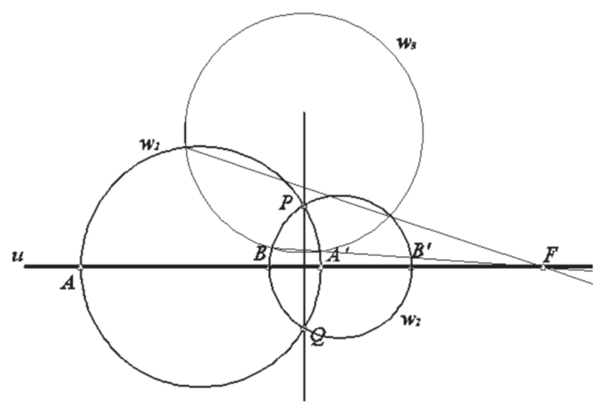

Рис. 11

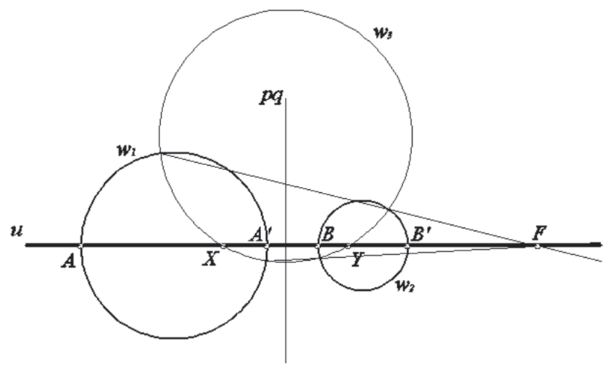

Рис. 12

Если имеем полный четырехугольник (четырехсторонник), то на прямой, проходящей через точки пересечения противоположных сторон четырехугольника (четырехсторонника), эти две точки и точки пересечения этой прямой с диагональными прямыми четырехугольника (четырехсторонника) составляют гармоническую четверку (рис. 13, 14).

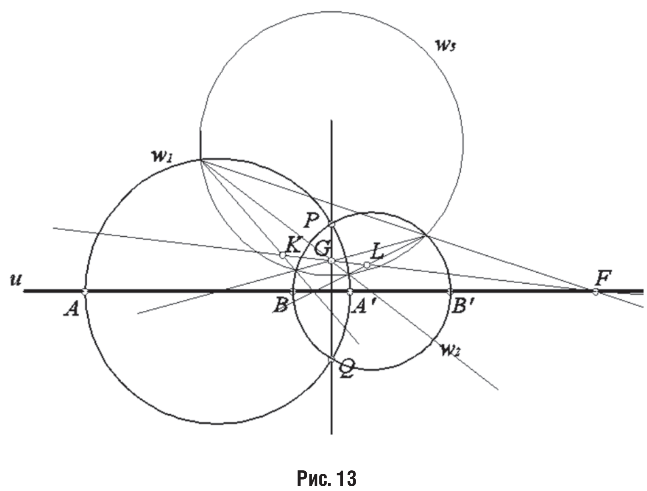

Рис. 13

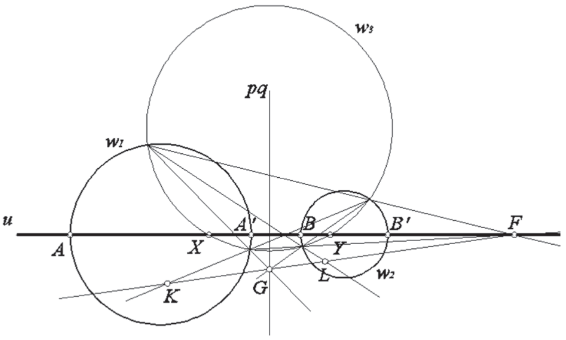

Рис. 14

3. Здесь существует такая связь.

Диагонали четырехугольников всех окружностей пучка в эллиптической инволюции пересекаются в точке на пересечении радикальной оси и линии центров заданных окружностей гиперболической инволюции (рис. 15).

