

Научная статья

Статья в открытом доступе

УДК 556.088

doi:10.30987/2658-6436-2022-3-34-45

## ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ ШЕСТИЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА

Павел Игоревич Голомаздин <sup>1</sup>, Олег Николаевич Дмитроченко <sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Брянский государственный технический университет, г. Брянск, Россия

<sup>1</sup> golomazdinp@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-4567-0038>

<sup>2</sup> dmitroleg@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0614-5991>

**Аннотация.** Проведен краткий обзор существующих методов решения обратной задачи кинематики для многозвенных механических систем. Разработана геометрическая модель промышленного манипулятора семейства KUKA с шестью степенями свободы. Применен специальный метод раздельного решения обратной задачи кинематики для манипуляторов с конструкцией сферического запястья с целью демонстрации эффективности данного подхода. Программно реализовано приближенное численное решение обратной задачи кинематики для данного манипулятора. Эффективность программного решения протестирована на примере решения различных траекторных задач с применением программного комплекса «универсальный механизм» для моделирования механических систем.

**Ключевые слова:** манипулятор, KUKA, робототехника, обратная задача кинематики, численное решение обратной задачи кинематики, универсальный механизм

**Для цитирования:** Голомаздин П.И., Дмитроченко О.Н. Программная реализация решения обратной задачи кинематики шестизвенного манипулятора // Автоматизация и моделирование в проектировании и управлении. 2022. №3 (17)С. 34-45. doi: 10.30987/2658-6436-2022-3-34-45.

Original article

Open Access Article

## SOFTWARE IMPLEMENTATION OF SOLVING THE INVERSE KINEMATICS PROBLEM OF A SIX-MEMBERED MANIPULATOR

Pavel I. Golomazdin <sup>1</sup>, Oleg N. Dmitrochenko <sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Bryansk State Technical University.

<sup>1</sup> golomazdinp@gmail.com

<sup>2</sup> dmitroleg@rambler.ru

**Abstract.** A brief review of the existing methods for solving the inverse kinematics problem for multilink mechanical systems is carried out. A geometric model of an industrial manipulator of the KUKA family with six degrees of freedom is developed. A special method for separately solving the inverse kinematics problem for a manipulator with a spherical wrist design is applied to demonstrate this approach efficiency. An approximate numerical solution of the inverse kinematics problem for this manipulator is implemented in software. The effectiveness of the software solution is tested on the example of solving various trajectory problems using the Universal Mechanism software package for modelling mechanical systems.

**Keywords:** manipulator, KUKA, robotics, inverse kinematics problem, numerical solution of the inverse kinematics problem, Universal mechanism

**For citation:** Golomazdin P. I., Dmitrochenko O.N. Software implementation of solving the inverse kinematics problem of a six-membered manipulator. Automation and modeling in design and management, 2022, no. 3 (17). pp. 34-45. doi: 10.30987/2658-6436-2022-3-34-45.

### Введение

Две задачи встречаются чаще всего в механике, кинематике и робототехнике, в частности: прямая и обратная задачи кинематики. Поскольку эти задачи имеют высокую значимость для практического применения, то они заслуживают отдельного внимания.

Прямая задача кинематики решает проблему, в которой при известных геометрических параметрах робототехнической системы необходимо найти координаты положения и углы

ориентации рабочего инструмента.

Обратная задача кинематики заключается в обратном, т.е. нахождении всех возможных положений робототехнической системы (углов поворота звеньев) при ее известных геометрических параметрах. Данная задача гораздо сложнее прямой задачи кинематики, поскольку решение может быть неоднозначным.

Для решения обратной задачи кинематики было разработано огромное количество различных методов и подходов. Все методы решения можно разделить на две принципиально различающиеся группы: точные (аналитические) методы; приближенные (численные) методы.

С помощью аналитических методов получают абсолютно точные решения, тогда как численные предоставляют приближенные вычисления с некой погрешностью.

Рассмотрим некоторые из существующих методов.

**Аналитические методы.** К таким методам можно отнести следующие: тригонометрический метод, геометрический метод, метод обратных преобразования и некоторые другие.

**Тригонометрический метод.** Этот метод заключается в нахождении необходимых зависимостей (линейных перемещений и углов поворота) с помощью тригонометрических формул на основе кинематической схемы робота.

**Метод обратных преобразований.** Данный подход решения состоит в следующем: каждому звену робототехнической системы присваивается своя система координат. Для этого можно использовать, например, метод Денавита-Хартенберга [2], который очень популярен в робототехнике. Также можно воспользоваться методом двух связываемых систем координат [3], преимущества которого будут раскрыты далее в работе. После назначения систем координат составляются матрицы однородного преобразования для всех звеньев робототехнической системы.

**Приближенные или численные методы.** К этим методам относятся: метод Ньютона, бикватернионное решение, метод конечного поворота и смещения, метод FABRIK.

**Метод Ньютона.** С помощью этого метода путем дифференцирования функции положения выражается взаимосвязь между обобщенными координатами робота и значениями положения и ориентации его рабочего инструмента. Дифференцирование сопровождается составлением специальной матрицы Якоби, необходимой для разрешения системы нелинейных уравнений. Из-за небольших поэтапных изменений положения рабочего инструмента исключаются возможные решения, не подходящие к рассматриваемой конфигурации робота, что является безусловным достоинством данного подхода при решении обратной задачи кинематики [3].

