

# Роль дифференциального исчисления в развитии экономико-математической культуры учащихся, получающих профильное образование в старшей школе

## The Role of Differential Calculus in the Development of Economic and Mathematical Culture of Students Receiving Specialized Education in High School

УДК 378

Получено: 12.11.2021

Одобрено: 01.12.2021

Опубликовано: 25.12.2021

### **Власов Д.А.**

Канд. пед. наук, доцент, доцент кафедры математических методов в экономике Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова; доцент департамента математики Финансового университета при Правительстве Российской Федерации  
e-mail: DAV495@gmail.com

### **Vlasov D.A.**

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of mathematical methods in economics, Plekhanov Russian University of Economics, Associate Professor of the Department of Mathematics, Financial University under the Government of the Russian Federation  
e-mail: DAV495@gmail.com

### **Аннотация**

В центре внимания статьи методический анализ простейших приёмов и методов дифференциального исчисления, позволяющих реализовывать профильную экономическую подготовку учащихся старших классов. Акцентируется внимание на роль математического аппарата (функция, график функции, производная функции первого порядка, производная функции второго порядка, точка экстремума функции, экстремум функции, необходимое условие существования экстремума функции, достаточное условие существования экстремума функции) и сюжетных задач в развитии экономико-математической культуры школьника. Представлены рекомендации по организации учебно-познавательной деятельности учащихся старших классов по освоению простейших приёмов и методов дифференциального исчисления, сгруппированных в рамках двух ситуаций, приближенных к реальным условиям осуществления хозяйственно-экономической деятельности. Представленный материал может быть полезен для обновления содержания профильной подготовки учащихся старших классов.

**Ключевые слова:** дифференциальное исчисление, профильное образование, математическая подготовка, элективный курс, экономико-математическая культура, непрерывное экономическое образование.

### **Abstract**

The article focuses on the methodological analysis of the simplest techniques and methods of differential calculus that allow implementing specialized economic training of high school students. Attention is focused on the role of the mathematical apparatus (function, function graph, first-order function derivative, second-order function derivative, function extremum point, function extremum,

necessary condition for the existence of the function extremum, sufficient condition for the existence of the function extremum) and plot problems in the development of the student's economic and mathematical culture. The recommendations on the organization of educational and cognitive activity of high school students on the development of the simplest techniques and methods of differential calculation, grouped within the framework of two situations that are close to the real conditions of economic activity, are presented. The presented material can be useful for updating the content of profile training of high school students.

**Keywords:** differential calculus, specialized education, mathematical training, elective course, economic and mathematical culture, continuous economic education.

Математические методы и модели в контексте профильной школы и усиления профориентационной работы неоднократно были в центре внимания учёных-методистов и педагогов-исследователей. Так, первый факультатив по применению математических методов в экономике для советских школьников был разработан в 1978 г. [7]. Различным методическим аспектам обучения математике на уровне профильных классов и школ посвящены работы [1, 12]. Ранее в работах автора предложен элективный курс «Теория игр» для обеспечения профессионального самоопределения учащихся, уточнена роль элементов математических методов в экономике в контексте профессиональной ориентации школьников [3]. В рамках данной статьи будет уделено внимание методам дифференциального исчисления, которые традиционно представлены уже на уровне базовой школы и обладают значительным дидактическим потенциалом.

Усложнение социально-экономических отношений требует пересмотра содержания математических методов в экономике, рассматриваемых в рамках элективных курсов. Так, акценты с традиционных методов смещаются на методы теории риска [13], методы стохастики [15], методы прогнозирования [11]. Под профильным обучением математике принято понимать средство, обеспечивающее реализацию дифференциации и индивидуализации обучения математике, подразумевающее благодаря изменениям в структуре, содержании и организации учебного процесса по математическим предметам («Алгебра и начала анализа», «Геометрия») и элективных курсов («Математическое моделирование» [4], «Теория чисел», «Методы оптимизации» [7], «Многогранники», «Стохастика» [14], «Дифференциальные уравнения», «Комбинаторика», «Теория вероятностей» и др.).