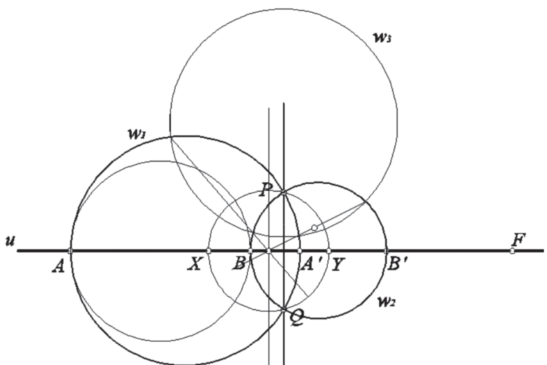

Рис. 15

Диагонали четырехугольников всех окружностей пучка в гиперболической инволюции пересекаются в точке на пересечении радикальной оси и линии центров заданных окружностей эллиптической инволюции (рис. 16).

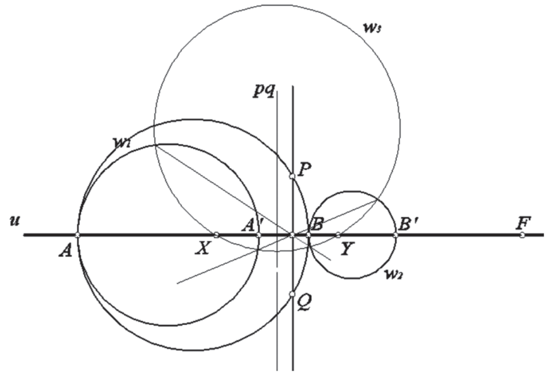

Рис. 16

Если выполнить такие построения для всех окружностей ортогонального пучка, то получим геометрическое место каждой точки гармонической четверки [10; 28; 31]:

- ГМ одной точки есть фиксированная точка F;
- ГМ второй точки (G) есть прямая — радикальная ось;
- ГМ двух остальных точек (K, L) дают:
- для эллиптической инволюции — эллипс, которая имеет в точках P, Q общую касательную с окружностью двойных точек гиперболической инволюции (рис. 17);

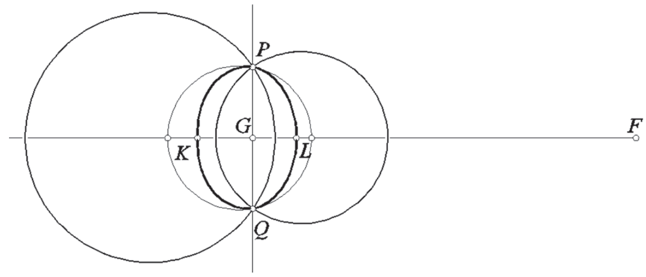

Рис. 17

- для гиперболической инволюции — две ветви гиперболы, которые проходят через центры окружностей, задающих эллиптическую инволюцию (рис. 18).

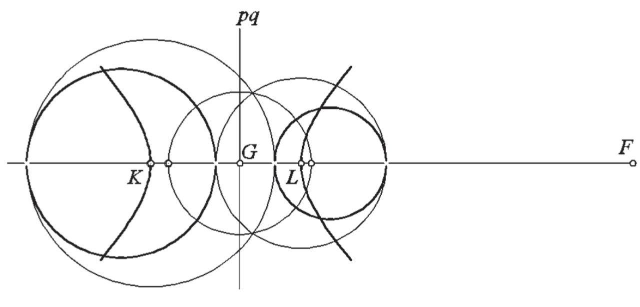

Рис.18

Радикальная ось окружности имеет определенные свойства и играет важную роль в выполнении геометрических построений на плоскости. В данной работе мы показали, что с помощью заданной радикальной оси окружностей и окружности, инцидентной двойным точкам гиперболической инволюции, можно определять гармонические сопряженные точки проективных рядов и осуществлять переход от гиперболической к эллиптической инволюции.

