Геометрические модели и алгоритмы построения сферических сечений гиперфрактала

Geometrical models and algorithms of construction of hyperfractal spherical sections

Бойков А.А.
старший преподаватель кафедры инженерной графики РТУ МИРЭА
e-mail: albophx@mail.ru

Boykov A.A.
senior lecturer of department of engineering graphics of MIREA – Russian Technological University
e-mail: albophx@mail.ru

Гудаев И.И.
студент РТУ МИРЭА
e-mail: bxmail81@gmail.com

Gudaev I.I.
student of MIREA – Russian Technological University
e-mail: bxmail81@gmail.com

Аннотация
В статье рассматривается построение неплоских (объемных) фрактальных изображений, которые могут найти применение в предметном дизайне. Для этого предлагается рассекать гиперфракталы неплоскими поверхностями и строить их плоские проекции или 3-мерные модели. В качестве примера рассматривается построение сферических сечений гиперфрактала Жулиа-Мандельброта, приводятся необходимые геометрические модели и алгоритмы, показываются примеры построенных фрактальных изображений.
Ключевые слова: гиперфрактал, алгебраические фракталы, многомерная геометрия, множество Жулиа, множество Мандельброта, предметный дизайн.

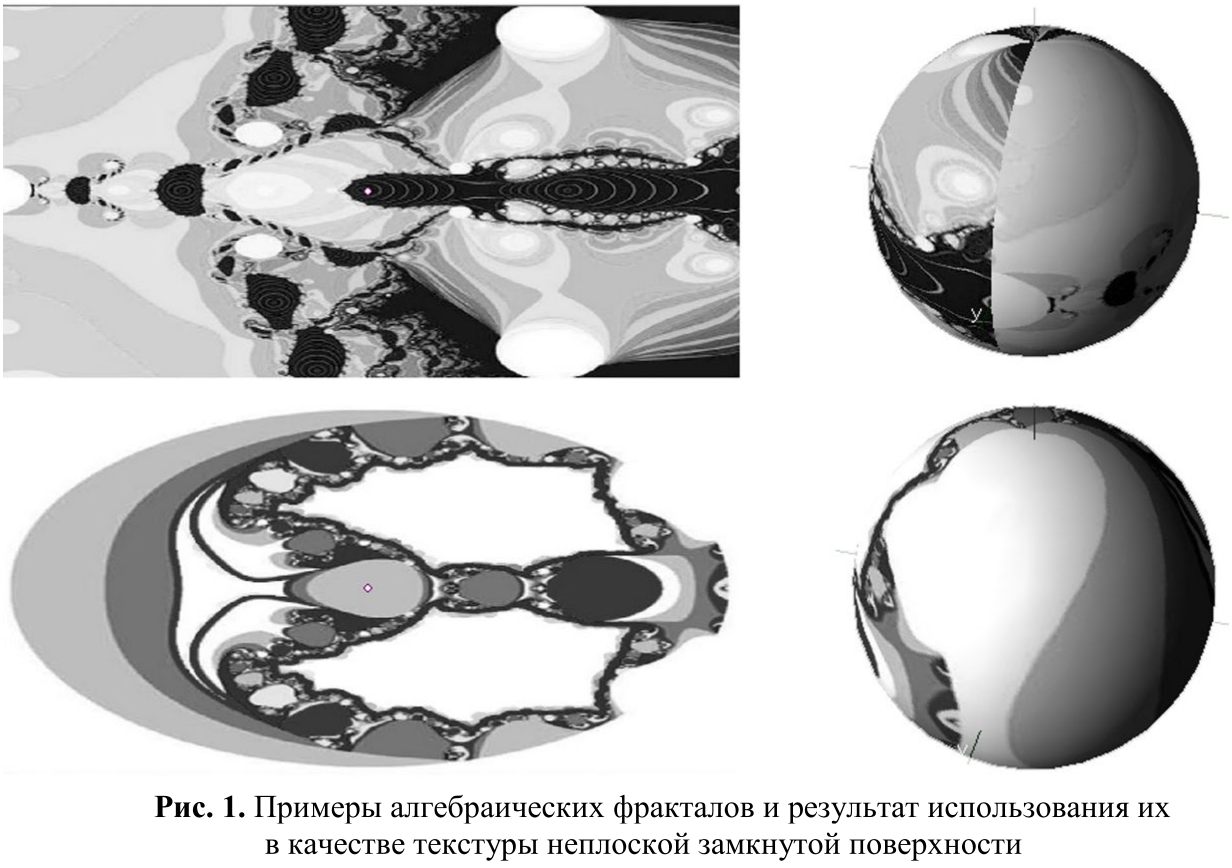
Abstract
The article discusses the construction of non-planar fractal images, which can be used in product design. To do this, it is proposed to dissect hyperfractals with non-planar surfaces and build their flat projections or 3-dimensional models. As an example, the construction of spherical sections of the Julia-Mandelbrot hyperfractal is considered, the necessary geometric models and algorithms are given, examples of the constructed fractal images are shown.
Keywords: hyper-fractal, algebraic fractal, multidimensional geometry, Julia set, Mandelbrot set, object design

