Новые прикладные задачи учебной дисциплины «Высшая математика» для развития профессиональной компетентности будущего бакалавра экономики

New applied tasks of the Higher Mathematics discipline for the development of the professional competence of the future bachelor of economics

УДК 378
Получено: 02.04.2021 Одобрено: 21.04.2021 Опубликовано: 25.06.2021

Власов Д.А.
канд. пед. наук, доцент, доцент кафедры математических методов в экономике Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова
e-mail: DAV495@gmail.com

Vlasov D.A.
Candidate of pedagogical sciences, associate professor, associate professor of the chair of mathematical methods in economics, Plekhanov Russian University of Economics
e-mail: DAV495@gmail.com

Аннотация
В центре внимания статьи содержание и методические особенности трех новых прикладных задач учебной дисциплины «Высшая математика», направленных на развитие профессиональной компетентности будущих бакалавров экономики, расширение их представлений о методах интегрального исчисления в экономических исследованиях. С экономической точки зрения данные задачи охватывают различные аспекты процесса производства, с инструментальной точки зрения их решения позволяют принимать оптимальные решения и прогнозировать производственный процесс (например, определить ожидаемое время безубыточного производства и спрогнозировать ожидаемый доход). С методической точки зрения, приведённые задачи могут дополнить уже используемую в практике математической подготовки будущего экономиста систему задач и упражнений, а также представляют интерес для совершенствования содержания профориентационной работы с учащимися старших классов.
Ключевые слова: математический анализ, математическая подготовка, интегральное исчисление, моделирование производства, профессиональная подготовка, бакалавр экономики.

Abstract
The article focuses on the content and methodological features of three new applied tasks of the Higher Mathematics discipline, aimed at developing the professional competence of future bachelors of economics, expanding their ideas about methods of integral calculus in economic research. From an economic point of view, these tasks cover various aspects of the production process, from an institutional point of view, their solutions make it possible to make optimal decisions and forecast the production process (for example, to determine the expected time of uncooperative production and to predict the expected income). From a methodological point of view, these problems can supplement the system of tasks and exercises already used in the practice of mathematical training of the future economist and are also of interest for improving the content of career guidance work with students in high school.

Keywords: mathematical analysis, mathematical training, integral calculus, production modelling, vocational training, bachelor's degree in economics.

Одним из направлений совершенствования профессиональной подготовки будущего экономиста является *развитие системы задач и упражнений* по учебной дисциплине «Высшая математика». Мы считаем, что включение *прикладных задач социально-экономического содержания* в практику профессиональной подготовки будущего бакалавра экономики способствует развитию познавательного интереса студентов, приближает их учебно-познавательную деятельность к будущей профессиональной деятельности, связанной с количественным обоснованием принимаемых решений и математическим моделированием.

К настоявшему времени на кафедре высшей математики Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова разработан банк задач и упражнений, охватывающий вопросы основных учебных тем дисциплины «Высшая математика». Он внедрен в практику профессиональной подготовки экономистов и менеджеров. Однако, как показывает анализ образовательных программ и фондов оценочных средств, более 80% заданий носят общий, абстрактный характер и не позволяют в полной мере реализовывать *принцип прикладной профессиональной направленности обучения математике в экономическом университете*. В рамках данной статьи будут представлены рекомендации по развитию банка математических задач и упражнений для подготовки будущего экономиста, типовые задачи учебной темы «Интегральное исчисление функций одной действительной переменной», а также выделены основные ошибки и затруднения студентов при работе с ними.

Отметим, что проблема совершенствования профессиональной подготовки будущего экономиста средствами математических дисциплин неоднократно рассматривалась с различных аспектов. Так, о роли математических задач экономического содержания в проектно-исследовательской деятельности старшеклассников на основе междисциплинарной интеграции отмечается в статье [1]. Мы согласны с автором, что простейшие математические задачи экономического содержания обладают большим дидактическим потенциалом в контексте развития учащихся старших классов, а также способствуют их профессиональному самоопределению. Более сложные прикладные задачи, некоторые из которых представлены в учебном пособии [16], в которых социально-экономические проблемы и ситуации исследуются разнообразными количественными методами и математическим моделированием, могут быть использованы в процессе разработки и реализации программ дополнительного профессионального образования, на что указывается в публикации [4].