**Метод конечного поворота и смещения.** Этот метод решения основан на теореме о конечных углах поворота и теореме о конечных перемещениях в применении к вспомогательным углам по каждой степени подвижности. Применение этих теорем позволяет решить обратную задачу кинематики согласно параметрам критерия максимального приближения схвата по положению и ориентации по каждой степени подвижности [5].

**Бикватернионный метод решения.** С помощью данного метода была решена обратная задача кинематики для Стэндфордского манипулятора [6]. Используя бикватернионную кинематическую теорию управления движением свободного твердого тела, автор решает задачу Коши для дифференциальных кинематических уравнений по принципу обратной связи.

По итогам обзора можно заключить, что для робототехнических систем с малым количеством звеньев, не обладающих кинематической избыточностью, гораздо более удобно использовать аналитические методы решения, которые не требовательны к вычислительным мощностям. В то же время, для роботов с избыточной кинематикой (с большим количеством звеньев) лучшим решением будет использовать численные методы, поскольку они позволяют получить единственное решение для конкретной конфигурации системы.

Для решения обратной задачи кинематики был выбран метод Ньютона, поскольку он довольно прост в реализации и интуитивно понятный. Задача решается применительно к одному из промышленных манипуляторов KUKA KR 6 R 900 Agilus. Данный робот расположен в лаборатории Брянского государственного технического университета, является довольно универсальным и предназначен для различного рода промышленных задач.

## Математическая модель манипуляционного робота

Чтобы описать модель манипулятора математически был применён метод двух связываемых систем координат [3]. Данный метод описания математической модели манипулятора позволяет отделять параметры, описывающие геометрию звеньев от параметров, описывающих их относительное передвижение, что является преимуществом перед другими методами описания.

Данный метод предполагает, что для каждого подвижного звена манипулятора будет использовано две системы координат. С их помощью формируются матрицы преобразования однородных координат, которые определяют положение манипулятора в пространстве. Манипуляторы – это робототехнические системы с разомкнутой кинематической цепью, звенья которых соединены между собой кинематическими парами пятого класса. Так как каждое звено содержит два кинематических соединения, то целесообразно поместить две системы координат в центры кинематических пар для каждого звена. С применением данного подхода получаем следующую математическую модель (рис. 1).

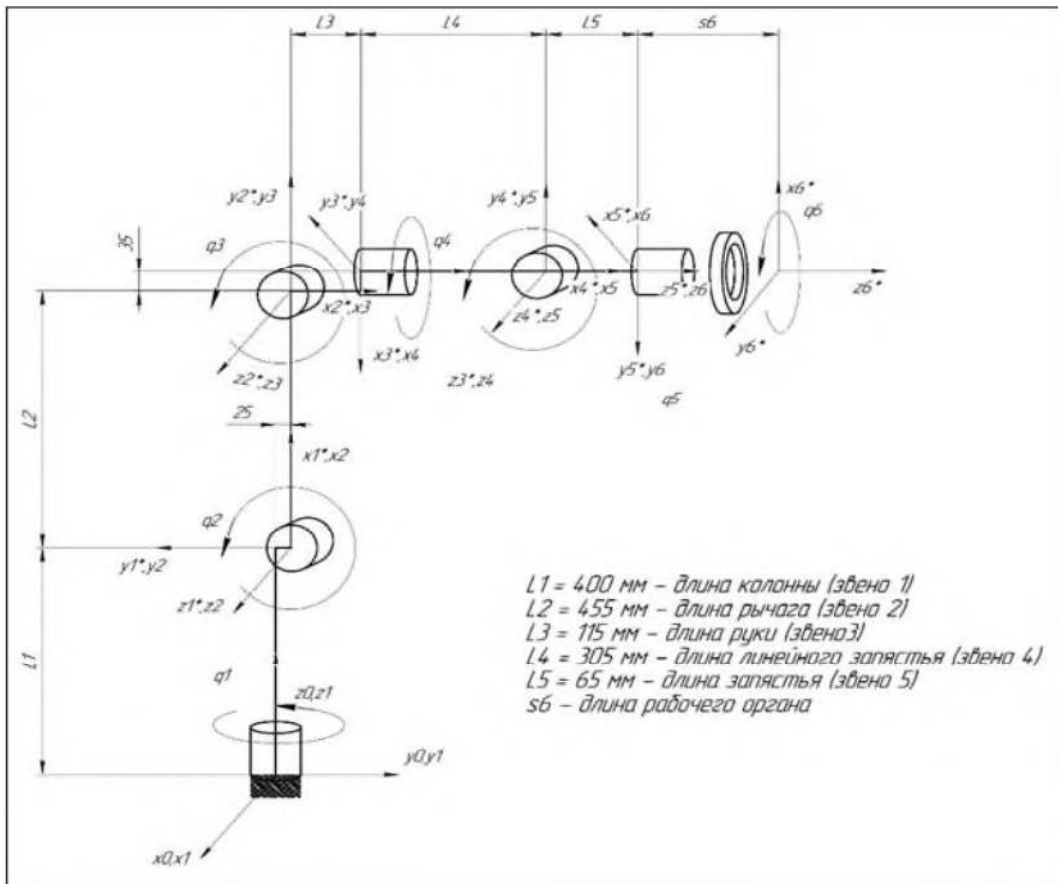


Рис. 1. Модель манипулятора KUKA KR6 R 900 Agilus с геометрическими параметрами  
Fig. 1. Geometric model of the manipulator KUKA KR6 R 900 Agilus

Матрицы преобразования однородных координат выглядят следующим образом:

$$A_{i,i^*} = \begin{bmatrix} R_i & G_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $R_i$  – матрица, описывающая поворот звеньев относительно друг друга;  
 $G_i = [g_{xi} \ g_{yi} \ g_{zi}]$  – вектор, описывающий геометрические параметры звена.