Элективные курсы, направленные на развитие экономико-математической культуры учащихся, призваны в более полной мере учитывать и развивать их познавательные интересы. Включение простейших математических методов в экономике в практику профильного математического образования способствует развитию склонностей и способностей учащихся, созданию и расширению благоприятных организационно-дидактических условий для современной профильной математической подготовки старшеклассников. Не вызывает сомнений, что образовательная область «Математические методы в экономике» играет важную роль в развитии профессиональных интересов и намерений учащихся старших классов в отношении продолжения экономико-математической подготовки в экономических университетах.

Методическая проблема развития экономической культуры школьников старших классов остаётся в центре внимания педагогов-исследователей, методистов и специалистов по математическим методам в экономике [9, 11]. Заметим, что в условиях усложнения социально-экономических отношений востребованность экономической культуры как компонента общечеловеческой культуры возрастает. Как показывает анализ теоретических источников по развитию профильного образования в старшей школе и педагогической практики преподавания математики в Московском промышленно-экономическом колледже на базе РЭУ им. Г.В. Плеханова, акцент в решении данной методической проблемы смещается в следующих направлениях:

- оценка влияния социально-экономических изменений, скорость прохождения которых в условиях пандемийных ограничений возрастает, на методическую систему развития экономической культуры школьников, включающую в себя такие традиционные компоненты,

как цели обучения, содержание обучения, методы обучения, формы обучения, средства обучения, связанные с целями экономического образования, воспитания и профессионального ориентирования школьников старших классов;

- совершенствование педагогического проектирования и технологий реализации элективных курсов по прикладной математике для учащихся профильной школы, в основе которых теория учебной деятельности и современные достижения синергетики [8, 10];

- учёт психолого-педагогических особенностей учащихся старших классов и потенциальных дидактических и воспитательных возможностей основного и дополнительного экономико-математического образования в процессе развития экономической культуры, востребованной в современных экономических условиях;

- учёт возможностей взаимодействия школы и семьи в реализации задач развития экономико-математической культуры школьников старших классов;

- создание организационно-дидактических условий развития ключевых и предметных компетенций учащихся старших классов профильных школ посредством дозирования учебного материала, выбора индивидуальных образовательных траекторий, внедрения новых цифровых технологий, структурирования содержания математической подготовки и реализации внутри- и межпредметных связей [1, 12, 13];

- усиление связи общеобразовательного учреждения с экономической средой, в том числе с предприятиями и организациями, обслуживающими различные виды рынков и включенные в систему непрерывного экономического образования (профильные колледжи и экономические университеты, бизнес-инкубаторы, центры предпринимательства и др.).

Проанализировав категории «Экономическая культура» и «Экономико-математическая культура» [5, 6] можно констатировать наличие различных подходов к их трактовке. В современных условиях математизации экономики и экономических исследований частота использования категории «Экономико-математическая культура» в педагогических исследованиях возрастает. Под экономико-математической культурой учащихся старших классов следует понимать важный компонент общечеловеческой культуры. В его основе – синергия экономических и математических знаний, умений, навыков, а также ценностного опыта обучаемых.

Степень развития экономико-математической культуры можно связать с готовностью выпускника к осознанному экономическому взаимодействию в рыночных условиях. Отметим, что исследователи часто указывают на связь уровня развития экономико-математической культуры с возможностями выпускника профильной школы выступать в качестве субъекта социально-экономических отношений. Мы придерживаемся точки зрения, что экономико-математическую культуру школьника следует рассматривать в виде результата целенаправленного экономического и математического образования, а также воспитания школьников в условиях усиления вариативности школьного образования.

Экономико-математическая культура в педагогической трактовке подразумевает развитие представлений об экономических ситуациях их модельном (математическом) описании, а также формирование системы ценностей, связанных с хозяйственно-экономической деятельностью. На компонентах данной системы остановимся более подробно. Развитие экономико-математической культуры на уровне профильной школы связано с воспитанием личностных качеств учащихся старших классов, к которым следует отнести трудолюбие, настойчивость, деловитость, чувство собственности и ответственность.

