

Используемые в космологических моделях допущения и идеализации, ограничивающие описание удаленных областей Вселенной

Assumptions and idealizations used in cosmological models that limit the description of remote regions of the Universe

Поройков С.Ю.

Канд. физ-мат. наук, МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва
e-mail: sporoykov@mail.ru

Sporoykov S.Yu.

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Lomonosov Moscow State University,
Moscow
e-mail: sporoykov@mail.ru

Аннотация

Стандартная космологическая модель описывает наблюдаемую часть изотропной и однородной нестационарной Вселенной в сопутствующей системе отсчета, являющейся синхронной, что накладывает ограничения на описание удаленной области пространства, включая горизонт Вселенной, а также область за его пределами. Из-за невозможности описания всего многообразия событий закрытая космологическая модель использует модель пространства Римана, в которой диаметрально противоположные точки «отождествляются» и условно считаются одной точкой. Исходя из фактического характера симметрии пространства Римана, видимую часть Вселенной дополнит ненаблюдаемая область, зеркально-симметричная относительно ее горизонта. Гравитация материи в ненаблюдаемой области Вселенной компенсирует гравитацию в ее видимой части – однородной в крупном масштабе, так что Вселенная может расширяться под давлением среды в областях неоднородности – войдах.

Ключевые слова: космологические модели, синхронная система отсчета, риманово пространство, космологический Λ член.

Abstract

The Standard Cosmological Model describes the observable region of an isotropic and homogeneous non-stationary Universe in a comoving reference frame that is synchronous, which imposes restrictions on the description of a remote region of space, including the horizon of the Universe, as well as the region beyond it. Due to the impossibility of describing the entire variety of events, the closed cosmological model uses the model of the Riemann space, in which diametrically opposite points are “identified” and conventionally considered to be one point. Based on the actual nature of the symmetry of the Riemann space, the visible part of the Universe will be supplemented by an unobservable region, mirror-symmetric with respect to its horizon. The gravity of matter in the unobservable region of the Universe compensates for the gravity in its visible part, which is homogeneous on a large scale, so that the Universe can expand under the pressure of the medium in areas of inhomogeneity – voids.

Keywords: cosmological models, synchronous reference frame, Riemannian space, cosmological Λ term.

Введение

Из-за невозможности описания всего многообразия событий [1, с. 531] известные космологические модели используют допущения (идеализации), распространяющие свойства сопутствующей системы отсчета (связанной с галактиками), корректные для ограниченной области, на всю Вселенную. Так, стандартная космологическая модель описывает наблюдаемую часть изотропной и однородной Вселенной в сопутствующей системе отсчета, одновременно являющейся синхронной. Это накладывает ограничение на описание удаленной части пространства расширяющейся Вселенной в области горизонта, а также ненаблюдаемой области за его пределами.

Как следствие, при решении уравнений теории тяготения всю Вселенную рассматривают как пространственноподобную область, включая времениподобную часть за горизонтом [2]. При этом допущения, используемые в космологических моделях, приносят искажения в решения уравнений теории относительности. Подобные искажения можно скорректировать за счет учета соответствующих граничных условий в области горизонта Вселенной в духе подходов Эйнштейна и Леметра путем введения космологического члена Λ , имеющего размерность кривизны пространства и являющегося эквивалентом плотности энергии среды (давления) в зависимости от интерпретации.

Известные космологические модели [3, с. 377] развиты в рамках риманова пространства или псевдориманова пространства-времени [1, с. 531] описываемых неевклидовой геометрией. При этом замкнутые (закрытые) модели Вселенной используют секуляризованную модель пространства Римана (положительной кривизны). Например, модель стационарной Вселенной Эйнштейна развита в рамках разновидности 3-мерного сферического пространства (Римана) – «эллиптического пространства», в котором «противолежащие точки совпадают», образуя «центрально симметричный сферический мир» [4, с. 198]. Так, в принятой модели пространства Римана «условившись каждую пару диаметрально противоположных точек» отождествлять и «рассматривать как один объект, называют этот объект "точкой"» [1, с. 528].

Между тем фактически в сферическом пространстве диаметрально противоположные (полярные) точки не совпадают (рис. 1). Через полярные точки (включая полярные точки в области горизонта относительно наблюдателя) проходит плоскость (поверхность), разделяющая сферическое пространство на две половины, зеркально-симметричные относительно данной поверхности.

В силу симметрии пространство Римана внутри горизонта и за его пределами для наблюдателя отличается знаком кривизны. Если пространство в пределах горизонта является частью 3-мерного сферического пространства радиусом R_s , то дополняющая его область за горизонтом представима в виде 3-мерного псевдосферического пространства радиусом iR_s .

Отрицательная кривизна псевдосферического пространства $-k = 1/(iR_s)^2$ компенсирует положительную кривизну сферического пространства в пределах горизонта $k = 1/R_s^2$, приносимую гравитацией материи. Тем самым, гравитация материи за горизонтом Вселенной может компенсировать гравитацию материи в его пределах [5]. Подобные граничные условия в области горизонта можно учесть путем введения космологического члена $\Lambda = -k$ [2].

Следует также учесть, что известные теоретические космологические модели рассматривают риманову (псевдориманову) Вселенную как изотропную и однородную среду. По определению, риманово пространство в малом масштабе близко к плоскому (евклидову) пространству [1, с. 528]. Также в большом масштабе геометрия Римана близка к евклидовой. Если радиус кривизны пространства стремится к бесконечности, то формулы римановой геометрии в пределе переходят в формулы евклидовой геометрии [1,

с. 398]. Тем самым, замкнутое на себя риманово пространство без границ с однородным распределением материи сводимо к плоскому пространству с однородным распределением материи.

Наблюдаемая Вселенная однородна лишь в крупном масштабе и неоднородна в масштабе войдов [6, с. 347]. В однородной среде динамика расширения (сжатия) областей неоднородности определяется балансом сил гравитации и давления среды. Так, давление межгалактической среды может формировать области неоднородности – войды. При этом вне зависимости от космологической модели, наблюдаемая однородная в крупном масштабе Вселенная, чье пространство близко к плоскому, может расширяться в условиях давления среды в областях неоднородности материи [7].

1. Ограничения космологических моделей в части описания удаленной области пространства

Основой современной космологии является уравнение Фридмана-Робертсона-Уокера (Ф-Р-У) для 4-мерного пространства-времени (x, y, z, t) , описывающее нестационарную изотропную и однородную Вселенную:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)[1 + (k/4)(x^2 + y^2 + z^2)]^{1/2}, \quad (1)$$

где $R(t)$ – масштабный фактор; x, y, z – безразмерные пространственные координаты; $k = -1; 0, 1$ – параметр кривизны пространства [3, с. 377].