Матрица поворота состоит из направляющих косинусов углов между осями двух систем координат, связанных с одной и той же кинематической парой, но разными звеньями манипулятора:

$$R_i = \begin{bmatrix} \cos(x_1, x_2) & \cos(x_1, y_2) & \cos(x_1, z_2) \\ \cos(y_1, x_2) & \cos(y_1, y_2) & \cos(y_1, z_2) \\ \cos(z_1, x_2) & \cos(z_1, y_2) & \cos(z_1, z_2) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где  $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$  – оси повернутых друг относительно друга систем координат.

Для данной геометрической модели можно составить следующие матрицы: 0

$$A_{1,1}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & g_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; A_{2,2}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & g_2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; A_{3,3}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & g_3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A_{4,4}^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & g_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; A_{5,5}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & g_5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; A_{6,6}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & g_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

При использовании данного подхода при формировании геометрической модели чаще всего за ось относительного движения принимают ось  $Z_i$ , поэтому матрица, отвечающая за поворот, будет выглядеть следующим образом:

$$A_{(i-1)^*,i} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma_i q_i) & -\sin(\gamma_i q_i) & 0 & 0 \\ \sin(\gamma_i q_i) & \cos(\gamma_i q_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (1 - \gamma_i)q_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где  $q_i$  – обобщенные координаты (углы поворота); коэффициенты  $\gamma_i$  задаются в зависимости от последовательности кинематических пар: при вращательной кинематической паре  $\gamma = 1$ , при поступательной кинематической паре  $\gamma_i = 0$ . Рассматривая начальное положение манипулятора, где все обобщенные координаты равны нулю, все представленные выше матрицы примут вид единичной матрицы.

Из формул (3) и (4) имеем:

$$A_{i,j} = A_{i,i}^* * A_{i^*,j}. \quad (5)$$

Для формирования результирующей матрицы однородного преобразования  $A_{0,6}$ , описывающей положение рабочего инструмента относительно базовой системы координат манипулятора  $S_0$ , нужно проделать последовательное перемножение всех предыдущих матриц преобразования однородных координат.

$$A_{0,6} = \prod_{i=1}^6 A_{(i-1),i}. \quad (6)$$

Чтобы проверить корректность составленных матриц, посмотрим на результаты решения прямой задачи кинематики. Располагая необходимой информацией о геометрии и положении звеньев, вычислим радиус-вектор положения рабочего инструмента.

Радиус-вектор положения рабочего инструмента имеет следующий вид:

$$r_0 = A_{0,k} r_k, \quad (7)$$

где  $r_0$  – вектор  $[X_0 \ Y_0 \ Z_0 \ 1]^T$ , содержащий координаты рабочего инструмента в базовой системе координат;  $r_k$  – вектор  $[X_k \ Y_k \ Z_k \ 1]^T$ , содержащий координаты рабочего инструмента в локальной системе координат (системе координат самого рабочего инструмента).

Можем рассчитать радиус-вектор начального положения рабочего инструмента манипулятора как в формуле (7). За начальное положение возьмем положение манипулятора, изображенное на рис. 1.

Предположим, что  $r_{M^6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_6 \\ 1 \end{bmatrix}$  – положение рабочего инструмента в локальной

системе координат.

Рассчитаем матрицу однородного преобразования  $A_{0,6}$ , перемножив все вычисленные ранее матрицы. Векторы, определяющие геометрию звеньев:

$$\begin{aligned}
G_0 &= [0 \ 0 \ 0,224]; \\
G_1 &= [0 \ 0,025 \ 0,176]; \\
G_2 &= [0,455 \ 0 \ 0]; \\
G_3 &= [0,115 \ 0,035 \ 0]; \\
G_4 &= [0 \ 0 \ 0,305]; \\
G_5 &= [0 \ -0,0665 \ 0]; \\
G_6 &= [0 \ 0 \ 0,05]; \\
A_{0,6} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & G_{1(2)} + G_{3(1)} + G_{4(3)} + G_{5(2)} \\ 1 & 0 & 0 & G_{0(3)} + G_{1(3)} + G_{2(1)} + G_{3(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
A_{0,6} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,5115 \\ 1 & 0 & 0 & 0,89 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Теперь по формуле (7) вычислим радиус вектор  $r_{M^0}$ .

$$r_{M^0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5615 \\ 0,89 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Довольно просто можно рассчитать координаты положения геометрическим способом

– Ось  $Z$  (вертикальная): длина 1 го звена + длина 2 го звена + смещение на 3-м звене (035)=0,4+0,455+0,35=0,89.

– Ось  $Y$  (горизонтальная, вдоль которой размещены звенья 3 – 5): длина 3-го звена + длина 4-го звена + длина 5-го звена + смещение на 1-м звене (0,25) + длина рабочего инструмента (0,05) = 0,115+0,305+0,0665+0,05=0,5615.

– По оси  $X$  ничего не рассчитываем, т.к. вдоль данной оси не располагается звеньев для начального положения манипулятора

Из результатов видно, что они совпадают с теми, что были рассчитаны с применением матриц однородного преобразования, поэтому геометрическую модель для рассматриваемого манипулятора можно считать составленной корректно.