1. Фрактальные алгоритмы широко применяются при решении научных и практических задач [1–4]. В последнее время фрактальные изображения все чаще находят применение в искусстве и дизайне [5–8], даже отмечается появление особого направления – «фрактальный дизайн» [5]. При более внимательном рассмотрении становится заметно, что наибольшее применение в области искусства и дизайна находят геометрические фракталы (см. [5–6]). Применение алгебраических фракталов, самыми известными из которых являются множество Мандельброта, множество Жулиа и бассейны Ньютона, встречается значительно реже.

В настоящей работе рассматриваются вопросы построения неплоских алгебраических фракталов, которые могут найти применение в предметном дизайне.

2. Алгебраические фракталы порождаются в результате итерационного вычисления некоторой функции комплексного переменного *f(f(…(f(z))…))* и рассматриваются, как правило, на комплексной плоскости, образованной действительной и мнимой компонентами *z*. Изображение, полученное в результате, оказывается плоским (рис. 1). Оно может быть использовано в качестве текстуры неплоской поверхности, но, если такая поверхность замкнута, неизбежно появление «швов» (рис. 1,*а*), «бесшовные» случаи ограничиваются изображениями с изолированными фрактальными фигурами (рис. 1,*б*). Решением данной проблемы могли бы стать аналоги алгебраических фракталов, построенные на поверхности изначально неплоской, в том числе замкнутой.

В работах [8–10] алгебраические фракталы рассматриваются с позиций многомерной геометрии, в частности в [8] вводится понятие ***гиперфрактала***, обобщающее понятие алгебраического фрактала на случай множества независимых параметров. Известные фракталы, такие как множества Жулиа или Мандельброта оказываются его частными плоскими сечениями. Возможность построения множества плоских сечений гиперфрактала [8–10], в частности, пучком плоскостей общего положения [8] показывает его непрерывность в многомерном пространстве параметров. Из этого следует, что, рассекая гиперфрактал некоторой кривой поверхностью, в том числе замкнутой, в пространстве параметров гиперфрактала мы получим неплоский аналог алгебраического фрактала.



а)

б)

Рис. 1. Примеры алгебраических фракталов и результат использования их в качестве текстуры неплоской замкнутой поверхности

Гиперфактал размерности *n* в (*n*+1)-мерном пространстве с координатами (*Цвет*, x_0, $\ldots x_n$) задается уравнением вида [8]:

$$Цвет = Iterate\ (x_0, \ldots x_n) \qquad (1)$$

– и представляет собой гиперповерхность размерности *n*, т.е. множество ∞^n точек.

В пересечении с другими *n*-гиперпространствами, которые задаются уравнениями вида:

$$g\ (Цвет,\ x_0,\ \ldots x_n) = 0, \qquad (2)$$

в том числе *n*-гиперцилиндрическими поверхностями вида:

$$g'(x_0, \dots x_n) = 0, \qquad (3)$$

в том числе n-гиперплоскостями уровня:

$$x_i = const \qquad (4)$$

– образуются сечения – (n–1)-гиперповерхности.

В пересечении k n-гиперповерхностей образуется (n–k+1)-гиперповерхность.

Обыкновенное фрактальное изображение представляет собой 3-мерное сечение n-гиперфрактала, одной из координат которого остается *Цвет*, т.е. требуется k=n–2 секущих n-гиперповерхностей.

Далее удобно (n+1)-мерное пространство с координатами (*Цвет*, $x_0, \dots x_n$) однозначно отобразить на двойки вида <*Цвет*, $(x_0, \dots x_n)$>, т.е. перейти к n-мерному пространству разноцветных точек [8], заполняющему n-гиперфрактал изнутри.

Теперь если взять n–2 секущих гиперпространств мы получим 2-мерную поверхность разноцветных точек – сечение исходного гиперфрактала. Если все секущие гиперповерхности линейны и задаются уравнениями вида (4), сечение окажется эквивалентным одному из обычных алгебраических фракталов. Если одна или несколько секущих гиперповерхностей нелинейны, сечение, о общем случае, окажется неплоским.