Когда для определения функции $R(t)$ (§ 5) и параметра k (§ 6) используют уравнения Эйнштейна с неравным нулю тензором энергии-импульса материи (2), пространство-время с метрикой (1) называют космологической моделью Фридмана. При учете космологического члена ее также называют моделью Леметра. Гидродинамический тензор энергии-импульса материи:

$$T_{\mu\nu} = (\epsilon + p)u_{\mu}u_{\nu} - pg_{\mu\nu}, \quad (2)$$

где ϵ – плотность энергии; p – давление; u_{μ} – 4-мерная скорость [3, с. 377]; $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор [8, с. 475].

Уравнение Ф-Р-У описывает наблюдаемую часть расширяющейся Вселенной (пространственноподобную) в сопутствующей системе отсчета, одновременно являющейся синхронной [3, с. 377]. По определению, *сопутствующая система отсчета* связана с рассматриваемой системой тел (средой), т.е. тела покоятся относительно данной системы отсчета, а часы, движущиеся вместе с телом, показывают собственное время наблюдателя [9, с. 601]. При этом в *синхронной* системе отсчета возможна синхронизация часов в различных точках пространства (с помощью светового сигнала по методу Эйнштейна) вдоль любой замкнутой линии, что не имеет места в других системах отсчета.

Между тем синхронная система отсчета, как правило, не покрывает все пространство-время [9, с. 529]. В действительности область, охватываемая синхронной инерционной системой отсчета конечна, так что «удобно допустить идеализованную ситуацию и предполагать, что все ... переменные меняются от $-\infty$ до $+\infty$ » [10, с. 494], что и делается при решении уравнения Ф-Р-У. Вместе с тем, в силу ограниченности скорости распространения светового сигнала (посредством которого идет синхронизация) в условиях хаббловского расширения пространства *синхронная система отсчета не покрывает пространство за горизонтом Вселенной, расширяющимся со скоростью света* (по отношению к наблюдателю в центре видимой ему части Вселенной).

В частном случае положительной кривизны пространства ($k = 1$) уравнение Ф-Р-У описывает замкнутое 3-мерное сферическое пространство без границ объемом $V_s = 2\pi^2 R^3$ [3, с. 377], что соответствует объему пространства в космологической модели Эйнштейна (исторически первой).

Космологическая модель Эйнштейна разработана в рамках замкнутого на себя «трехмерного сферического пространства», которое «конечно (т.е. имеет конечный

объем), но не имеет границ» [4, с. 198]. В рамках 3-мерного сферического пространства, замкнутого по всем 3-м пространственным координатам, Эйнштейн рассматривает стационарную Вселенную, которая представима как «временной срез» расширяющейся Вселенной Фридмана. Так, закрытая (замкнутая) модель нестационарной Вселенной Фридмана критической плотности соответствует циклической Вселенной [8, с. 477].

Уравнения тяготения Эйнштейна для однородной стационарной Вселенной с учетом космологической постоянной Λ записываются в виде:

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2 = 8\pi GT_{\mu\nu}/c^4 - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (3)$$

где $R_{\mu\nu}$ – тензор кривизны пространства-времени Риччи, выражающийся через метрический тензор $g_{\mu\nu}$, его производные по координатам; $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ при $g_{\mu\nu}g^{\nu m} = \delta_{\mu}^m$; $T_{\mu\nu}$ – тензор энергии импульса материи [8, с. 475].

Уравнение Ф-Р-У учитывает пространство расширяющейся Вселенной (наблюдаемой) как пространственноподобную область, т.е. как континуум внутри ее горизонта. Так, достижение гравитационного радиуса (горизонта событий) обычно трактуется как переход от пространственноподобной координаты к времениподобной (§ 6). Тем самым, при решении уравнения Ф-Р-У учитывается гравитация материи внутри горизонта, но не учитывается гравитация материи за пределами горизонта – во времениподобной области.

Описание всего пространственно-временного многообразия событий «невозможно (поскольку наличие поля тяготения математически выражается в кривизне псевдориманова пространства)» [1, с. 531]. В принятой модели пространства Римана полюса n -мерного сферического пространства как бы "сшиваются" путем «отождествления» диаметрально противоположных точек сферы в $(n + 1)$ -мерном евклидовом пространстве, которые *условно* рассматривают как один объект, который называют «точкой» [1, с. 528]. Подобная операция, сопряженная с выбором граничных условий, позволяет выполняться теоремам римановой геометрии. Между тем фактически полярные точки на сфере Римана не совпадают (рис. 1) (§ 2).

На основе указанной модели (версии) пространства Римана Эйнштейн рассматривает разновидность 3-мерного сферического пространства – «эллиптическое пространство», в котором «противолежащие точки совпадают», образуя «центрально симметричный сферический мир» [4, с. 198]. Для сравнения, центрально симметричной также является пространство внутри черной дыры, ограниченное горизонтом. Тем самым, в принятой модели пространство Римана фактически уподобляется пространству черной дыры, не замкнутому вдоль радиальной координаты [2] (§ 6).

Между тем сферическое пространство содержит диаметрально противоположные точки, через которые может быть проведена плоскость (поверхность), разделяющая пространство на две половины, *зеркально симметричные* относительно данной поверхности (§ 2).

Исходя из характера симметрии полярных точек, видимую часть 3-мерной сферической расширяющейся Вселенной, однородно наполненной материей, дополнит ненаблюдаемая область за горизонтом, зеркально симметричная относительно него. Область за горизонтом представима как 3-мерная псевдосфера радиусом iR_s . При этом отрицательная кривизна 3-мерной псевдосферы $-k = 1/(iR_s)^2$ компенсирует положительную кривизну 3-мерного сферического пространства видимой Вселенной $k = 1/R_s^2$, вносимую гравитацией материи (§ 6).

По Эйнштейну однородность распределения материи в замкнутой на себя 3-мерной сферической Вселенной без границ обеспечивает сама геометрия пространства Римана [4, с. 199]. Действительно, как в 2-мерном, так и 3-мерном случае постоянство кривизны риманова пространства обеспечивает его однородность [1, с. 398]. При этом в силу характера симметрии 3-мерного сферического пространства, замкнутого по трем

пространственным координатам, гравитация его противоположных областей (разделенных поверхностью симметрии) взаимно компенсируется [2].

Очевидным критерием адекватности космологической модели является ее соответствие экспериментальным астрофизическим данным. Пространство наблюдаемой изотропной и однородной в крупном масштабе Вселенной близко к плоскому, а ее плотность близка к критической (§ 3). При этом безотносительно от космологической модели, наблюдаемая изотропная и однородная в крупном масштабе Вселенная может расширяться в условиях давления среды в областях неоднородности материи (не учитываемых известными космологическими моделями) [7].