### Обратная задача кинематики

**Численный метод решения.** Решить обратную задачу кинематики можно с помощью уравнения:

$$[J]\{\Delta q\} = \{\Delta x\}, \quad (8)$$

$$\{\Delta q\} = [J]^{-1}\{\Delta x\}, \quad (9)$$

где  $[J]$  – матрица Якоби.

В общем случае матрица Якоби и уравнение обратной задачи кинематики имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \bar{l}_0 \frac{\partial A_{0,6}}{\partial q_1} \overline{r^{(6)}} & \dots & \bar{l}_0 \frac{\partial A_{0,6}}{\partial q_6} \overline{r^{(6)}} \\ \bar{J}_0 \frac{\partial A_{0,6}}{\partial q_1} \overline{r^{(6)}} & \dots & \bar{J}_0 \frac{\partial A_{0,6}}{\partial q_6} \overline{r^{(6)}} \\ \bar{k}_0 \frac{\partial A_{0,6}}{\partial q_1} \overline{r^{(6)}} & \dots & \bar{k}_0 \frac{\partial A_{0,6}}{\partial q_6} \overline{r^{(6)}} \\ \bar{l}_0 \frac{\partial A_{0,6}}{\partial q_1} \overline{J_6} & \dots & \bar{l}_0 \frac{\partial A_{0,6}}{\partial q_6} \overline{J_6} \\ \bar{l}_0 \frac{\partial A_{0,6}}{\partial q_1} \overline{k_6} & \dots & \bar{l}_0 \frac{\partial A_{0,6}}{\partial q_6} \overline{k_6} \\ \bar{J}_0 \frac{\partial A_{0,6}}{\partial q_1} \overline{k_6} & \dots & \bar{J}_0 \frac{\partial A_{0,6}}{\partial q_6} \overline{k_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \Delta q_3 \\ \Delta q_4 \\ \Delta q_5 \\ \Delta q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X(t) \\ \Delta Y(t) \\ \Delta Z(t) \\ \Delta e_{X_0 Y_6}(t) \\ \Delta e_{X_0 Z_6}(t) \\ \Delta e_{Y_0 Z_6}(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$



Так, например, для 3-звенной манипуляционной системы матрица Якоби будет размером 3×3 и примет следующий вид:

$$J = \begin{bmatrix} \bar{l}_0 \frac{\partial A_{0,3}}{\partial q_1} \bar{r}^{(3)} & \bar{l}_0 \frac{\partial A_{0,3}}{\partial q_2} \bar{r}^{(3)} & \bar{l}_0 \frac{\partial A_{0,3}}{\partial q_3} \bar{r}^{(3)} \\ \bar{j}_0 \frac{\partial A_{0,3}}{\partial q_1} \bar{r}^{(3)} & \bar{j}_0 \frac{\partial A_{0,3}}{\partial q_2} \bar{r}^{(3)} & \bar{j}_0 \frac{\partial A_{0,3}}{\partial q_3} \bar{r}^{(3)} \\ \bar{k}_0 \frac{\partial A_{0,3}}{\partial q_1} \bar{r}^{(3)} & \bar{k}_0 \frac{\partial A_{0,3}}{\partial q_2} \bar{r}^{(3)} & \bar{k}_0 \frac{\partial A_{0,3}}{\partial q_3} \bar{r}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где  $\bar{l}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ;  $\bar{j}_0 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ ;  $\bar{k}_0 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ ;  $\bar{r}_3 = [l_3 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ .

Если известны обобщенные координаты  $\{q^k\}$  в момент  $k$ , то для следующего момента  $k+1$ , обобщенные координаты  $\{q^{k+1}\}$  можно описать выражением:

$$\{q^{k+1}\} = \{q^k\} + [J]^{-1} \{\Delta x\} \quad (12)$$

Дифференцирование матриц преобразования однородных координат:

$$\frac{\partial A_{(i-1),i}}{\partial q_i} = A_{(i-1),(i-1)^*} \frac{\partial A_{(i-1)^*,i}}{\partial q_i} = A_{(i-1),i} D, \quad (13)$$

где  $D$  – матрица дифференцирования:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ для вращательной пары; } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ для поступательной пары.}$$

Итак, чтобы вычислить обобщенные координаты манипулятора по положению рабочего инструмента нужно знать значения обобщенных координат на предыдущей итерации и изменение координат положения рабочего инструмента.

**Описание метода решения.** Для решения обратной задачи кинематики необходимо знать следующее:

- координаты рабочего инструмента;
  - ориентацию рабочего инструмента относительно базовой системы координат (например, выраженные в углах; Эйлера)
  - геометрические параметры манипулятора (длины звеньев, типы кинематических пар)
- Рассматриваемый манипулятор обладает конструкцией так называемого сферического запястья, к которому может быть применен специальный метод декомпозиции кинематических частей (раздельный метод [9]).

Декомпозиция заключается в разделении обратной задачи кинематики на две подзадачи:

- обратная задача кинематики по положению  $(q_1, q_2, q_3)$ ;
- обратная задача кинематики по ориентации  $(q_4, q_5, q_6)$ .

**Обратная задача кинематики по положению.** Пересечение осей вращения трех вращательных кинематических пар в одной точке называется конструкцией сферического запястья. Пусть это будет точка (рис. 2).

Данная задача состоит в выявлении взаимосвязи положения точки  $O_4$  с положением рабочего инструмента манипулятора. Также необходимо определить значения первых трех обобщенных координат с добавлением длины 4-го звена, чтобы это положение соответствовало точкам  $O_4$ .