Далее будем рассматривать неплоские сечения гиперфрактала Жулиа-Мандельброта. Он задается следующим уравнением [8]:

$$\text{Цвет} = Iterate\,(C^{re}, C^{im}, z^{re}, z^{im}), \qquad (5)$$

– является 4-мерным в 5-мерном пространстве (*Цвет*, $C^{re}, C^{im}, z^{re}, z^{im}$) или в 4-мерном пространстве разноцветных точек ($C^{re}, C^{im}, z^{re}, z^{im}$). Для получения сечений можно использовать две секущие гиперповерхности вида:

$$g'(C^{re}, C^{im}, z^{re}, z^{im}) = 0 \qquad (6).$$

Таким образом, неплоский алгебраический фрактал будем задавать следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} g_1(C^{re}, C^{im}, z^{re}, z^{im}) = 0, \\ g_2(C^{re}, C^{im}, z^{re}, z^{im}) = 0, \\ \text{Цвет} = Iterate\,(C^{re}, C^{im}, z^{re}, z^{im}). \end{cases}$$

Порядок уравнений несущественен (операция пересечения коммутативна и ассоциативна [11]), поэтому можно вначале пересечь гиперповерхности g_1 и g_2, в результате получится некоторая поверхность (∞^2) σ, которую затем пересечь с гиперфракталом. Таким образом, форму сечения можно задавать, выбирая подходящие гиперповерхности g_1 и g_2.

3. Будем строить сферические сечения гиперфрактала: сферу легко задать и построить, при этом она является замкнутой поверхностью, и ее точки при помощи центрального проецирования могут быть перенесены на многие другие замкнутые поверхности с сохранением непрерывности фрактального узора.

Сфера (∞^2) в 4-мерном пространстве может быть задана:

- пересечением гиперсферы с некоторой гиперплоскостью;
- пересечением гиперцилиндра или гиперконуса со сферическим основанием подходящей гиперплоскостью;
- пересечением двух гиперсфер и др.

Последний случай особенно удобен, поскольку каждую исходную гиперсферу можно задать координатами центра ($C_0^{re}, C_0^{im}, z_0^{re}, z_0^{im}$) и радиусом ($R_0$). Их уравнения имеют вид:

$$(C^{re} - C_0^{re})^2 + (C^{im} - C_0^{im})^2 + (z^{re} - z_0^{re})^2 + (z^{im} - z_0^{im})^2 = R_0^2 \qquad (7).$$

Таким образом, секущая сфера задается системой уравнений:

$$\begin{cases} (C^{re} - C_0^{re})^2 + (C^{im} - C_0^{im})^2 + (z^{re} - z_0^{re})^2 + (z^{im} - z_0^{im})^2 = R_0^2 \\ (C^{re} - C_1^{re})^2 + (C^{im} - C_1^{im})^2 + (z^{re} - z_1^{re})^2 + (z^{im} - z_1^{im})^2 = R_1^2 \end{cases} \qquad (8).$$

Произведем параметрический анализ [12].

В 4-мерном пространстве – ∞^4 точек. Сфера задается 4-мя точками, всего имеется $\infty^{4\cdot 4} = \infty^{16}$ четверок точек. На сфере – ∞^2 точек и $\infty^{2\cdot 4} = \infty^8$ четверок точек. Таким образом, в 4-мерном пространстве $\infty^{16}/\infty^8 = \infty^8$ сфер, т.е. сфера задается 8 параметрами. Из них формы – один (радиус), остальные 7 – положения. Причем, 4 – положение центра сферы. Оставшиеся 3 – углы поворота сферы относительно координатных плоскостей (всего в 4-мерном пространстве возможно 6 различных углов поворота, но при вращении по трем другим сфера скользит сама по себе и не изменяется).

В 4-мерном пространстве ∞^5 гиперсфер (∞^4 центров и ∞^1 радиусов), $\infty^{5\cdot 2}= \infty^{10}$ – пар гиперсфер. Причем, подобно окружности в пространстве, которая задает ∞^1 (пучок) инцидентных сфер, сфера задает ∞^1 (пучок) инцидентных гиперсфер. Инцидентность сферы и гиперсферы, таким образом, связывает 4 параметра. Что подтверждает следующий расчет: на гиперсфере ∞^3 точек, $\infty^{3\cdot 4}=\infty^{12}$ четверок точек, – $\infty^{12}/\infty^8=\infty^4$ сфер. То есть принадлежность некоторой гиперсфере связывает 8–4=4 параметра сферы.

Параметрический анализ показывает, что, меняя значения параметров исходных гиперсфер, можно задать любую из ∞^8 сфер 4-мерного пространства (C^{re}, C^{im}, z^{re}, z^{im}). Отметим, что даже если радиусы гиперсфер выбирать равными, таких пар имеется $\infty^5\cdot\infty^4=\infty^9$, что также позволяет задать любую секущую сферу.