На данном этапе эволюции Вселенной областями неоднородности материи являются войды, которые могут расширяться под давлением среды с плотностью энергии $\sim 0,1 \text{ эВ/см}^3$, что сравнимо с вероятной плотностью энергии космических лучей в войдах [7] (§ 3).

Оценки показывают, что в условиях хаббловского разбегания галактик давление межгалактической среды может быть эффективно в масштабе областей неоднородности материи – войдов, т.е. носит *локальный* характер и применимо к сопутствующей системе отсчета, связанной со средой (§ 4).

2. Модели сферического пространства Римана

Модель 2-мерной плоскости Римана (положительной кривизны) можно получить путем «отождествления» диаметрально противоположных точек сферы в 3-мерном евклидовом пространстве, которые *условно* рассматривают как один объект, который называют «точкой», а каждый большой круг той же сферы – «прямой» [1, с. 528]. Подобная операция, сопряженная с выбором граничных условий, позволяет выполняться теоремам римановой геометрии. Между тем фактически диаметрально противоположные (полярные) точки A и A_1 на сфере не совпадают, что наглядно видно из рис. 1. Тем самым, *принятая модель пространства Римана является секуляризованной*.

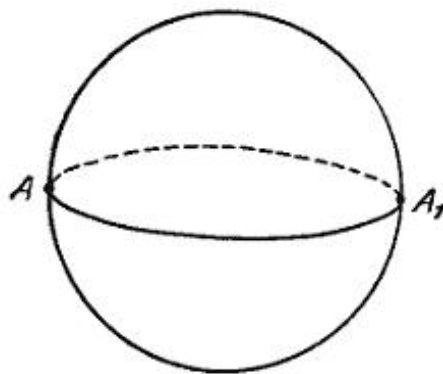


Рис. 1. Противоположные точки на сфере в геометрии Римана

Модель 3-мерного пространства Римана вводится аналогично путем «отождествления» полярных точек 3-мерной сферы 4-мерного евклидова пространства [1, с. 528].

Поскольку в сферической геометрии Римана прямая становится кругом [1, с. 528], движение наблюдателя «по прямой» из точки A в направлении диаметрально противоположной точки A_1 сначала удаляет его от исходной точки, а затем возвращает к ней (рис. 1).

Иллюстрируя 3-мерное сферическое пространство, Эйнштейн «промеряет» его вдоль радиальной координаты r с помощью «масштабного квадрата», чья площадь «для

евклидова мира $F = 4\pi r^2$; если же мир сферический, то F всегда меньше $4\pi r^2$ ». При этом «с возрастанием r площадь поверхности F растет от нуля до некоторого максимума, определяемого "радиусом мира", а при дальнейшем возрастании r величина F снова постепенно уменьшается до нуля» в «противолежащей» точке [4, с. 198].

Максимальное удаление диаметрально противоположных (полярных) точек на поверхности Римана соответствует диаметру, т.е. удвоенному «радиусу мира» в терминах Эйнштейна. Тем самым, «противолежащая» или полярная точка относительно наблюдателя в одной из них, лежит за горизонтом, ограниченного радиусом Вселенной, т.е. «радиусом мира» по Эйнштейну. Соответственно, полярные точки в области горизонта относительно наблюдателя лежат в противоположных сторонах горизонта.

Области возрастания площади поверхности F с ростом r от нуля до максимального значения $r = R_s$ (радиуса мира) и ее уменьшения с дальнейшим ростом r до $r = 2R_s$ в полярной точке имеют равный по модулю радиус кривизны. Однако знак кривизны $k = 1/R_s^2$ для двух данных областей противоположен: $k = -k$. Для наблюдателя в одной из полярных точек радиус мира (горизонта) является радиусом сферы R_s ; радиус мира за его горизонтом предстает как радиус псевдосферы iR_s (§ 6).

Модель стационарной Вселенной Эйнштейна развита в рамках разновидности 3-мерного сферического пространства – «эллиптического пространства», в котором «противолежащие точки совпадают», образуя «центрально симметричный сферический мир» [4, с. 198]. Подобная «сшивка» полярных точек приводит к учету времениподобной области пространства как пространственноподобной области.

Так, 2-мерное сферическое пространство, изображенное на рис. 1 в виде поверхности сферы, представимо в виде поверхности двух сомкнутых полусфер (как и объем внутри полусфер). Поверхности двух полусфер *зеркально симметричны* относительно плоскости, проходящей через круг, соединяющий точки A и A_1 на рис. 1. Тем самым площадь (как и объем) полусфер равна половине площади (объема) сферы. Сходным образом «сшиваются» полюса 3-мерного сферического пространства, условно рассматриваемые как один полюс. В данной модели пространство за горизонтом рассматривается как часть континуума внутри горизонта, т.е. *весь объем пространства Римана учитывается как объем его пространственноподобной области.*

Как следствие, при решении уравнений тяготения в рамках принятой модели пространства Римана учитывается гравитация всей материи, как внутри горизонта, так и за его пределами, как если бы вся материя находилась внутри горизонта. В результате Вселенная фактически уподобляется пространству, ограниченному горизонтом черной дыры, соответствующему пространственноподобной области [2] (§ 6).

Разновидностью риманова пространства является *псевдориманово* пространство, где одна из пространственных координат заменена временной, которое описывает 4-мерное пространство-время – многообразие событий [1, с. 531]. Континуум специальной (частной) теории относительности (x, y, z, ict) содержит 4-ю мнимую координату ict , представимую в виде радиуса псевдосферы, зависящего от времени: $ict = iR(t)$, где $R(t) = (x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2)^{1/2}$ – обобщенная координата [5].

По аналогии разновидностью 3-мерного сферического пространства является 3-мерное *псевдосферическое* пространство. Его замкнутость по 3-м пространственным координатам обеспечит не 4-я пространственная координата, а цикличность временной координаты. Так, наблюдаемую часть циклической Вселенной может описывать циклоида (§ 5).

Следует учесть, что в малом масштабе риманово пространство близко к плоскому (евклидову) пространству [1, с. 528]. Также в большом масштабе геометрия Римана близка к евклидовой. Если радиус кривизны пространства стремится к бесконечности $R \rightarrow \infty$, то формулы римановой геометрии в пределе переходят в формулы евклидовой геометрии (если они имеют смысл) [1, с. 398]. Например, предел сфер бесконечно увеличивающегося

радиуса является предельной сферой (орисферой), на которой имеет место евклидова геометрия [1, с. 326]. Тем самым, *риманово пространство с однородным распределением материи в первом приближении сводимо к плоскому пространству с однородным распределением материи* [7].

3. Характеристики наблюдаемой Вселенной

Наблюдаемая Вселенная расширяется согласно закону Хаббла:

$$v = rH_0, \quad (4)$$

где H_0 – постоянная Хаббла; r – удаленность объекта.