Литература

1. *Аргунов Б.И.* Геометрические построения на плоскости: пособие для студентов пед. институтов [Текст] / Б.И. Аргунов, М.Б. Балк. — 2-е изд. — М.: Учпедгиз, 1957. — 268 с.
2. *Артисевич А.Е.* Нестандартное решение одной геометрической задачи с помощью радикальных осей окружностей [Текст] / А.Е. Артисевич, Н.А. Лобода, С.И. Калашникова, Н.Н. Куприенко // Педагогические науки: Вопросы теории и практики: Сб. статей Международной научно-практической конференции. — Пенза, 2020. — С. 143–145.
3. *Бернхардт А.* Проективная геометрия. Курс, основанный на геометрических построениях и наблюдениях [Текст]: учебник, предназначенный для преподавания и самостоятельного изучения / А. Бернхардт; пер. с нем. О.И. Чибисовой. — М.: Парсифаль, 2003. — 184 с.
4. *Боровиков И.Ф.* О применении преобразований при решении задач начертательной геометрии [Текст] / И.Ф. Боровиков, Г.С. Иванов, Н.Г. Суркова // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 2. — С. 78–84. — DOI: 10.12737/ article_5b55a35d683a33.30813949.
5. *Волошинов Д.В.* Визуально-графическое проектирование единой конструктивной модели для решения аналогов задачи Аполлония с учетом мнимых геометрических образов [Текст] / Д.В. Волошинов // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 2. — С. 23–46. — DOI: 10.12737/ article_5b559c70becf44.21848537.
6. *Волошинов Д.В.* Об уточнении некоторых понятий конструктивной геометрии [Текст] / Д.В. Волошинов // Геометрическое моделирование. Компьютерная графика в образовании. — Томск, 2018. — С. 350–353.
7. *Волошинов Д.В.* Единый конструктивный алгоритм построения фокусов кривых второго порядка [Текст] / Д.В. Волошинов // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 2. — С. 47–54. — DOI: 10.12737/ article_5b559dc3551f95.26045830.
8. *Волошинов Д.В.* Алгоритм решения задачи Аполлония на основе построения ортогональных окружностей [Текст] / Д.В. Волошинов // 26-я Международная конференция (GraphiCon2016). — Нижний Новгород, 2016. — С. 284–288.
9. *Волошинов Д.В.* Конструктивное геометрическое моделирование. Теория, практика, автоматизация [Текст]: монография / Д.В. Волошинов // Saarbrücken: Lambert Academic Publishing. — 2010. — 355 с.
10. *Вышнепольский В.И.* Геометрические места точек, равноотстоящих от двух заданных геометрических фигур. Часть 3 [Текст] / В.И. Вышнепольский, К.А. Киршанов, К.Т. Егиазарян // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 4. — С. 3–19. — DOI: 10.12737/ article_5c21f207bfd6e4.78537377.
11. *Гирш А.Г.* Новые задачи начертательной геометрии. Продолжение [Текст] / А.Г. Гирш // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 9. — № 4. — С. 3–10. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-3-10.
12. *Гирш А.Г.* Окружности на комплексной плоскости [Текст] / А.Г. Гирш // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 8. — № 4. — С. 3–12. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-8-4-3-12.
13. *Гирш А.Г.* Взаимные задачи с кониками [Текст] / А.Г. Гирш // Геометрия и графика. — 2020. — Т. 8. — № 1. — С. 15–24. — DOI: 10.12737/2308-4898-2020-8-1-15-24.
14. *Гирш А.Г.* Фокусы алгебраических кривых [Текст] / А.Г. Гирш // Геометрия и графика. — 2015. — Т. 3. — № 3. — С. 4–17. — DOI: 10.12737/14415.
15. *Гирш А.Г.* Мнимости в геометрии. [Текст] / А.Г. Гирш // Геометрия и графика. — 2014. — Т. 2. — № 2. — С. 3–8.
16. *Гирш А.Г.* Наглядная мнимая геометрия [Текст] / А.Г. Гирш — М.: Маска, 2008 — 200 с.
17. *Глаголев Н.А.* Проективная геометрия. [Текст] / Н.А. Глаголев. — 2-е изд. — М.: Высшая школа, 1963. — 352 с.
18. *Горшкова Л.С.* Проективная геометрия [Текст]: учеб. пособие для студентов и преподавателей педагогических вузов / Л.С. Горшкова, В.И. Паньженский, Е.В. Марина — Пенза: Изд-во Пензенского гос. пед. ун-та им. В.Г. Белинского. — 2003. — 164 с.
19. *Иванов Г.С.* Конструирование одномерных обводов, принадлежащих поверхностям, путем их отображения на плоскость [Текст] / Г.С. Иванов // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 1. — С. 3–9. — DOI: 10.12737/ article_5ad07ed61bc114.52669586.
20. *Иванов Г.С.* Нелинейные формы в инженерной графике [Текст] / Г.С. Иванов, И.М. Дмитриева // Геометрия и графика — 2017. — Т. 5. — № 2. — С. 4–12. — DOI: 10.12737/ article_5953f295744f77.58727642.
21. *Иванов Г.С.* Принцип двойственности — теоретическая база взаимосвязи синтетических и аналитических способов решения геометрических задач [Текст] / Г.С. Иванов, И.М. Дмитриева // Геометрия и графика. — 2016. — Т. 4. — № 3. — С. 3–10. — DOI: 10.12737/ 21528.
22. *Иванов Г.С.* О задачах начертательной геометрии с мнимыми решениями [Текст] / Г.С. Иванов, И.М. Дмитриева // Геометрия и графика — 2015. — Т. 3. — № 2. — С. 3–8. — DOI: 10.12737/ 12163.
23. *Короткий В.А.* Аппроксимация физического сплайна с большими прогибами [Текст] / В.А. Короткий, И.Г. Витовтов // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 1. — С. 3–19. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-1-3-19.
24. *Короткий В.А.* Реконструкция квадратичного кремонова преобразования [Текст] / В.А. Короткий // Геометрия и графика. — 2017. — Т. 5. — № 2. — С. 59–68. — DOI: 10.12737/ article_5953f3002a72d8.28689872.
25. *Короткий В.А.* Графические алгоритмы реконструкции кривой второго порядка, заданной мнимыми элементами [Текст] / В.А. Короткий, А.Г. Гирш // Геометрия