Ранее в работе автора [2] выделены основные *направления совершенствования методики преподавания математических дисциплин* в высшей экономической школе, среди которых особое место занимает *модернизация содержания математической подготовки*. В публикациях [5, 6, 7] представлены учебные задачи, готовые для использования в учебном процессе по дисциплине «Высшая математика» и позволяющие эффективно познакомить студентов с основными понятиями интегрального исчисления («Неопределенный интеграл», «Первообразная», «Приращение функции», «Приращение аргумента функции», «Определенный интеграл», «Пределы интегрирования», «Замена переменных в определенном интеграле» и др.), однако в контексте применения методов интегрального исчисления к разнообразным экономическим ситуациям система задач требует расширения и углубления.

На роль информационных технологий в совершенствовании профессиональной подготовки средствами учебной дисциплины «Высшая математика» указывается в статьях [8, 12]. Авторы раскрывают возможности *информационных технологий для индивидуализации обучения* математике и решения других частных методических задач. Большим потенциалом обладает *проектировочная деятельность*, направленная на создание специальных образовательных проектов, в том числе информационно-аналитических технологий [13, 14].

Методы математической экономики, раскрытые в публикациях [9, 15], предполагают использование определенного интеграла для нахождения различных *суммарных экономиче-*

ских эффектов («Платежи», «Взносы», «Накопления» и др.) Рассмотрим далее три прикладные задачи социально-экономического содержания, служащие ориентирами в развитии содержания математической подготовки будущего экономиста. Естественно, что экономические приложения интегрального исчисления не ограничиваются данными задачами, однако они выбраны и адаптированы нами по причине своей доступности и методической целесообразности.

Прикладная задача 1. Анализ факторов «Затраты» и «Объем производства» посредством интегрального исчисления функций одной действительной переменной.

Для работы с данной типовой задачей студенту необходимы базовые знания в области интегрального исчисления, среди которых «Определенный интеграл», «Пределы интегрирования», «Подынтегральная функция», «Правила и формулы интегрирования», «Первообразная», «Формула Ньютона-Лейбница», а также навыки интегрирования функций различных классов.

Пусть задана функция $\alpha = \alpha(x)$, экономический смысл которой заключается в зависимости общих затрат на производство x ед. продукции. Тогда функция $\beta = \alpha'(x)$ является функций, отражающей суммарные затраты производителя. В соответствии с этим рассмотрим определенный интеграл

$$\int_{x_1}^{x_2} \alpha'(x)\,dx = \alpha(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = \alpha(x_2) - \alpha(x_1),$$

в котором пределы интегрирования соответствуют x_1 и x_2 ед. продукции. Заметим, что согласно экономическому смыслу данного определенного интеграла $x_1 \le x_2$. Значения данного интеграла соответствуют изменениям суммарных затрат при увеличении объема произведенной продукции от x_1 до x_2 ед.

Записав данный интеграл в общем виде, можно рекомендовать студентам рассмотреть несколько частных случаев, задавая различные функциональные зависимости суммарных затрат на производство продукции. Например, если функция, описывающая суммарные затраты производителя, равна $\beta = \ln x$, тогда $\alpha = x(\ln x - 1)$, следовательно имеет место определенный интеграл

$$\int_{100}^{600} \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = x \ln x\Big|_{100}^{600} - \int_{100}^{600} dx = x(\ln x - 1)\Big|_{100}^{600} \approx 2877{,}64.$$

Согласно полученному результату, увеличение объема произведенной продукции от *100* до *600* ед. (на *500* ед.) приведет к росту общих затрат на $2877{,}64$ д. е. Обратим внимание, что при работе с различными подынтегральными функциями студентам потребуются навыки интегрирования («Метод замены переменной», «Метод интегрирования по частям» и др.). Рассмотрев несколько частных случаев, можно прийти в выводу о том, что волатильность суммарных затрат на производство при увеличении производимой предприятием продукции от x_1 и x_2 ед. соответствует площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции суммарных затрат $\beta = \alpha'(x)$, отрезком $[x_1; x_2]$ и вертикальными прямыми $x = x_1$ и $x = x_2$.