Данные наблюдений за значительной выборкой сверхновых Ia подтверждают выполнение закона Хаббла вплоть до $z \leq 1$ [11]. Согласно стандартной космологической модели с постоянной Хаббла связана критическая плотность Вселенной:

$$\rho_c = 3H_0^2/8\pi G, \quad (5)$$

где G – гравитационная постоянная [6, с. 347].

При принятом современном значении $H_0 \sim 70 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Мпк}^{-1}$ с учетом данных космических обсерваторий WMAP и Planck [12], $\rho_c \approx 9 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3$.

При радиусе горизонта $R = 12000 \text{ Мпк}$ Вселенная *изотропна и однородна* в масштабе $\geq 300 \text{ Мпк}$ [6, с. 347]. В крупном масштабе пространство Вселенной близко к плоскому (евклидовому). Так, кривизна наблюдаемого пространства $|\Lambda| < 10^{-55} \text{ см}^{-2}$ [8, с. 475], чему соответствует масштаб неоднородностей $(1/\Lambda)^{1/2} > 1000 \text{ Мпк}$.

Также изотропно *микроволновое фоновое излучение* (МФИ) в системе координат, связанной с «разбегающимися» галактиками (в сопутствующей системе отсчета), которая расширяется вместе с Вселенной [10, с. 135]. При этом изотропия температуры и поляризации МФИ эпохи молодой Вселенной могут соответствовать модам, связанным с завихренностью и растяжением областей Вселенной, с весьма малой вероятностью $P = 8 \cdot 10^{-6}$ [13].

В поздней Вселенной проявляется анизотропия в распределении по небу скоплений рентгеновских галактик, согласующаяся с анизотропией распределения сверхновых Ia [14]. Скопления галактик формировались в эпоху красного смещения $z \leq 1$ [9, с. 545]. Также сверхновые Ia наблюдаются вплоть до $z \leq 1$ [11]. Тем самым, по данным [14] проявления анизотропии в распределении материи поздней Вселенной имеют масштаб $R/(z+1) \leq 6000 \text{ Мпк}$, что сопоставимо с оценкой $(1/\Lambda)^{1/2} > 1000 \text{ Мпк}$.

В масштабе $\leq 100 \text{ Мпк}$ Вселенная имеет крупномасштабную ячеисто-сетчатую структуру, образуемую *войдами* (пустотами) и вытянутыми нитями – *филаментами*, формируемыми галактиками и их скоплениями. В войдах радиусом $\sim 20 \text{ Мпк}$ обнаружены сферические субструктуры радиусом $\sim 2 \text{ Мпк}$, ограниченные галактиками низкой поверхностной яркости [15].

Пространство Вселенной наполняет фотонное *фоновое космическое излучение* (ФКИ) в широком диапазоне длин волн от радио- до γ -излучения. Плотность массы (эквивалент энергии) ФКИ $\rho_\nu \sim 5 \cdot 10^{-34} \text{ г/см}^3$ намного меньше плотности массы вещества (газа) $\rho_0 \sim 10^{-30} \text{ г/см}^3$. При этом условие $\rho_\nu > \rho_0$, когда излучение преобладало над веществом и еще не отделилось от него, выполнялось в молодой Вселенной, так что при анализе динамики Вселенной ранней эпохи присутствием вещества пренебрегают [6, с. 518].

Пространство Вселенной также наполняют *слабовзаимодействующие частицы*, такие как нейтрино. Плотность энергии реликтовых нейтрино может достигать $\sim 0,17 \text{ эВ/см}^2$ [10, с. 256], что сравнимо с плотностью энергии МФИ $\sim 0,25 \text{ эВ/см}^2$ [10, с. 135].

Однако в силу крайне малого сечения взаимодействия нейтрино не могут создать заметное давление в космической среде [2]. Например, сечение рассеяния нейтральных нейтрино на нуклонах и электронах $\sigma \leq 10^{-32} \text{ см}^2$ [10, с. 263] минимум в $\sigma/\sigma > 10^8$ раз меньше томсоновского сечения электрона $\sigma = 6,7 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2$ при рассеянии фотонов, в том числе фотонов МФИ, для которых современная Вселенная прозрачна [2].

Тем самым, *современное излучение отделено от вещества*, включая фотонное ФКИ, а также излучение в виде слабовзаимодействующих частиц, в силу чего оно не может вносить вклад в расширение Вселенной. Исключением являются *космические лучи* (КЛ), рассеиваемые магнитным полем галактик [8, с. 473], а также их гало (корон) [2]; [7].

В качестве локальных областей в масштабе современной Вселенной предстают области неоднородного распределения материи – войды. Со стороны войдов оказывается давление на галактики в филаментах. Так, соседний войд оказывает динамическое воздействие на Местную группу галактик, вызывая отклоняющее движение со скоростью 200 – 250 км/с [16]. Подобное воздействие может быть обусловлено давлением на короны галактик метагалактических КЛ за счет рассеяния их магнитным полем [7].

Расчеты показывают, что *войды могут расширяться за счет рассеяния магнитным полем корон галактик метагалактических КЛ* с плотностью энергии $\sim 0,1 \text{ эВ/см}^3$ [7], что на порядок меньше плотности энергии галактических КЛ $\sim 1 \text{ эВ/см}^3$ [8, с. 471] и сравнимо с плотностью энергии МФИ $\sim 0,25 \text{ эВ/см}^3$ [10, с. 135]. Так, предполагается, что горячий межгалактический газ в гало (коронах) галактик разогревают релятивистские объекты в двойных системах (нейтронные звезды и черные дыры) [17], обладающие магнитным полем, удерживающим ионизованный газ [18].

В однородной и изотропной космической среде динамика областей неоднородности определяется балансом сил давления среды и гравитации вещества. Согласно теории гравитационных неустойчивостей, если сила давления космической среды (газа) меньше силы гравитации, области неоднородности сжимаются [6, с. 522]. Превышение силы давления среды над силами гравитации в областях неоднородности определяет динамику их расширения.

Динамика расширения однородной в крупном масштабе Вселенной может определяться динамикой расширения областей ее неоднородности – войдов. Анализ структуры филаментов (с учетом слияния галактик и формирования их скоплений) в условиях падения активности галактик указывает на перспективу прекращения расширения войдов [7], что свидетельствует в пользу модели циклической Вселенной, расширение которой сменит сжатие [2].

4. Локальный характер давления межгалактической среды

Космологические модели исходят из однородного и изотропного распределения материи [3, с. 377]. Так, пространство Вселенной наполнено ФКИ, изотропным в сопутствующей системе отсчета, связанной с галактиками. Например, МФИ изотропно в сопутствующей системе отсчета [10, с. 135]. Поскольку *в однородной Вселенной нет градиента давления*, в ней нет и гидродинамических сил, определяемых перепадом давления и способных влиять на движение вещества; при этом давление проявляется только в гравитации [8, с. 477].