Из известных сумм векторов:

$$p_6^0 = p_4^0 + d_6 R_6^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где  $d_6$  – длина сферического запястья манипулятора от точки  $O_4$  до характерной точки рабочего органа.

Можно выразить координаты точки  $O_4$ :

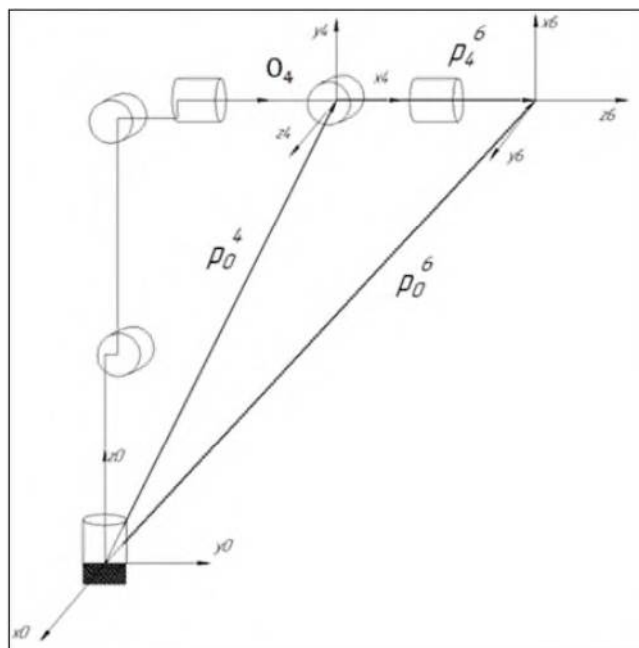


Рис. 2. Раздельный метод решения  
Fig. 2. Separate solution

$$p_4^0 = p_6^0 - d_6 R_6^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Теперь решаем обратную задачу кинематики относительно точки. Данную задачу решим численным методом. Также эта задача может быть решена аналитическим способом.

**Обратная задача кинематики по ориентации.** Матрицу поворота, описывающую положение рабочего инструмента относительно базовой системы координат  $R_6^0$  можно выразить так:

$$R_6^0 = R_3^0 R_6^3. \quad (16)$$

Выразим  $R_6^3$ , используя свойство ортогональности матриц поворота:

$$R_6^3 = (R_3^0)^{-1} R_6^0 = (R_3^0)^T R_6^0. \quad (17)$$

Конструкция сферического запястья обеспечивает ориентацию рабочего инструмента в соответствии с матрицей  $R_6^3$  с помощью трех обобщенных координат (углов Эйлера):

$$R_6^3 = R_{zyz} = R_{z,\varphi} R_{y,\theta} R_{z,\psi} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Обобщенные координаты могут быть рассчитаны как:

$$q_4 = \text{atn2} \left( \pm \sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33} \right); \quad (19)$$

$$q_5 = \text{atn2} \left( \pm r_{23}, \pm r_{13} \right); \quad (20)$$

$$q_6 = \text{atn2} \left( \pm r_{32}, \pm r_{31} \right). \quad (21)$$

При  $r_{33}(q) = \pm 1$  возникает неоднозначность определения углов Эйлера. На практике эти случаи избегают путем присвоения близких значений. Например, вместо  $\theta = 0$  принимают малое значение  $\varphi = 0,001$ , вместо  $\varphi = \pi$  принимают  $\varphi = \pi - 0,001$ .

## Программная реализация

Алгоритм раздельного решения обратной задачи кинематики для конструкций со сферическим запястьем является эффективным для решения данной задачи [10]. Задача по положению решается численным методом Ньютона, задача по ориентации находится аналитическим способом (19) – (21).

Блок-схема алгоритма работы программы, реализующей программное обеспечение для робота-манипулятора (3D-модель представлена на рис. 3), выглядит следующим образом (рис. 4):

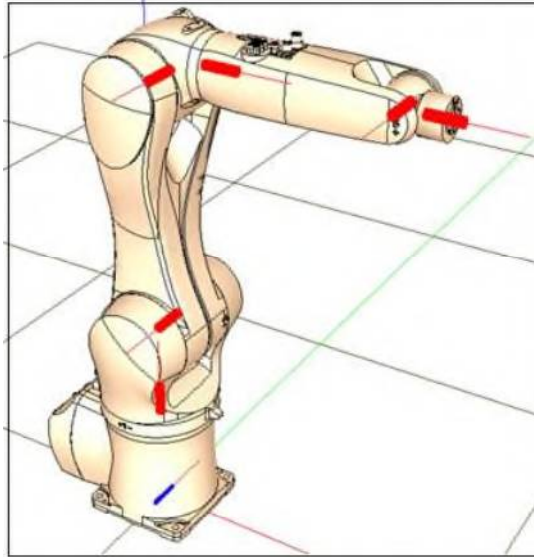


Рис. 3. 3D-модель промышленного робота в программном комплексе «Universal Mechanism»  
Fig. 3. 3D-manipulator model in the «Universal Mechanism» program package