Не менее важным компонентом представляется восприятие учащимися старших классов основных экономических категорий – производства, распределения и потребления. При этом важно отразить в содержании экономико-математической подготовки учащихся старших классов дух экономического гуманизма и национального, социально-исторического уклада хозяйствования. Развитие экономико-математической культуры на уровне профильной школы как в рамках базового, так и в рамках элективного содержания связано с воспитанием учащихся старших классов бережного отношения к средствам производства и его результатам, ко времени, материальным и денежным ценностям; пониманием необходимости созда-

ния материальных и духовных ценностей, полезности реализации собственного потенциала и рационального использования природных ресурсов и умножения человеческого капитала, развитием навыков защиты собственных прав как потребителя экономического блага.

Ранее в работах автора [2, 3] представлены результаты разработки элективного курса «Теория игр» для профессионального самоопределения учащихся, а также проанализированы основные математические методы в экономике, по сложности и трудности доступные учащимся старших классов, в контексте профессиональной ориентации школьников. В рамках данной статьи будут предложены две экономические ситуации, связанные единой методической логикой, и в полной мере раскрывающие возможности дифференциального исчисления в развитии экономической культуры учащихся, получающих профильное образование в старшей школе.

Под максимизацией прибыли принято понимать действия, направленные на достижение максимального дохода от хозяйственно-экономической деятельности. Достижение максимального значения этого критерия возможно, если объемы производимой продукции соответствуют точке равновесия предельных издержек и предельного дохода. Максимизация прибыли выступает ведущим критерием планирования и осуществления деятельности как производственных, так и коммерческих структур. Заметим, что максимизация прибыли предоставляет лицу, принимающему решение, возможность различать различные стратегии, выступая критерием принятия решений.

Будем считать, что доход малого предприятия  $Q$  можно представить в виде некоторой функции, аргументом которой является объем реализации производимой продукции  $x$ :  $F = F(x)$ .

**Экономическая ситуация 1.** Предположим, что фермеру удалось определить соотношение между еженедельной продажей сельскохозяйственной продукции  $x$  и еженедельной прибылью  $F(x)$  (в у. е.) в виде квадратичной функции

$$F(x) = -0,005x^2 + 30x - 600.$$

Управленческие усилия фермера направлены на получение максимальной прибыли с целью расплатиться за сельскохозяйственную технику, приобретенную в кредит. Требуется определить максимальную прибыль.

До непосредственного применения аппарата дифференциального исчисления при анализе данной экономической ситуации полезно обратить внимание школьников на вид функциональной зависимости, построить соответствующий график и проанализировать его. При этом важно понимать, что развитие компетентности чтения графиков, а также графического представления информации (визуализации) является важной педагогической задачей, успешно решаемой средствами математики. Следует обратить внимание, что задача максимизации еженедельной прибыли от продажи сельскохозяйственной продукции приводит к определению точки максимума целевой функции  $F = F(x)$ . Следовательно, необходимо определить производную целевой функции  $F(x)$  по переменной  $x$   $F'(x) = -0,01x + 30$ . Потребуем, чтобы в точке максимума производная первого порядка целевой функции была равна нулю, т.е.  $F'(x) = 0$ , откуда получаем, что  $-0,01x + 30 = 0$ , откуда  $x = 3000$ .

Уточним, что при еженедельной продаже сельскохозяйственной продукции в  $x = 3000$   $F = F(x)$ , будет максимальна. Для этого определим вторую производную от целевой функции  $F(x)$ . Она равна  $F''(x) = -0,01 < 0$ , т.е. найденная точка соответствует условию максимума целевой функции. Для преодоления возможных затруднений учащихся следует напомнить им механизм вычисления производной второго порядка, заключающийся в последовательном дифференцировании. Таким образом, точка  $x = 3000$  представляет собой точку локального максимума целевой функции, и её значение в этой точке будет соответствовать максимальной прибыли