Между тем Вселенная однородна лишь в крупном масштабе и весьма неоднородна в масштабе войдов. При этом межгалактическая среда в войдах может оказывать давление на гало (короны) галактик в филаментах, способствуя формированию войдов [7] (§ 3).

Оценки показывают, что в условиях хаббловского расширения наблюдаемой Вселенной соседние области межгалактической среды, удаленные друг от друга на расстояние $r \sim 20 \text{ Мпк}$ (сравнимое с радиусом войдов), не смогут оказывать давление друг

на друга. Тем самым, давление межгалактической среды эффективно в масштабе областей неоднородности материи – войдов и носит *локальный* характер, т.е. применимо к сопутствующей системе отсчета, связанной с галактиками (средой).

Гравитационное давление в области неоднородности материи зависит от ее радиуса и плотности среды $p = \rho g R$, где $g \sim G \rho R$, т.е. $p \sim \rho^2 R^2$. В условиях хаббловского расширения динамическое давление среды в области филаментов $p = \rho v^2$ чувствительно к скорости расширения v и может сравниться с плотностью энергии межгалактической среды в войдах $p = \varepsilon$ при скорости движения филаментов относительно центра войдов:

$$v \approx (\varepsilon/\rho)^{1/2}, \quad (6)$$

где ρ_c – критическая плотность Вселенной.

Формула (6) с учетом закона Хаббла (4) позволяет оценить масштаб области, при котором эффективно давление среды:

$$r \approx (1/H_0) \cdot (\varepsilon/\rho)^{1/2}. \quad (7)$$

По данным WMAP и Planck постоянная Хаббла $H_0 \sim 70$ км/с·Мпк. При $\rho_c \sim 9 \cdot 10^{-30}$ г/см³; $\varepsilon \sim 0,1$ эВ/см³ [7] критическое удаление $r \approx 20$ Мпк, что сравнимо с радиусом войдов.

Так, размер войдов $D \sim 50$ Мпк [6, с. 347]; по уточненным данным $D \sim 30 - 35$ Мпк [8, с. 478]; $D \sim 14 - 35$ Мпк [19] при среднем *радиусе войдов* $R_v = D/2 \approx 20 \pm 5$ Мпк. Тем самым, *давление межгалактической среды эффективно в масштабе войдов.*

Пространство наблюдаемой Вселенной близко к плоскому. Исходя из характера распределения материи Вселенной – ее изотропии и однородности в крупном масштабе, *Вселенная может расширяться под давлением межгалактической среды в областях неоднородности материи – войдах* [7].

По определению, при изотропном расширении (сжатии) относительное изменение расстояния между любыми двумя точками среды при деформации (относительная объемная деформация) одинаково. Изотропное расширение реализуемо в условиях одинакового расширения *локальных* областей среды под влиянием соответствующих физических процессов. При этом распределение плотности (поле плотности) описывает *скалярное поле* [1, с. 545].

Области неоднородности материи – войды радиусом r в масштабе Вселенной радиусом $R \gg r$ представимы как локальные деформации. Скорость расширения войдов $v = rH_0$ в крупном масштабе суммируется: $\Sigma v = H_0 \Sigma r$. В масштабе Вселенной $\Sigma r \sim R$ при $H_0 \sim 1/T$ скорость удаления войдов в области горизонта ограничивает скорость света: $\Sigma v \sim R/T \approx c$.

5. Учет ненаблюдаемой части Вселенной в космологических моделях

Наблюдаемая Вселенная расширяется согласно закону Хаббла (4). Изотропное в космологических масштабах расширение пространства учитывает *масштабный фактор* R , описывающий пространство в сопутствующей системе отсчета. При изотропном расширении Вселенной в сопутствующей системе отсчета скорость относительного изменения линейных масштабов dR/dt характеризует постоянная Хаббла [8, с. 477]:

$$H_0 = dR/Rdt. \quad (8)$$

Распространение светового сигнала в пределах горизонта Вселенной происходит в условиях хаббловского расширения, вносящего вклад в ее радиус. По порядку величины радиус Вселенной $R \sim c/H_0$; ее возраст $T \sim 1/H_0$. Точное значение R зависит от космологической модели. В стандартной космологической модели радиус Вселенной $R = 2c/H_0$; ее возраст $T = 2/3H_0$ [6, с. 347]. За время расширения Вселенной свет пройдет расстояние $r = cT = 2c/3H_0$, что составляет $r/R = 1/3$ ее радиуса. Вклад изотропного хаббловского расширения пространства в радиус Вселенной $1 - r/R = 2/3$.

Отметим, что стандартная космологическая модель нестационарной однородной Вселенной критической плотности предполагает расширение ее горизонта ограничивающую наблюдаемую часть (Метагалактику), на ненаблюдаемую (времениподобную) область, учитывая ее в *неявном виде*. В противном случае возникает проблема роста (рождения) массы Вселенной, позволяющей пропорционально расширяться ее горизонту [2].

Так, гравитационный радиус области, наполненной материей критической плотности (радиус горизонта) пропорционален ее массе:

$$R_g \sim Gm/c^2, \quad (9)$$

где c – скорость света; m – масса тела.

Тем самым *расширение Вселенной сопровождается пропорциональным ростом массы материи внутри ее горизонта*.

В модели нестационарной однородной Вселенной современной критической плотности ρ_c среднюю плотность вещества ρ при экстраполяции в прошлое определяет красное смещение согласно зависимости:

$$\rho = \rho_c(z + 1)^2, \quad (10)$$

где z – красное смещение.

Радиус горизонта нестационарной Вселенной определяет зависимость:

$$R = R_0/(z + 1), \quad (11)$$

где R_0 – современный радиус Вселенной.

Массу материи в пределах горизонта $M \sim \rho R^3$ определяет зависимость:

$$M = M_0/(z + 1), \quad (12)$$

где M_0 – масса современной наблюдаемой Вселенной.

При этом гравитация материи в ненаблюдаемой (времениподобной) части Вселенной компенсирует гравитацию (пространственноподобной) видимой части, обеспечивая однородное распределение материи [2].

В замкнутых моделях однородной и изотропной циклической Вселенной радиус ее горизонта ограничен временем распространения светового сигнала и достигает максимального значения $R \leq R_m$ при максимальном расширении Вселенной [8, с. 477].

Как следует из уравнения Ф-Р-У (1), движение при $k = 1$ финитно и периодически, то есть радиус Вселенной R со временем сначала растет от 0 до максимума, а затем убывает снова до 0 и т.д. Радиус видимой части расширяющейся Вселенной ограничен скоростью распространения света $R \sim ct$. При этом зависимость радиуса видимой части циклической Вселенной от времени может описывать *циклоида*:

$$R = R_m(1 - \cos 2\pi t/T)/2, \quad (13)$$

где R_m – максимальный радиус Вселенной; T – период Вселенной.