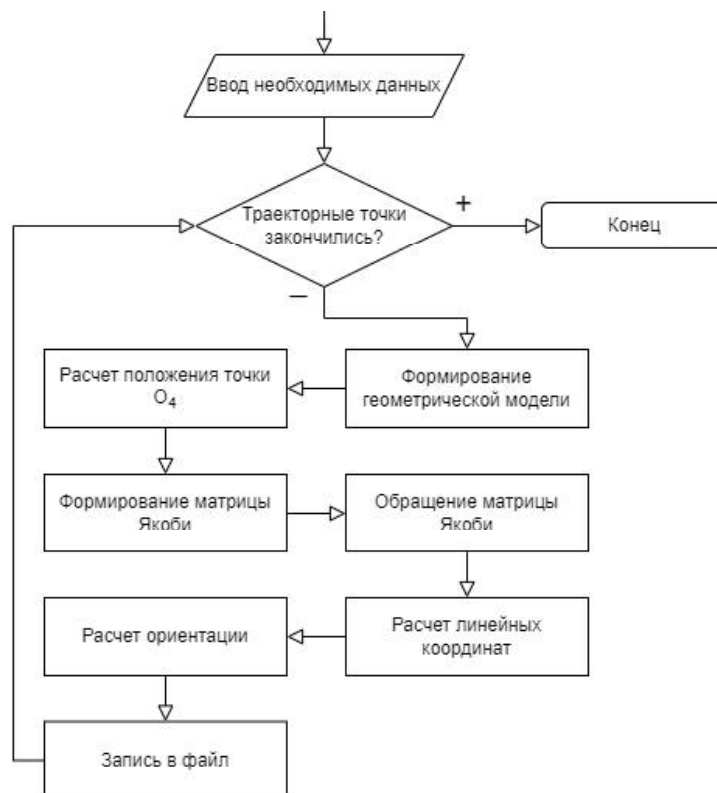


Рис. 4. Блок-схема алгоритма решения обратной задачи кинематики  
Fig. 4. Block – diagram of the algorithm for the inverse kinematics problem solution



### Разработка алгоритма решения.

- Блок «Ввод необходимых данных» – ввод информации о геометрических параметрах манипулятора, вида траектории, а также количество точек  $n$  траектории движения.
- Блок «Траекторные точки закончились?» – блок условия, выполнение алгоритма завершается, когда достигается количество точек, на которые разбита траектория.
- Блок «Формирование геометрической модели» – в этом блоке вычисляются матрицы преобразования однородных координат.
- Блок «Расчет положения точки  $O_4$ » – здесь определяется зависимость положения точки  $O_4$  центра 4-ой кинематической пары от ориентации рабочего инструмента (7) – (8).
- Блок «Формирование матрицы Якоби» – дифференцирование матриц преобразования однородных координат и перемножение их с соответствующими векторами.
- Блок «Обращение матрицы Якоби» – вычисление матрицы, обратной матрице Якоби.
- Блок «Расчет линейных координат» – решение обратной задачи кинематики по положению.
- Блок «Расчет ориентации» – в этом блоке вычисляются обобщенные координаты (углы Эйлера), отвечающие за ориентацию рабочего органа.
- Блок «Запись в файл» – запись вычисленных значений в текстовый файл.

### Тестирование программного решения

**Проверка работоспособности.** Проверка корректности работы программного обеспечения проводится с использованием программного комплекса Univesal Mechanism [4], в среду моделирования которого загружается 3D-модель соответствующего робота-манипулятора. Каждый шарнир манипулятора получает свой сценарий движения, полученный из расчета программы.

При конфигурации манипулятора, рассмотренной в предыдущих разделах координаты рабочего инструмента в базовой системе координат робота следующие:  $X = 0$ ;  $Y = 0,5615$ ;  $Z = 0,89$ . Ориентация рабочего инструмента представлена углами Эйлера:  $q_4 = -1,571$  рад;  $q_5 = -1,571$  рад;  $q_6 = 0$ ; Так как положение считается начальным, то обобщенные координаты положения равны нулю (рис. 5, рис. 6).

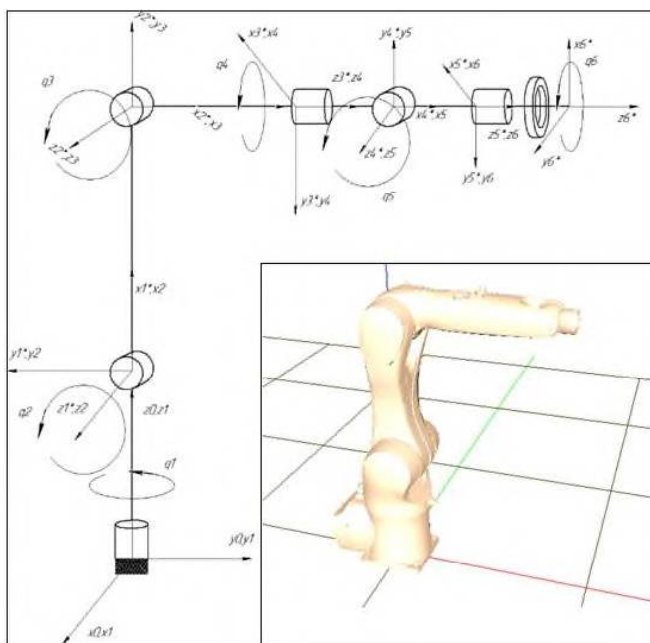


Рис. 5. Начальное положение манипулятора  
Fig. 5. Initial position of the manipulator