Прикладная задача 2. Анализ факторов «Затраты», «Доход» и «Прибыль» посредством интегрального исчисления функций одной действительной переменной. Приступать к работе со второй прикладной задачей следует после рассмотрения первой прикладной задачи, так как она является обобщением предыдущей. Дополним сюжет первой прикладной задачи функциями $u = u'(x)$ и $v = v'(x)$ – функции суммарного дохода и суммарной прибыли при увеличении продаж произведенной предприятием продукции от x_1 до x_2 ед. связаны соотношениями:

$$\int_{x_1}^{x_2} u'(x)\,dx = u(x_2) - u(x_1); \quad \int_{x_1}^{x_2} v'(x)\,dx = v(x_2) - v(x_1).$$

Рассмотрим частный случай данных соотношений. Например, будем считать, что функция суммарных затрат предприятия известна и имеет вид $\beta(x) = 50{,}5 - 0{,}01x.$ Можно рекомендовать студентам рассмотреть различные варианты функций, не обязательно линейные относительно аргумента $x.$ Определим волатильность суммарных затрат, при условии, что производство продукции увеличится на *500* ед., когда *700* ед. уже будет произведено.

Важно обратить внимание студентов на то, что величина x_2 в формулировке не задана в явном виде. Итак, по условию данной прикладной задачи $x_2 = 1200$ ед. Следовательно, волатильность суммарных затрат задается определенным интегралом

$$\int_{500}^{1200} (50{,}5 - 0{,}02x)\,dx = \left(50{,}5x - 0{,}0x^2\right)\Big|_{500}^{1200} = 23450.$$

Прикладная задача 3. Максимизация прибыли от производства продукции с учётом временного фактора. Продолжим рассматривать три функции аргумента времени – суммарные затраты на производства продукции, суммарных доход и прибыль от производства продукции. С учётом того, что $u = u'(x)$ и $v = v'(x)$ – функции суммарного дохода и суммарной прибыли, получаем, что $\gamma(x) = v(x) - \alpha(x), \gamma'(x) = v'(x) - \alpha'(x).$ Необходимо обратить внимание студентов на то, что целью задачи является максимизация суммарной прибыли от производства продукции. Аналитически это условие можно записать в виде равенства нулю производной дохода, т.е. $\gamma'(x) = 0,$ что достигается при условии равенства $v'(x) = \alpha'(x).$

Таким образом, найдется такой момент времени $x_0,$ в который выполняется равенство $v'(x) = \alpha'(x),$ экономический смысл которого заключается в совпадении скоростей изменения суммарного дохода и суммарных затрат производства продукции. Для понимания студентами этого факта необходимы представления о геометрическом и физическом смысле первой производной. Заметим, что эти представления начинают формироваться уже в рамках школьного курса математики по причине высокой востребованности математического аппарата «Производная» для решения прикладных задач.

Тогда суммарную прибыль от производства продукции за время x_0 следует определить соотношением

$$\gamma(x_0) = \int_0^{x_0} \gamma'(x)\,dx = \int_0^{x_0} \left(v'(x) - \alpha'(x)\right)dx.$$

При рассмотрении данной прикладной задачи нельзя ограничиваться только теоретическими выкладками. Следует рассмотреть различные частные случаи, сделать акцент на использование различных функциональных зависимостей и обсудить со студентами, насколько эти зависимости и полученные результаты адекватны экономической действительности. Как показывает практика преподавания математических дисциплин в высшей экономической школе, студенты достаточно охотно включаются в работу по *самостоятельному подбору функциональных зависимостей* под рассматриваемую экономическую ситуацию, предлагают много вариантов, часть из которых впоследствии отклоняется по причине несоответствия экономической действительности. Заметим, что для организации этой работы студенты должны быть знакомы не только с различными видами функциональных зависимостей (линейная зависимость, квадратичная зависимость, экспоненциальная зависимость и др.), но и понимать *содержательные аспекты рассматриваемой экономической ситуации* – в данном случае производственной ситуации.