$$F(x) = -0,005 \cdot 3000^2 + 30 \cdot 3000 - 600 = 44400.$$

После получения количественного результата анализа данной экономической ситуации обязательно следует вернуться к её содержанию и уточнить, какое оптимальное решение следует принимать на основе полученного количественного результата. С учётом полученных результатов можно сделать вывод, что для обеспечения максимизации прибыли фермеру следует каждую неделю продавать 3000 единиц сельскохозяйственной продукции. В таких условиях еженедельная прибыль фермера будет максимальна и равна 44400 д. е. Перейдем далее к представлению и анализу второй экономической ситуации, которая содержательно является более сложной, чем ранее рассмотренная, однако является её логическим продолжением.

**Экономическая ситуация 2.** Величина прибыли  $F(x)$  фермера равна разности между доходом  $D(x)$ . В качестве дохода фермера принято понимать суммарные денежные средства, получаемые фермерским хозяйством благодаря продаже производимой сельскохозяйственной продукции и затратами (издержками)  $E(x)$ . Известно, что в структуру затрат должны быть включены все величины затрат, связанные с производством сельскохозяйственной продукции и её последующей реализации через сеть региональных магазинов. Таким образом, первая экономическая ситуация усложняется посредством уточнения прибыли фермера  $F(x) = D(x) - E(x)$ . Заметим, что в последнем соотношении  $x$  – число единиц произведенной и реализованной сельскохозяйственной продукции и величины  $D(x)$  и  $E(x)$  представляют собой функции от объема сельскохозяйственной продукции. При этом имеет место соотношение  $D(x) = P \cdot x$ , откуда цена за единицу сельскохозяйственной продукции определена соотношением  $P(x) = D(x) / x$ .

Важно добиться понимания учащимся, что функция  $P = P(x)$  задает рыночную цену производимой фермером сельскохозяйственной продукции, которая в условиях увеличения объема сельскохозяйственной продукции  $x$  монотонно убывает, так как рост объема сельскохозяйственной продукции ведет к насыщению рынка сбыта продукции.

Одновременно с величинами общей прибыли фермерского хозяйства  $F(x)$ , общего дохода фермерского хозяйства  $D(x)$  и общих затрат фермерского хозяйства (издержек от сельскохозяйственного производства)  $E(x)$  необходимо ввести в рассмотрение специальные маргинальные (предельные) величины:

$\frac{dF}{dx}$  – предельная прибыль фермера;

$\frac{dD}{dx}$  – предельный доход фермера;

$\frac{dE}{dx}$  – предельные затраты (издержки) фермера.

Заметим, что кроме приведенных обозначений производной можно использовать и альтернативные обозначения, однако мы не рекомендуем в рамках одной задачи использовать сразу несколько обозначений производной функции – это приводит к усложнению восприятия учащимися старших классов учебного материала.

$\frac{dF}{dx} = \frac{D}{dx} = \frac{dE}{dx}$ . В точках, соответствующих максимальным значениям целевой функции,

имеет место равенство  $\frac{dQ}{dx} = 0$ , с учётом которого получаем, что  $\frac{dD}{dx} - \frac{dE}{dx} = 0$  или  $\frac{dD}{dx} = \frac{dE}{dx}$ .

Для того чтобы найденные точки действительно являлись точками максимума целевой функции, вторая производная целевой функции должна быть меньше нуля, т.е.  $\frac{d^2Q}{dx^2} < 0$ .

С учётом приведённого ранее соотношения получаем, что

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = \frac{d^2D}{dx^2} = \frac{d^2E}{dx^2} < 0, \quad \frac{d^2D}{dx^2} < \frac{d^2E}{dx^2}.$$

Будем считать, что известны общие затраты фермерского хозяйства  $E(x)$  от производства сельскохозяйственной продукции и функция спроса на продукцию, производимую фермером  $P = P(x)$ . Заметим, что рыночную цену производимой фермером продукции следует представить в виде функции, содержательным смыслом которой выступает объем спроса на сельскохозяйственную продукцию, т.е.  $E(x) = 0,02x^3 - 0,2x^2 + 20x + 600$ ,  $P(x) = 100 - 0,1x$ .