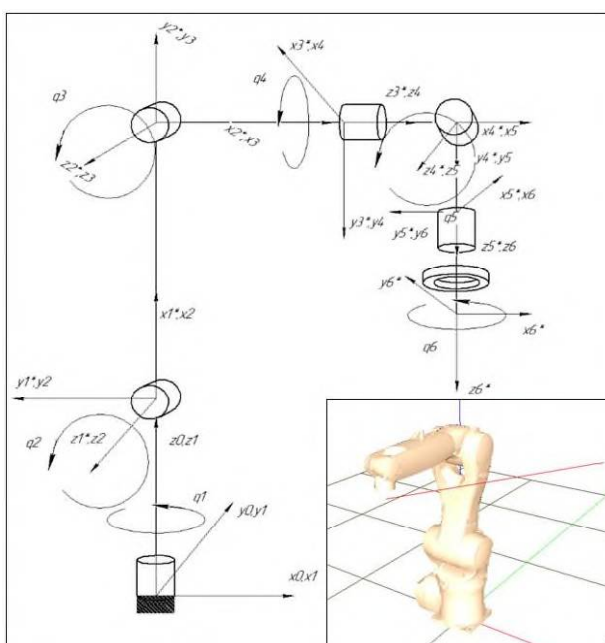


Рис.6. Конечное положение манипулятора  
Fig. 6. End position of the manipulator

В качестве конечного положения конфигурации манипулятора примем слегка модифицированную версию начального положения с изменением значений некоторых обобщенных координат:  $q_1$  и  $q_5$  повернем на  $90^\circ$  и  $-90^\circ$  соответственно относительно начального положения. Расчитаем координаты рабочего инструмента конечного положения:  $X = 0,445$ ;  $Y = 0$ ;  $Z = 0,7735$ . Ориентация рабочего инструмента:  $q_4 = -1,571$  рад;  $q_5 = -1,571$  рад;  $q_6 = 0$  рад, а значения обобщенных координат следующие:  $q_1 = -1,567$ ;  $q_2 = 0$ ;  $q_3 = 0$ ;  $q_4 = 0$ ;  $q_5 = -1,571$ ;  $q_6 = 0$ .

Разбивая траекторию движения по прямой на 50 интервалов, программируем траекторию движения, где в конечной итерации получаем следующие значения обобщенных координат, вычисленных численно:  $t = 50$ ;  $q_1 = -1,567$ ;  $q_2 = 0,053$ ;  $q_3 = -0,054$ ;  $q_4 = 0,002$ ;  $q_5 = -1,513$ ;  $q_6 = -0,034$ , где  $t$  – номер итерации.

А положение манипулятора стало следующим (см. рис. 6). Используя возможности программного комплекса Universal Mechanism, убеждаемся в правильности работы программного обеспечения.

### Тестирование на примере траекторных задач

**Траектория Circ.** Окружность можно определить по трем точкам, не считая некоторые вырожденные случаи. При программировании такой траектории возникают дополнительные задачи по представлению базовой системы координат в локальной системе координат окружности. Но задача не вызывает особых трудностей (рис. 7).

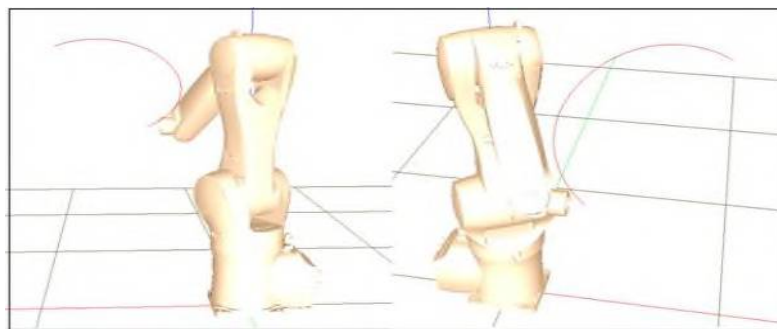


Рис. 7. Результат решения траекторной задачи по построению дуги окружности (circle)

Fig. 7. Circular arc trajectory task solution

**Траектория Spline.** Чтобы решить задачу по построению сплайна будем использовать уравнения полиномов 3-го порядка, которые позволяют построить полином по 3-м точкам. Так же как и в предыдущем случае, с использованием преобразования систем координат строится полиномиальная кривая по 3-м точкам в плоскости. Для построения полиномиальных кривых более высокого порядка трехточечные решения склеиваются в одно. Данный метод построения кривых известен как сплайновая интерполяция (рис. 8) [10].

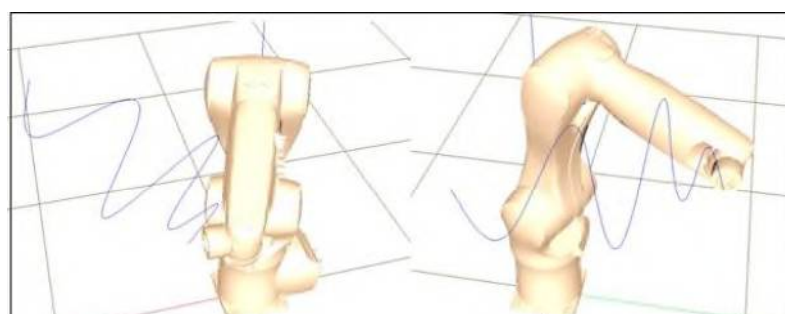


Рис. 8. Результат решения траекторной задачи по построению сплайновой траектории

Fig. 8. Spline trajectory task solution

## Заключение

В результате данной работы проведен краткий обзор и анализ методов решения обратной задачи кинематики, разработана математическая модель манипулятора, рассмотрен метод раздельного решения обратной задачи кинематики и разработано программное обеспечение для решения обратной задачи кинематики шестизвенного манипуляционного робота. Корректность работы программного обеспечения подтверждена результатами решения траекторных задач.