Будем считать, что скорости изменения суммарных затрат и суммарного дохода предприятия после запуска производственного процесса определены следующими степенными зависимостями: $v'(x)=182+4\sqrt[3]{x^2}$, $\alpha'(x)=830-4\sqrt[3]{x^2}$, где $x-$ дни производства. Определим, какой промежуток времени производство было прибыльным и найдем суммарную прибыль (руб.), полученную за этот промежуток времени.

Для определения момента времени x_0 приравняем записанные функции. Получаем, что $182+4\sqrt[3]{x^2}=830-4\sqrt[3]{x^2}$, откуда $x_0=729$. Таким образом, производство было прибыльным *729* дней.

Вычислим далее суммарную прибыль, которая была получена за этот период. Учитывая пределы интегрирования от *0* (начало производства) и *729* (завершение производства), получаем определенный интеграл

$$\int_0^{729}\left(\left(830-4\sqrt[3]{x^2}\right)-\left(182+4\sqrt[3]{x^2}\right)\right)dx=\int_0^{729}\left(648-8\sqrt[3]{x^2}\right)dx=648x-8x^{5/3}\Big|_0^{729}=188956{,}8.$$

Таким образом, за *729* дней прибыльного производства было получено *18 8956,8* руб. Заметим, что типовой ошибкой при работе с данной прикладной задачей является изменение порядка следования функций в записанном определенном интеграле. В этом случае суммарный доход будет получен отрицательный и если обратить на это внимание, появляется возможность устранить эту ошибку. Также типовыми ошибками студентов является неверная расстановка пределов интегрирования, неправильное нахождение первообразных заданных функций. Кроме вычислительных ошибок возможны также ошибки при реализации формулы Ньютона-Лейбница (сумма первообразных вместо их разности, неверная последовательность подставки пределов интегрирования в первообразные).

Интегральное исчисление функций представляет собой *важнейший инструмент экономического анализа*, способствующий более глубокому пониманию экономических проблем и ситуаций, и позволяющий рассматривать экономические закономерности на языке математических формул. Кроме того, нельзя недооценивать *влияние экономической теории на математические методы*: так, привлечение экономического содержания позволит по-новому интерпретировать математические понятия («Функция», «Первообразная», «Интеграл», «Приращение» и др.), расширить приложения математических методов. Мы считаем, что данные аспекты должны быть отражены в практике математической подготовки будущего экономиста, являющейся неотъемлемым содержательным компонентом его профессиональной компетентности.

Необходимо обратить внимание студентов, что данная прикладная задача позволит углубить математический смысл уже известных экономических понятий и формализовать производственный процесс. При этом некоторые *закономерности производства, потребления и распределения* могут быть рассмотрены как следствия абстрактных математических построений.

В процессе рассмотрения данной прикладной задачи следует напомнить студентам, что экономический смысл производной функции заключается в скорости изменения экономического процесса во времени [10, 11]. Также производная функция позволяет определить скорость изменения одного фактора по отношению к другому фактору (необязательно времени). Это проявляется, в частности, при исследовании ценовой эластичности спроса (первым фактором выступает «Цена», вторым фактором выступает «Спрос»).

Отметим, что большинство методических работ, посвященных реализации прикладной экономической направленности обучения математике, рассматривают приложения дифференциального исчисления в экономике [17]. При этом интегральному исчислению уделяется недостаточное внимание по причине усложнения учебного материала («Интегрирование» является обратной операцией, более сложной, чем прямая операция – «Дифференцирование») и трудностями в адаптации сложных задач экономического содержания, решение которых требует применения методов интегрального исчисления. В некоторых работах, как, например, в [3] предпринята попытка изменить сложившуюся ситуацию, однако большинство задач относятся к образовательным областям «Дифференциальные уравнения и разностные схемы», «Интегральные уравнения», «Методы нелинейной экономической динамики», «Теория оптимального управления» и рассчитанных на высокий уровень математической подготовки студентов (например, обучающихся по направлению «Математические методы в экономике», «Прикладная математика») и является недоступным для внедрения в учебный процесс в рамках учебной дисциплины «Высшая математика», изучаемой всеми студентами экономического университета.