Общий алгоритм построения фрактального изображения выглядит следующим образом:

Алгоритм 1.

Для C_i^{re} из $[C_{min}^{re}.. C_{max}^{re}]$

Для C_j^{im} из $[C_{min}^{im}.. C_{max}^{im}]$

Подставляем значения C_i^{re}; C_j^{im} в систему (8), выражаем и находим:

$$\begin{cases} (z^{re}- z_0^{re})^2 +(z^{im}- z_0^{im})^2 = R_0^2- const_0 \\ (z^{re}- z_1^{re})^2 +(z^{im}- z_1^{im})^2 = R_1^2- const_1 \end{cases} \quad (9)$$

Система (9) приводится к квадратному уравнению.

Находим его дискриминант Δ.

Если Δ≤0, точка лежит вне секущей сферы.

Если Δ≥0, имеется два различных или совпавших решения для двух полушарий секущей сферы.

Находим z^{re};z^{im} для первого полушария. Подставляем C_i^{re};C_j^{im};z^{re};z^{im} в (5).

Находим *Цвет* и выполняем отрисовку.

Находим z^{re};z^{im} для второго полушария. Подставляем C_i^{re};C_j^{im};z^{re};z^{im} в (5).

Находим *Цвет* и выполняем отрисовку.

На рис. 2 показана серия сечений гиперфрактала сферами (разные полушария сверху и снизу в каждой строке) при изменении радиуса исходных гиперсфер от 0,5 до 1,7. Расположение центров гиперсфер сохраняется. Центр первой гиперсферы находится в начале координат, центр второй гиперсферы имеет координаты (0; 0; 1; 1). Центр секущей сферы остается неизменным.

В общем случае положение центра и радиус секущей сферы можно найти, как показано на рис. 3,*а* (показана проекция на плоскость, проходящая через центры гиперсфер). По т. Пифагора $R_0^2 = x^2 + r^2$ и $R_1^2 = (d - x)^2 + r^2$. Откуда:

$$x = \frac{d^2+R_0^2-R_1^2}{2d} \quad (10)$$

– радиус равен:

$$r = \sqrt{R_0^2 - x^2} \quad (11)$$

Если радиусы гиперсфер равны R_0=R_1=R, тогда $x = \frac{d}{2}$ (центр неподвижен) и $r = \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}$.