По окончании фазы расширения Вселенной $0 \leq t \leq T/2$ параметр $\alpha = 2\pi t/T = \pi$ при $\cos \pi = -1$, т.е. она достигает максимального радиуса $R = R_m$. При этом станет наблюдаемым все *потенциально наблюдаемое* пространство циклической Вселенной.

Так, диаметрально противоположные (полярные) точки сферического пространства соединяет кратчайшая линия – геодезическая длиной πR . При круговой частоте $\omega = 2\pi/T$ за время $t = T/2$ световой сигнал пройдет расстояние πct , что соответствует половине окружности радиусом $2\pi R_m$.

6. Интерпретации космологического члена

Из-за невозможности описания всего многообразия событий в космологических моделях используются допущения (идеализации), которые привносят искажения в решения уравнений теории относительности. Так, при решении уравнений теории относительности все пространство Вселенной учитывают как *пространственноподобную* область (§ 1).

Указанное допущение применяется как в случае нестационарной (расширяющейся) Вселенной Фридмана, так и стационарной Вселенной Эйнштейна. Так, при достижении радиальной координатой гравитационного радиуса (горизонта событий) гравитационный потенциал стремится к бесконечности [20, с. 55], что обычно трактуется как переход от пространственноподобной координаты к времениподобной [20, с. 56].

Искажения, приносимые используемыми в космологических моделях допущениями, можно скорректировать за счет учета соответствующих граничных условий в области горизонта Вселенной в духе подходов Эйнштейна и Леметра путем введения космологического члена Λ , имеющего размерность кривизны пространства и являющегося эквивалентом плотности энергии среды (давления) в зависимости от интерпретации.

В качестве примера учета *граничных условий* рассмотрим наблюдаемую область нестационарной изотропной и однородной Вселенной, чей горизонт расширяется в соответствии с законом Хаббла, как это и предполагает стандартная космологическая модель [3, с. 377]. В условиях хаббловского расширения среда в области горизонта движется (для наблюдателя в центре видимой ему Вселенной) со скоростью света, обладая плотностью энергии:

$$\varepsilon \approx \rho c^2. \quad (14)$$

В космологических моделях плотность энергии (давление) среды так называемого «ложного вакуума» $\varepsilon \sim \rho c^2$ [8, с. 475]. Тем самым, *кинетическая энергия космической среды в области горизонта расширяющейся Вселенной компенсирует гравитационную энергию ее видимой наблюдателю области.*

Распределение плотности (поле плотности) среды описывается посредством *скалярного поля* [1, с. 545]. Соответственно, распределение плотности кинетической энергии среды также может быть описано посредством скалярного поля. Так, стандартная космологическая модель учитывает давление среды, соответствующее плотности энергии ε , связываемой со скалярным полем:

$$\varepsilon = c^4 \Lambda / 8\pi G, \quad (15)$$

где Λ – космологический член [8, с. 475].

Рассмотрим математические основания введения Λ члена в духе подхода Эйнштейна. Формально космологический член Λ эквивалентен дополнительному члену в тензоре энергии-импульса. Напомним, что уравнения тяготения Эйнштейна для однородной стационарной Вселенной с учетом космологической постоянной Λ записываются в виде (3). В частном случае равновесия давления p и плотности энергии ε в системе отсчета, в которой элемент вещества покоится $\varepsilon = -p$, для однородной стационарной Вселенной тензор энергии импульса имеет вид $T_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$, где Λ член:

$$\Lambda = 8\pi G\rho/c^2, \quad (16)$$

где ρ – средняя плотность материи Вселенной [3, с. 190].

При критической плотности современной Вселенной $\rho_c \sim 9 \cdot 10^{-30}$ г/см³ согласно формуле (16) космологический член $\Lambda \approx 1,6 \cdot 10^{-56}$ см⁻². Наблюдаемая кривизна пространства Вселенной $|\Lambda| < 10^{-55}$ см⁻² [3, с. 191], т.е. у космологического члена *размерность кривизны риманова пространства.*

Так, риманово пространство обладает кривизной:

$$k = 1/R^2, \quad (17)$$

где R – радиус кривизны [1, с. 528].

Кривизну пространства Римана в *общей теории относительности* (ОТО), приносимую материей, может компенсировать член $\Lambda = -k$. Исходя из формулы (16) радиус кривизны пространства ОТО представим в виде:

$$R_s^2 = c^2/8\pi G\rho. \quad (18)$$

Гравитационный радиус черной дыры в виде сферы в 3-мерном плоском пространстве, наполненной материей критической плотности [2], соответствующий радиусу кривизны 2-мерного сферического пространства:

$$R_g^2 = 3c^2/8\pi G\rho. \quad (19)$$

Аналогичный радиус имеет горизонт событий в пространстве-времени де Ситтера $R_o^2 = 3c^2/8\pi G\rho$ с космологическим членом $\Lambda = 3/R_o^2$ [3, с. 458].

Космологический Λ член имеет *геометрическую интерпретацию в виде отрицательной кривизны 3-мерной псевдосферы* радиусом iR_s :

$$\Lambda = 1/(iR_s)^2. \quad (20)$$

Отметим, что радиус кривизны 3-мерного сферического пространства R_s в формуле (18) в $R_g/R_s = \sqrt{3} \approx 1,7$ раза меньше радиуса кривизны 2-мерного сферического пространства R_g согласно формуле (19). Для сравнения, объем замкнутого 3-мерного сферического пространства без границ $V_s = 2\pi^2 R^3$ [3, с. 377] превышает объем 3-мерной сферы аналогичного радиуса $V = 4\pi R^3/3$ (имеющей границы) в $V_s/V = 3\pi/2$ раз, т.е. равный объем данных пространств достигается при сравнимом соотношении радиусов $R_g/R_s = (3\pi/2)^{1/3} \approx 1,7$.

Мнимая координата iR_g представима в виде радиуса псевдосферы, соответствующая гиперболическому пространству отрицательной кривизны (Лобачевского). Так, в интерпретации Бельтрами «геометрия на куске плоскости Лобачевского совпадает с геометрией на поверхностях постоянной отрицательной кривизны» типа псевдосферы [1, с. 325]. *Псевдосфера* (мнимая сфера) – фигура вращения в виде поверхности постоянной отрицательной кривизны (рис. 2) [1, с. 507].

В неевклидовой (римановой) геометрии геометрия Лобачевского и Римана дополняют друг друга [1, с. 397]. Пространственноподобная область в пределах горизонта наблюдаемой Вселенной соответствует геометрии *Римана* положительной кривизны; времениподобная область за горизонтом – геометрии *Лобачевского* отрицательной кривизны.