Таким образом, для реализации профессиональной направленности математической подготовки будущего экономиста средствами базовой учебной дисциплины «Высшая математика» необходимо развитие научных подходов к формированию содержания базового и вариативного компонентов его содержания, включение новых задач экономического содержания, способствующих дальнейшему саморазвитию и профессиональному самоопределению, выбору специализации в магистратуре. Учитывая, что содержание является одним из компонентов методических систем обучения, нельзя без внимания оставлять и другие компоненты, среди которых цели и методы обучения, в также средства и организационные формы обучения.

Литература

1. *Быканова О.А., Филипова Н.В.* Проектно-исследовательская деятельность старшеклассников на основе междисциплинарной интеграции как путь к профессиональному самоопределению // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Гуманитарные науки. – 2019. – № 4. – С. 55-58.

2. *Власов Д.А.* Совершенствование методики преподавания математических дисциплин в высшей экономической школе // Современная математика и концепции инновационного математического образования. – 2020. – Т. 7. – № 1. – С. 337-342.

3. *Зарвирова М.С.,Хаджиназарова А.С.* Роль определенного интеграла в экономике // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 5-2. – С. 156-158.

4. *Кулапов М.Н., Карасев П.А.* Специфика проектного управления разработкой и реализацией программ ДПО в университетах: роль образовательно-научных центров // Вестник Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова. – 2021. – Т. 18. – № 1 (115). – С. 105-114.

5. Линейная алгебра. Учебник и практикум для прикладного бакалавриата /Под общей редакцией О. В. Татарникова. – Москва: Издательство Юрайт, 2014. – 334 с.

6. Математика для экономистов. Практикум: учебное пособие для академического бакалавриата /Под общей редакцией О. В. Татарникова. – Москва: Издательство Юрайт, 2014. – 285 с.

7. Математика для экономистов. Теория и практика: учебник для академического бакалавриата /Под общей редакцией О. В. Татарникова. – Москва: Издательство Юрайт, 2014. – 598 с.

8. *Муханов С.А., Муханова А.А.* Использование информационных технологий для индивидуализации обучения математике на примере темы «Дифференциальные уравнения» // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия: Информатика и информатизация образования. – 2018. – № 1 (43). – С. 72-77.

9. *Полежаев В.Д.* Методы и модели в экономике. – Омск: ОмГТУ, 2008. – 65 с.

10. *Поташев А.В., Поташева Е.В.* Эластичность функции - средство анализа экономических процессов // Научное обозрение. – 2015. – № 20. – С. 359-362.

11. *Синчуков А.В.* Методические особенности формирования понятия «Эластичность» в условиях информатизации учебной дисциплины «Высшая математика» // Журнал педагогических исследований. – 2018. – Т. 3. – № 6. – С. 93-104.

12. *Синчуков А.В.* Преподавание математических дисциплин в условиях цифровизации // Электронные библиотеки. – 2020. – Т. 23. – № 1-2. – С. 177-186.

13. *Смирнов Е И., Трофимец Е.Н.* Проектирование информационно-аналитических технологий обучения студентов-экономистов // Ярославский педагогический вестник. – 2010. – Т. 2. – № 2. – С. 137.

14. *Смирнов Е.И.* Технология наглядно-модельного обучения математике.– Ярославль: ЯГПУ, 1998. – 335 с.

15. *Сухорукова И.В., Савина О.И.* Высшая математика (для гуманитарных специальностей) – Москва: РЭУ, 2018. – 112 с.

16. *Фомин Г.П., Карасев П.А.* Математика в экономике: 813 задач с комментариями и ответами. Учебное пособие. – Москва: Общество с ограниченной ответственностью «Издательство «КноРус», 2019. – 368 с.

17. *Шабанова А.К.* Применение дифференциального исчисления в экономике // Известия Института систем управления СГЭУ. – 2020. – № 2 (22). – С. 187-189.