и графика. — 2016. — Т. 4. — № 4. — С. 59–68. — DOI: 10.12737/ 22840.
26. *Короткий В.А.* Квадратичное преобразование плоскости, установленное пучком конических сечений. [Текст] / В.А. Короткий // Омский научный вестник. Инженерная геометрия и компьютерная графика. — 2013. — № 1. — С. 9–14.
27. *Понарин Я.П.* Элементарная геометрия [Текст]: в 2 т. Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости / Я.П. Понарин. — М.: МЦНМО, 2008. — 312 с.
28. *Сальков Н.А.* Циклида Дюпена и кривые второго порядка. Част 1 [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика — 2016. — Т. 4. — № 2. — С. 19–28. — DOI: 10.12737/ 19829.
29. *Селиверстов А.В.* О поиске особых точек алгебраической кривой [Текст] / А.В. Селиверстов // Геометрия и графика. — 2017. — Т. 5. — № 1. — С. 36-42. — DOI: 10.12737/ 25118.
30. *Скопец З.А.* Преобразование двух кривых второго порядка в две окружности посредством гомологии. [Текст] / З.А. Скопец // Изв. вузов. Матем. — 1964. — № 2. — С. 139–143.
31. *Хейфец А.Л.* Коники как сечения квадрик плоскостью (обобщенная теорема Данделена) [Текст] / А.Л. Хейфец // Геометрия и графика — 2017. — Т. 5. — № 2. — С. 45–58. — DOI: 10.12737/ article_5953f32172a 8d8.94863595.
32. *Четверухин Н.Ф.* Проективная геометрия [Текст]: учебник для пед. ин-тов / Н.Ф. Четверухин. — 8-е изд. — М.: Просвещение, 1969. — 368 с.