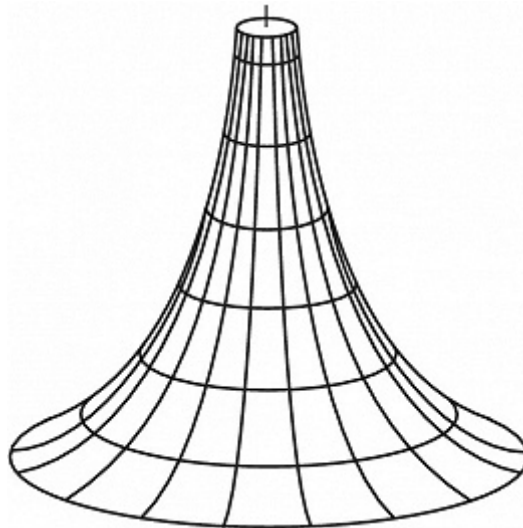


Рис. 2. Псевдосфера в геометрии Лобачевского

Положительную кривизну 2-мерного сферического пространства $k = 1/R^2$ (17), являющейся поверхностью 3-мерной сферы (рис. 1), компенсирует *отрицательная*

кривизна $-k = 1/(iR)^2$ псевдосферы (рис. 2), имеющей мнимый радиус iR [5]. Сходные соотношения справедливы для 3-мерного сферического пространства ОТО $k = 1/Rs^2$; $-k = 1/(iRs)^2$.

При замене R на iR все метрические формулы геометрии Лобачевского (сохраняющие при замене физический смысл) переходят в соответствующие формулы геометрии Римана [1, с. 398]. В силу соотношения $i^2 = -1$ *квадраты мнимых чисел в римановой геометрии приобретают геометрический смысл отрицательной кривизны пространства.*

При движении в 3-мерном сферическом пространстве от одной полярной точки к другой площадь горизонта сначала возрастает, а затем снижается (§ 2), что представимо как расширение пространства, сменяющееся сжатием, эквивалентное смене знака его кривизны. В силу зеркальной симметрии полярных точек в сферическом пространстве, половину 3-мерного сферического пространства дополнит зеркально симметричная половина за горизонтом.

Если пространственноподобная область является сферой, то область за горизонтом (времениподобная) относительно наблюдателя является псевдосферой. При перемещении наблюдателя в диаметрально противоположную (полярную) точку Вселенной, пространственноподобная и времениподобная области для него меняются местами в силу симметрии. Тем самым, отрицательная кривизна пространства за горизонтом оказывается воображаемой. Так, сам Лобачевский считал развитую им концепцию «воображаемой геометрией», основанной на «теории пространственных отношений» [1, с. 325].

ОТО развита в рамках геометрии Римана. При этом в космологическом масштабе возникает *отрицательная* кривизна пространства, присущая геометрии Лобачевского. Так, при равномерном распределении масс в космологических масштабах пространство имеет геометрию Лобачевского, так что она находит приложение не только в *специальной (частной) теории относительности* (СТО), но и в ОТО [1, сс. 326-327].

Для наблюдателя, расположенного в любой точке 3-мерной сферической Вселенной (Римана), как и для наблюдателя в полярной точке, область за горизонтом (времениподобная) имеет отрицательную кривизну, которая компенсирует положительную кривизну пространства в пределах горизонта, что учитывает космологический Λ член.

Напомним, что из-за невозможности описания всего многообразия событий при решении уравнений теории относительности все пространство учитывают как пространственноподобную область, включая времениподобную часть за горизонтом (§ 2). Это приводит к завышению плотности энергии (давления) среды (ассоциируемой с так называемой «темной энергией») компенсирующей гравитацию материи наблюдаемой Вселенной [2]. При этом *учет гравитация материи в ненаблюдаемой области Вселенной снимает проблему так называемой «темной энергии».*

Отметим, что замкнутые космологические модели фактически уподобляют Вселенную черной дыре, пространство внутри которой не замкнуто вдоль радиальной координаты, т.е. имеет границы. Между тем пространство *стационарной* 3-мерной сферической Вселенной Римана без границ замкнуто вдоль 3-х пространственных координат, что формально может обеспечить введение 4-й мнимой обобщенной координаты в виде радиуса псевдосферы iRs , что эквивалентно учету члена $\Lambda = 1/(iRs)^2$.

В псевдоримановом 4-мерном континууме *нестационарной* Вселенной замкнутость 3-х пространственных координат формально обеспечит введение 4-й мнимой временной координаты ict (в виде обобщенной координаты в пространстве скоростей). Введение Эйнштейном в СТО мнимой координаты ict эквивалентно введению в ОТО космологического Λ члена [5]. Переход от стационарной координаты Rs к координате,

зависящей от времени ct , позволяет записать соотношение (20) для псевдориманова пространства:

$$\Lambda = 1/(ict)^2. \quad (21)$$

С целью согласования модели стационарной Вселенной с ОТО Эйнштейн ввел «космологический член», являющийся *постоянной* величиной. При этом Эйнштейн признает, что «уравнения поля допускают решение, в котором "радиус мира" зависит от времени (расширяющееся пространство)» [4, с. 212], как это и предполагает модель нестационарной Вселенной Фридмана.

Так, рост объема и массы расширяющейся Вселенной может происходить за счет расширения наблюдаемого пространства в пределах горизонта, ограниченного скоростью распространения светового сигнала, на ненаблюдаемую область за горизонтом (§ 5). При этом плотность Вселенной с расширением ее горизонта падает. Космологический член пропорционален средней плотности материи Вселенной $\Lambda \sim \rho$ (16), т.е. *по мере расширения Вселенной космологический член уменьшается по величине*.

Рассмотрим экстраполяцию параметров расширяющейся Вселенной в прошлое. Согласно закону Хаббла, радиус Вселенной определяет красное смещение. Соответственно, член $\Lambda = 1/(iRs)^2$ (20) для пространства Римана с учетом формулы (11) представим в виде, зависящем от современного радиуса Вселенной R_0 и красного смещения z :

$$\Lambda = (z + 1)^2/(iR_0)^2. \quad (22)$$

В модели нестационарной однородной Вселенной критической плотности в эпоху, определяемую красным смещением z ее возраст:

$$t = t_0/(z + 1)^{3/2}, \quad (23)$$

где t_0 – возраст современной Вселенной.

С учетом (23) космологический член для псевдориманова пространства $\Lambda = 1/(ict)^2$ (21) зависит от красного смещения z согласно соотношению:

$$\Lambda = (z + 1)^3/(ict_0)^2. \quad (24)$$

Тем самым, *в нестационарной Вселенной космологический член не является константой*.