В данной постановке задача максимизации прибыли фермера сводится к определению точки равновесия  $(P^*, x^*)$ , подстановку координат которой в целевую функцию даёт её максимум. Перейдем далее к числовому примеру, иллюстрирующему задачу максимизации прибыли фермера с использованием специальных маргинальных величин.

Учитывая приведенные соотношения, общий доход фермера  $D(x)$  будет иметь вид  $D(x) = Px = 100x - 0,1x^2$ . Следовательно, предельный доход фермера составляет  $D'(x) = 100 - 0,2x$ . Далее необходимо определить предельные затраты фермерского хозяйства. С учётом заданной функции общих затрат  $E(x)$  производства сельскохозяйственной продукции, предельные затраты фермерского хозяйства подчинены соотношению  $E'(x) = 0,06x^2 - 0,4x + 20$ .

Принимая во внимание условие равенства предельных затрат и предельного дохода в точке максимума целевой функции, получаем уравнение

$$100 - 0,2x = 0,06x^2 - 0,4x + 20, \quad 0,06x^2 - 0,2x - 80 = 0.$$

Полученное уравнение имеет два корня, один из которых (отрицательный) не соответствует экономическому смыслу рассматриваемой прикладной задачи. Таким образом, единственный положительный объем продукции составляет  $x = 38,2$  ед. Далее следует проверить выполнение условия максимума целевой функции в точке  $x = 38,2$ . Вычислим значения вторых производных функций общего дохода фермера  $D(x)$  и функции общих затрат  $E(x)$  производства сельскохозяйственной продукции в найденной точке. Получаем, что  $D''(38,2) = -0,2$ ,  $E''(38,2) = 0,12x - 0,4 = 4,184$ .

Таким образом, достаточное условие существования экстремума выполняется, и найденная точка соответствует максимуму прибыли от производства сельскохозяйственной продукции. Осталось вычислить цену сельскохозяйственной продукции и прибыль фермерского хозяйства:  $P = 100 - 0,1x = 100 - 0,1 \cdot 38,2 = 96,18$ ,  $D - E = 100 \cdot 38,2 - 0,1 \cdot 38,2^2 - (0,02 \cdot 38,2^3 - 0,2 \cdot 38,2^2 + 20 \cdot 38,2 + 600) = 1487$ .

Перечислим основные понятия, связанные с представленными экономическими ситуациями, раскрытие которых способствует развитию экономико-математической культуры учащихся старших классов: «Доход предприятия», «Объем реализации продукции», «Точка равновесия предельных издержек и предельного дохода», «Максимизация прибыли», «Функциональная зависимость», «Квадратичная функция», «Точка максимума», «Производная первого порядка», «Производная второго порядка», «Точка локального максимума», «Величина затрат», «Рыночная цена», «Предел функции», «Маргинальные (предельные) величины», «Предельная прибыль», «Предельный доход», «Предельные затраты (издержки)», «Экстре-

мум», «Цена продукции», «Прибыль», «Ценовая эластичность спроса», «Относительное изменение спроса».

Остановимся далее на методических аспектах, связанных с формированием экономико-математической культуры учащихся старших классов в условиях профильного обучения:

- реализация в практике математической подготовки школьников дидактических принципов, определяющих процесс формирования ключевых и предметных компетенций, в том числе в области финансов, экономики и бизнеса;
- расширение образовательной программы школы посредством включения элективных курсов экономической направленности, при этом адаптированное для учащихся старших классов содержание должно соответствовать современному уровню развития экономики и математическим методам в экономике;
- обеспечение взаимодействия основного (базового) и дополнительного образования учащихся старших классов;
- внедрение новых цифровых и педагогических технологий, в большей степени ориентированных на внедрение в учебный процесс достижений современной экономической мысли и приложений математики;
- активизация учебно-познавательной деятельности учащихся старших классов благодаря внедрению на всех этапах учебного процесса различных методов формирования знаний и компетенций в области математики и экономики. Большим дидактическим потенциалом при этом обладает разбор со школьниками проблемных экономических ситуаций, требующих принятия оптимального решения. Практика реализации математической подготовки школьников старших классов показывает большой интерес учащихся к самостоятельному конструированию и последующему решению последовательности сюжетных задач экономического содержания, требующих применения базовых математических методов, доступных пониманию учащимися старших классов. К таким сюжетным задачам традиционно относятся задачи на определение оптимального плана производства; выбор проекта с наибольшим доходом; выбор проекта с наименьшим риском; оптимальное использование имеющегося в распоряжении оборудования; оптимальное размещение денежных средств; нахождение оптимального плана транспортировки и др.