References

1. Argunov B.I., Balk M.B. *Geometricheskie postroeniya na ploskosti. Posobie dlya studentov pedagogicheskih institutov. Izdanie vtoroe* [Geometric constructions on a plane. A handbook for students of pedagogical institutes. Second edition]. Moscow, Uchpedgiz Publ., 1957. 268 p. (in Russian).
2. Artisevich A.E., Loboda N.A., Kalashnikov C.I., Kuprienko N.N. Nestandartnoe reshenie odnoi geometricheskoi zadachi s pomoshchyu radikalnykh osei okruzhnostei. [Non-standard solution of one geometric problem using radical axes of circles]. *Sbornik statei Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii. Pedagogicheskie nauki: Voprosy teorii i praktiki* [Collection of articles of the International Scientific and Practical Conference. Pedagogical sciences: Questions of theory and practice.] Penza. 2020, pp. 143–145. (in Russian)
3. Bernhardt A. *Proektivnaya geometria. Kurs, osnovannyi na geometricheskih postroeniyah i nabludeniyah. Uchebnik prednaznachennyi dlya prepodovaniya i samostoyatelnogo isucheniya. Per. s nem. O.I. Chibisovoi* [Projective geometry. A course based on geometric constructions and observations. A textbook designed for teaching and self-study. Translated from German by O.I. Chibisova]. Moscow, Parsifal (Izdatelstvo Moskovskogo Centra valdorfskoi pedagogiki [Publishing House of the Moscow Center of Waldorf Pedagogy]), 2003. 184 p. (in Russian)
4. Borovikov I.F., Ivanov G.S., Surkova N.G. O primenenii preobrazovanii pri reshenii zadach nachertatelnoi geometrii [On the application of transformations in solving problems of descriptive geometry]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2018, V. 6, I. 2, pp. 78–84. DOI: 10.12737/ article_5b55a35d683a33.30813949. (in Russian)
5. Voloshinov D.V. Vizualno-graficheskoe proektirovanie edinoi konstruktivnoi modeli dlya resheniya analogov zadachi Apolloniya s uchetom mnimykh geometricheskikh obrazov [Visual and graphic design of a single constructive model for solving analogs of the Apollonius problem, taking into account imaginary geometric images] *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2018, V. 6, I. 2, pp. 23–46. DOI: 10.12737/ article_5b559c70becf44.21848537. (in Russian)
6. Voloshinov D.V. Ob utochnenii nekotorykh ponyatii konstruktivnoi geometrii. [On the refinement of some concepts of constructive geometry]. *Geometricheskoe modelirovanie. Kompyuternaya grafika v obrazovanii* [Geometric modeling. Computer graphics in education]. Tomsk, 2018. pp. 350–353. (in Russian)
7. Voloshinov D.V. Edinyi konstruktivnyi algoritm postroeniya fokusov krivykh vtorogo poryadka [A single constructive algorithm for constructing foci of second-order curves] *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2018, V. 6, I. 2, pp. 47–54. DOI: 10.12737/ article_5b559dc3551f95.26045 830. (in Russian)
8. Voloshinov D.V. Algoritm resheniya zadachi Apolloniya na osnove postroeniya ortogonalnykh okruzhnostei [An algorithm for solving the Apollonius problem based on the construction of orthogonal circles]. *26-ya Mezhdunarodnaya konferentsiya (GraphiCon2016)* [26th International Conference (GraphiCon 2016)]. Nizhny Novgorod. 2016, pp. 284–288. (in Russian)
9. Voloshinov D.V. *Konstruktivnoye geometricheskoye modelirovaniye. Teoriya, praktika, avtomatizatsiya: monografiya* [Constructive geometric modeling. Theory, practice, automation: monograph]. Saarbrücken: Lambert Academic Publ., 2010. — 355 p. (in Russian)
10. Vyshnepolskii V.I., Kirshanov K.A., Egiazaryan K.T. Geometricheskie mesta tochek, ravnootstoyashchikh ot dvukh zadannykh geometricheskikh figur. Chast 3 [Geometric locations of points equidistant from two given geometric shapes. Part 3] *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2018, V. 6, I. 4, pp. 3–19. DOI: 10.12737/ article_5c21f207bfd6e4.78537377. (in Russian)
11. Girsh A.G. Novye zadachi nachertatelnoi geometrii. Prodolzhenie [New problems of descriptive geometry. Continuation] *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2022, V. 9, I. 4, pp. 3–10. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-3-10. (in Russian)
12. Girsh A.G. Okruzhnosti na kompleksnoi ploskosti [Circles on the complex plane]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2021, V. 8, I. 4, pp. 3–12. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-8-4-3-12. (in Russian)