Разработанное программное решение может быть использовано для разработки системы управления данного промышленного манипулятора или других манипуляторов со схожей конструкцией, а также в качестве учебного материала для студентов и специалистов соответствующей области.

### Список источников:

1. Крахмалев О.Н. Математическое моделирование динамики манипуляционных систем промышленных роботов и кранов манипуляторов: монография. Брянск: БГТУ, 2012. 210 с.
2. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника. М.: Мир, 1989.
3. Крахмалев О.Н., Петрешин Д.И., Федонин О.Н. Метод построения геометрических моделей манипуляционных систем промышленных роботов и многокоординатных станков // Хроники объединенного фонда электронных ресурсов Наука и образование. 2015. №5 (72). С. 34.
4. Программный комплекс [Электронный ресурс]: среда моделирования «Универсальный механизм». Режим доступа: <http://www.umlabor.ru/> (Дата последнего обращения: 28.02.2022)
5. Данилов А.В., Кропотов А.Н., Трифонов О.В. Общий подход к решению обратной задачи кинематики для манипулятора последовательной структуры с помощью конечного поворота и смещения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 81. 15 с.
6. Челноков Ю.Н. Бикватернионное решение кинематической задачи управления движением твердого тела и его приложение к решению обратных задач кинематики роботов-манипуляторов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2013. № 1. С. 38-58.
7. Челноков Ю.Н., Ломовцева Е.И. Дуальные матричные и бикватернионные методы решения прямой и обратной задачи кинематики роботов-манипуляторов на примере стэнфордского манипулятора // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2013. № 1. С. 82-89.
8. Aristidou A., Lasenby J. FABRIK: A fast, iterative solver for the Inverse Kinematics problem. Graphical Models, 2011, vol. 73, iss. 5, pp. 243-260. DOI: 0.1016/j.gmod.2011.05.003
9. Воронкин Д.С., Решение обратной задачи кинематики для шестизвенного шарнирного робота-манипулятора // Известия Тульского государственного университета. Технические науки, 2018.
10. Завьялов Ю.З., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука. 1980. 352 с.

### Информация об авторах

#### Павел Игоревич Голомаздин

магистрант кафедры «Информатика и программное обеспечение» ФГБОУ ВО «Брянский государственный технический университет»

#### Олег Николаевич Дмитроченко

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Информатика и программное обеспечение» ФГБОУ ВО «Брянский государственный технический университет»

### References:

1. Krakhmalev O.N. Mathematical Simulation of Manipulation Systems Dynamics for Industrial Robots and Articulated Cranes. Bryansk: BSTU; 2012.
2. Fu K., Gonzalez R., Lee K. Robotics. Moscow: Mir; 1989.
3. Krakhmalev O.N., Petreshin D.I., Fedonin O.N. Method for Geometric Model Formation of Manipulation Systems of Industrial Robots and Multi-Axes Machine Tools. Acta Electronic Resources Joint Fund «Science and Education». 2015; 5(72): 34.
4. Software Package: Modelling Environment «Universal Mechanism» [Internet] [cited 2022 Feb 28]. Available from: <http://www.umlabor.ru/>.
5. Danilov A.V., Kropotov A.N., Trifonov O.V. General Approach to Solving the Inverse Problem of Kinematics for a Manipulator of Sequential Structure by Means of a Finite Rotation and Displacement. Keldysh Institute Preprints. 2018;81.
6. Chelnokov Yu.N. Biquaternion Solution of the Kinematic Control Problem for the Motion of a Rigid Body and Its Application to the Solution of Inverse Problems of Robot-Manipulator Kinematics. Mechanics of Solids. 2013; 1: 38 -58.
7. Chelnokov Yu. N., Lomovtseva E.I. Dual Matrix and Biquaternion Methods for Solving Direct and Inverse Kinematics Problem of Manipulators on the Example of the Stanford Ro-bot Arm. Mechanics of Solids. 2013; 1: 82-89.
8. Aristidou A., Lasenby J. FABRIK: A Fast, Iterative Solver for the Inverse Kinematics Problem. Graphical Models. 2011; 73(5) : 243-260. doi: 0.1016/j.gmod.2011.05.003.
9. Voronkin D.S. Solving the Inverse Kinematic Problem for Six-Membered Articulated Robotic Manipulator. Izvestiya TulGU. Technical Sciences. 2018.
10. Zavalov Yu.Z., Miroshnichenko V.L. Methods of Spline Functions. Moscow: Nauka; 1980.

### Information about authors:

#### Pavel Igorevich Golomazdin

student of the «Informatics and software» Department of the Bryansk State Technical University

#### Oleg Nikolaevich Dmitrochenko

candidate of physical and mathematical sciences, docent of the Department informatics and software of the Bryansk State Technical University

**Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.  
Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.**

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.  
The authors declare no conflicts of interests.**

**Статья поступила в редакцию 25.04.2022; одобрена после рецензирования 27.05.2022;  
принята к публикации 30.06.2022.**

**The article was submitted 28.06.2022; approved after reviewing 02.08.2022; accepted for  
publication 05.08.2022.**

**Рецензент – Прусс Б.Н., кандидат технических наук, доцент, Брянский государственный  
инженерно-технологический университет.**

**Reviewer – Pruss B.N., Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Bryansk State  
Technological University of Engineering.**