Таким образом, для развития системы профессиональной подготовки учащихся старших классов необходимо совершенствование учебно-методических материалов, предназначенных в том числе и для реализации содержания экономико-математического образования и воспитания ответственного субъекта экономических отношений, в частности внедрение основ технологической диагностики формирования компонентов экономико-математической культуры школьников. При этом важную роль играет экономико-математическая компетентность самих учителей математики. Представленные приёмы использования элементов дифференциального исчисления в простейших экономических задачах могут служить ориентиром для развития содержания профильной математической подготовки учащихся старших классов, могут быть полезны для системы повышения квалификации учителей математики, работающих в профильной школе.

### **Литература**

1. *Арюткина С.В.* Формирование обобщенных приемов приоритетных видов математической деятельности у учащихся профильных классов и школ // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2012. – № 2 (138). – С. 10-15.
2. *Власов Д.А.* Элективный курс «Теория игр» в контексте профессионального самоопределения учащихся // Профессиональная ориентация. – 2017. – № 2. – С. 24-29.
3. *Власов Д.А.* Элементы математических методов в экономике в контексте профессиональной ориентации школьников // Профессиональная ориентация. – 2018. – № 1. – С. 5.
4. *Генералов Г.М.* Математическое моделирование. 10-11 классы. Серия: Профильная школа. – Москва: Просвещение, 2021. – 160 с.

5. *Захаренко Л.Н.* Формирование экономической культуры учащихся в современной школе // Вестник Ставропольского государственного университета. – 2009. – № 3. – С. 141-147.
6. *Микулан Р.Л.* Экономическая культура современного школьника: сущность и условия формирования // Вестник Ставропольского государственного университета. – 2007. – № 49. – С. 89-93.
7. *Монахов В.М., Беляева Э.С., Краснер Н.Я.* Методы оптимизации. Применение математических методов в экономике. Пособие для учителей. – Москва: Просвещение, 1978. – 175 с.
8. *Муханов С.А., Нижников А.И.* Проектирование учебного курса // Педагогическая информатика. – 2014. – № 4. – С. 39-46.
9. *Розов В.К.* Экономика образования в условиях рынка // Экономика образования. – 2014. – № 4. – С. 142-143.
10. *Смирнов Е.И.* Технология наглядно-модельного обучения математике. – Ярославль: ЯГПУ, 1998. – 335 с.
11. *Тихомиров Н.П.* Научная школа «Повышение качества разработки и использования математического инструментария в решении проблем анализа прогнозирования и управления социально-экономическими процессами» // Вестник Российской экономической академии им. Г. В. Плеханова. – 2007. – № 1. – С. 47-53.
12. *Федяева Л.В.* Элективные курсы по математике в системе профильного обучения // Среднее профессиональное образование. – 2007. – № 5. – С. 11-13.
13. *Фомин Г. П., Чайковская Л. А., Максимов Д. А.* Риски в экономике: задачи и примеры решения. Москва: КНОРУС, 2021 – 256 с.
14. *Шестакова Л.Г.* Организация обучения математике в условиях профильной дифференциации // Профильная школа. – 2008. – № 4. – С. 41-45.
15. *Щербатых С.В.* Особенности реализации профессионально-прикладной направленности обучения стохастике в условиях профилизации общеобразовательной школы // Наука и школа. – 2009. – № 6. – С. 33-35.