13. Girsh A.G. Vzaimnye zadachi s konikami [Mutual problems with conics] *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2020, V. 8, I. 1, pp. 15–24. DOI: 10.12737/2308-4898-2020-8-1-15-24. (in Russian)
14. Girsh A.G. Fokusy algebraicheskikh krivykh [Focals of algebraic curves] *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2015, V. 3, I. 3, pp. 4–17. DOI: 10.12737/14415. (in Russian)
15. Girsh A. G. Mnimosti v geometrii [Imaginations in geometry]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2014, V. 2, I. 2, pp. 3–8. (in Russian)
16. Girsh A.G. Naglyadnaya mnimaya geometriya [Visual imaginary geometry]. Moscow, Maska Publ., 2008. 200 p. (in Russian)
17. Glagolev N.A. *Proektivnaya geometria* [Projective geometry]. Moscow, Vysshaya shkola Publ.], 1963. 352 p. (in Russian)
18. Gorshkova L.S., Panzjensky V.I., Marina E.V. *Proektivnaya geometria. Uchebnoe posobie dlya studentov i prepodavatelei pedagogicheskih vuzov* [Projective Geometry: A Textbook for Students and Teachers of Pedagogical Universities]. Penza, Penzensky gos. ped. un-t. im. V.G. Belinskogo Publ., 2003. 164 p. (in Russian)
19. Ivanov G.S. Konstruirovanie odnomernykh obvodov, prinadlezhashchikh poverkhnostyam, putem ikh otobrazheniya na ploskost [Construction of one-dimensional contours belonging to surfaces by mapping them to a plane]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2018. V. 6, I. 1, pp. 3–9. DOI: 10.12737/article_5ad07ed61bc114.52669586. (in Russian)
20. Ivanov G.S., Dmitrieva I.M. Nelineinye formy v inzhenernoi grafike [Nonlinear forms in engineering graphics]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2017. V. 5, I. 2, pp. 4–12. DOI: 10.12737/article_5953f295744f77.58727642. (in Russian)
21. Ivanov G.S., Dmitrieva I.M. Printsip dvoistvennosti — teoreticheskaya baza vzaimosvyazi sinteticheskikh i analiticheskikh sposobov resheniya geometricheskikh zadach Printsip dvoistvennosti — teoreticheskaya baza vzaimosvyazi sinteticheskikh i analiticheskikh sposobov resheniya geometricheskikh zadach [The duality principle is the theoretical basis of the relationship between synthetic and analytical methods for solving geometric problems]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2016. V. 4, I. 3, pp. 3–10. DOI: 10.12737/ 21528. (in Russian).
22. Ivanov G.S., Dmitrieva I.M. O zadachakh nachertatelnoi geometrii s mnimymi resheniyami [On problems of descriptive geometry with imaginary solutions]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics], 2015. V. 3, I. 2, pp. 3–8. DOI: 10.12737/ 12163. (in Russian)
23. Korotkii V.A., Vitovtov I.G. Approksimatsiya fizicheskogo splaina s bolshimi progibami [Approximation of a physical spline with large deflections]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2021. V. 9, I. 1, pp. 3–19. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-1-3-19. (in Russian)
24. Korotkii V.A. Rekonstruktsiya kvadratichnogo kremonova preobrazovaniya [Reconstruction of the quadratic Cremona transformation]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2017. V. 5, I. 2, pp. 59–68. DOI: 10.12737/ article_5953f3002a72d8.28689872. (in Russian)
25. Korotkii V.A., Girsh A.G. Graficheskie algoritmy rekonstruktsii krivoi vtorogo poryadka, zadannoi mnimymi elementami [Graphical algorithms for reconstruction of a second-order curve given by imaginary elements]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2016. V. 4, I. 4, pp. 59–68. DOI: 10.12737/ 22840. (in Russian)
26. Korotki V.A. Kvadratichnoe preobrazovanie ploskosti, ustanovlennoe puchkom konicheskikh sechenii [Quadratic transformation of a plane set by a beam of conical sections]. *Omskii nauchnyi vestnik. Inzhenernaya geometria I kompyuternaya grafika* [The periodical "Omsk Scientific Bulletin. Engineering geometry and computer graphics"]. No 1. 2013. pp. 9–14. (in Russian)
27. Ponarin YA.P. *Elementarnaya geometriya: v 2 t. T. 1: Planimetriya, preobrazovaniya ploskosti* [Elementary geometry: in 2 v. V. 1: Planimetry, plane transformations.]. Moscow, MTSNMO Publ., 2008. 312 p. (in Russian)
28. Salkov N.A. Tsiklida Dyupena i krivye vtorogo poryadka. Chast 1 [Dupin cyclide and second-order curves. Part 1]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2016. V. 4, I. 2, pp. 19–28. DOI: 10.12737/19829. (in Russian)
29. Seliverstov A.V. O poiske osobykh tochek algebraicheskoi krivoi [On the search for singular points of an algebraic curve]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics], 2017. V. 5, I. 1, pp. 36–42. DOI: 10.12737/ 25118. (in Russian)
30. Skopets Z.A. Preobrazovanie dvukh krivykh vtorogo poryadka v dve okruzhnosti posredstvom gomologii [Transformation of two curves of the second order into two circles by means of homology]. *Izv. vuzov. Matem.* [News of universities. Mat.], 1964, No. 2, pp. 139–143. (in Russian)
31. Kheifets A.L. Koniki kak secheniya kvadrik ploskostyu (obobshchennaya teorema Dandelena) [Conics as sections of quadrics by a plane (generalized Dandelens theorem)]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2017. V. 5, I. 2, pp. 45–58. DOI: 10.12737/article_5953f32172a8d8.94863 595. (in Russian)
32. Chetveruhin N.F. *Proektivnaya geometria* [Projective geometry]. 1969. 368 p. (in Russian)