7. Выводы

1. Из-за невозможности описания всего многообразия событий космологические модели используют ряд допущений (идеализаций), распространяющих свойства среды, корректные для ограниченной области пространства, на все пространство Вселенной, включая ненаблюдаемую (времениподобную) область за ее горизонтом. При этом вся Вселенная рассматривается как *пространственноподобная* область. Такие допущения искажают соответствующие решения уравнений теории относительности.

2. Стандартная космологическая модель описывает *наблюдаемую* часть изотропной и однородной Вселенной в сопутствующей системе отсчета (связанной с галактиками), одновременно являющейся *синхронной*. В условиях расширения Вселенной подобная система отсчета накладывает ограничение на описание удаленной области пространства вблизи горизонта наблюдаемой Вселенной и времениподобной области за его пределами.

3. Замкнутые модели Вселенной используют *секуляризованную* модель пространства Римана, в котором пары диаметрально противоположных (полярных) точек отождествляются и условно рассматриваются как один объект. Между тем фактически в пространстве Римана полярные точки не совпадают. Через полярные точки, включая область горизонта, проходит плоскость (поверхность), разделяющая пространство Римана на *зеркально симметричные* половины. При этом гравитация материи во

времениподобной области за горизонтом компенсирует гравитацию в пространственноподобной части Вселенной Римана.

4. Вклад допущений, используемых в космологических моделях, можно скорректировать за счет учета *граничных условий* в области горизонта Вселенной в духе подходов Эйнштейна и Леметра путем введения космологического члена $\Lambda = 1/(iR_s)^2$, имеющего размерность кривизны пространства, также являющегося эквивалентом плотности энергии среды (давления), в зависимости от интерпретации.

5. Поскольку с расширением горизонта плотность Вселенной падает, в нестационарной Вселенной космологический член является не постоянной, а переменной величиной. Определена зависимость космологического члена от красного смещения z для риманова и псевдориманова пространства.

6. Известные космологические модели предполагают, что Вселенная изотропна и *однородна*. Однако, наблюдаемая Вселенная однородна лишь в крупном масштабе и *неоднородна* в масштабе сверхскоплений галактик и разделяющих их войдов. Такая Вселенная может расширяться под давлением межгалактической среды в областях ее неоднородности – войдах.

7. Показано, что в условиях хаббловского разбегания галактик давление межгалактической среды может быть эффективно в масштабе войдов, т.е. носит локальный характер и применимо к сопутствующей системе отсчета, связанной с галактиками.

8. Известные космологические модели развиты в рамках риманова пространства, или псевдориманова пространства-времени. В малом масштабе риманово (псевдориманово) пространство близко к плоскому (евклидову) пространству, как и в большом масштабе. При этом вне зависимости от космологической модели, наблюдаемая однородная в крупном масштабе Вселенная, чье пространство близко к плоскому, может расширяться в условиях давления среды в областях неоднородности материи – войдах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.В. Прохоров. Большой энциклопедический словарь. Математика. – М.: Научное издательство «Большая Российская энциклопедия». – 2000.
2. С.Ю. Поройков. Расширение наблюдаемой Вселенной в условиях давления метагалактических космических лучей в войдах, рассеиваемых магнитным полем корон галактик в филаментах // Журнал естественнонаучных исследований. – 2020. – Т. 5. – № 3. – С. 29-58.
3. А.М. Прохоров. Физическая энциклопедия, т. 5. М.: Научное издательство «Большая Российская энциклопедия». – 1998.
4. А. Эйнштейн. Теория относительности. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2000.
5. С.Ю. Поройков. Особенности временной координаты в теории относительности // Основания фундаментальной физики и математики: материалы IV Российской конференции (ОФФМ-2020) / под ред. Ю.С. Владимирова, В.А. Панчелюги – М.: РУДН. – 2020. – С. 125-131.
6. А.М. Прохоров. Физическая энциклопедия, т. 1. М.: Научное издательство «Большая Российская энциклопедия». – 1988.
7. С.Ю. Поройков. Расширение войдов и их субструктур под давлением космических лучей, рассеиваемых магнитным полем гало (корон) галактик // Журнал естественнонаучных исследований. – 2021. – Т. 6. – № 4. – С. 15-30.
8. А.М. Прохоров. Физическая энциклопедия, т. 2. М.: Научное издательство «Большая Российская энциклопедия». – 1998.

9. *А.М. Прохоров*. Физическая энциклопедия, т. 4. М.: Научное издательство «Большая Российская энциклопедия». – 1994.
10. *А.М. Прохоров*. Физическая энциклопедия, т. 3. М.: Научное издательство «Большая Российская энциклопедия». – 1992.
11. J.T. Nielsen, A. Guffanti, S. Sarkar. Marginal evidence for cosmic acceleration from Type Ia supernovae // *Scientific Reports*. – 2016. – V. 6. – № 35596. – 8 pp.
12. R. Adam, et al. Planck 2015 results. I. Overview of products and scientific results // *Astronomy and Astrophysics*. – 2016. – V. 594. – A1. – 38 pp.
13. D. Saadeh, S.M. Feeney, A. Pontzen, H.V. Peiris, J.D. McEwen. How Isotropic is the Universe? // *Physical Review Letters*. – 2016. – V. 117. – Is. 13. – 6 pp.
14. K. Migkas, G. Schellenberger, T. H. Reiprich, F. Pacaud, M. E. Ramos-Ceja, L. Lovisari. Probing cosmic isotropy with a new X-ray galaxy cluster sample through the LX–T scaling relation // *Astronomy and Astrophysics*. – 2020. – V. 636. – A15. – 42 pp.
15. S.A. Pustilnik, A.L. Tepliakova, D.I. Makarov. Void galaxies in the nearby Universe – I. Sample description // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2019. – V. 482. – Is. 4. – P. 4329–4345.
16. R.B. Tully, D. Pomarède, R. Graziani, H.M. Courtois, Y. Hoffman, E.J. Shaya. Cosmicflows-3: Cosmography of the Local Void // *The Astrophysical Journal* – 2019. – V. 880:24. – № 1. – 14 pp.
17. *А.В. Засов, А.С. Сабурова, А.А. Хонерсков, С.А. Хонерсков*. Темная материя в галактиках // *Успехи физических наук*. – 2017. – Т. 187. – № 1. – С. 3-44.
18. *С.Ю. Поройков*. Вклад в рентгеновский космический фон излучения вспыхивающих красных карликов в двойных системах в гало и короне галактики // *Журнал естественнонаучных исследований*. – 2021. – Т. 6. – № 1. – С. 2-15.
19. S.A. Pustilnik, A.L. Tepliakova, D.I. Makarov. Void galaxies in the nearby Universe – I. Sample description // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2019. – V. 482. – Is. 4. – P. 4329–4345.
20. *Ю.С. Владимиров*. Геометрофизика. – М.: БИНОМ. – 2005.