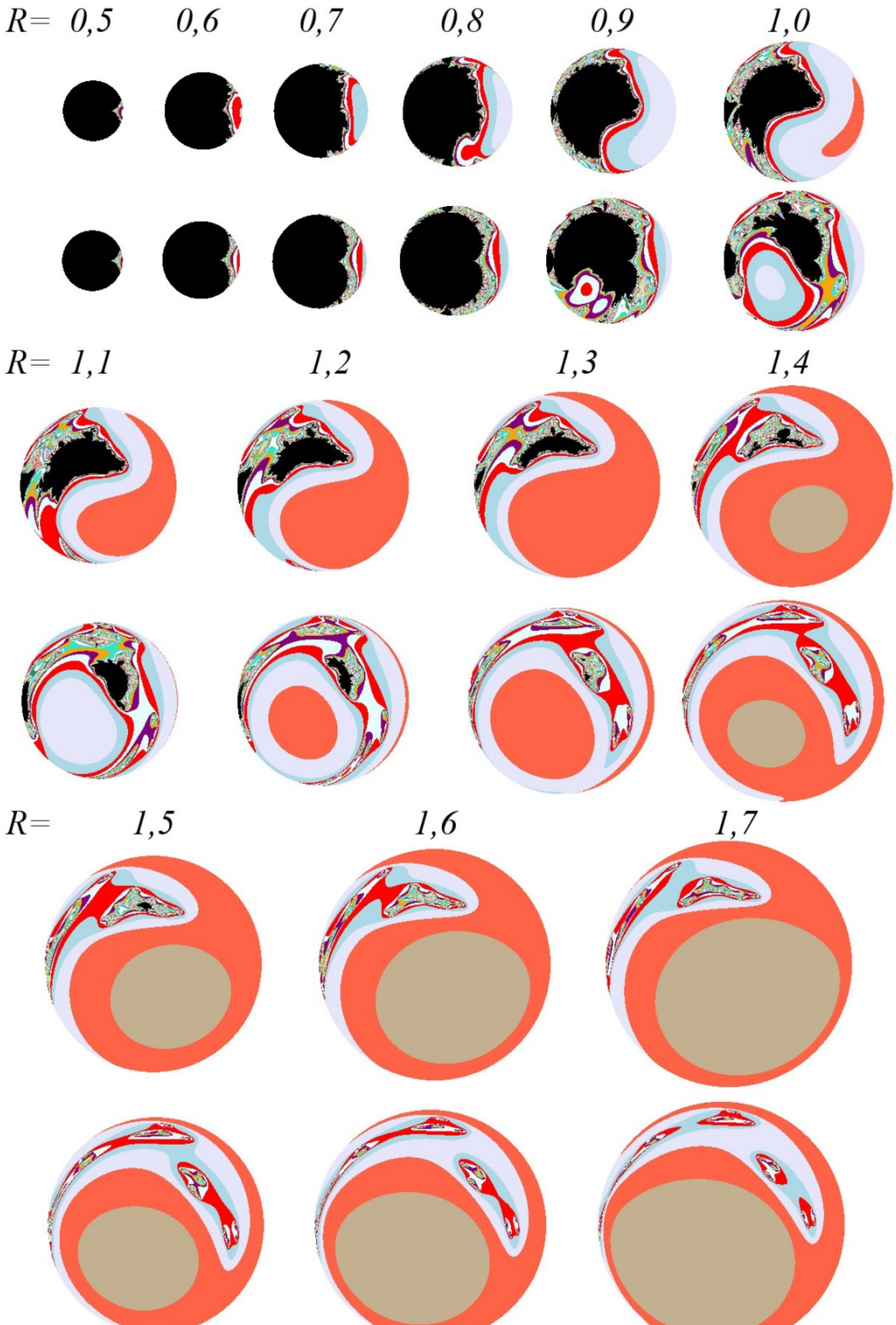
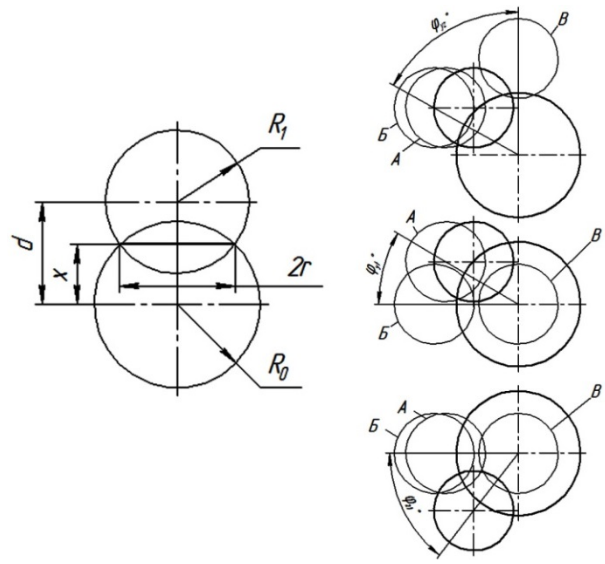


Рис. 2. Сечения гиперфрактала сферами при изменении радиуса исходных гиперсфер

Таким образом, приведенный способ позволяет получить изображение сечения гиперфрактала любой сферой в 4-мерном пространстве (C^{re}, C^{im}, z^{re}, z^{im}).

4. В рассмотренном в п. 3 случае секущая сфера занимала положение уровня, поэтому сечения гиперфрактала на рис. 2 спроецированы в виде кругов. Вообще очертаниями сферы на плоскостях проекций при ортогональном проецировании могут быть отрезок, длина которого равна диаметру сферы, окружность с диаметром, равным диаметру сферы, или эллипс с большой осью, равной диаметру сферы, поскольку сфера имеет ∞^3 диаметров и по крайней мере один проецируется в натуральную величину (вопросы проецирования кривых гиперповерхностей ранее рассматривались в [13–15]).



а) б)

Рис. 3. Определение положения центра и радиуса секущей сферы (а) и преобразование секущей сферы в положение уровня (б)

В общем случае сфера будет проецироваться с искажением и, как показано в п. 2, требуется максимум три поворота вокруг проецирующих плоскостей, чтобы привести ее в положение уровня. Будем использовать следующий геометрический подход. Для удобства переименуем координатные оси (C^{re}, C^{im}, z^{re}, z^{im}) в (x, y, z, t).

- Перенесем центр первой гиперсферы в начало координат.
- Выполним поворот вокруг проецирующей плоскости zt на угол φ_{zt} в положение А.
- Выполним поворот вокруг проецирующей плоскости yt на угол φ_{yt} в положение Б.
- Выполним поворот вокруг проецирующей плоскости yz на угол φ_{yz} в положение В.

В результате секущая сфера займет положение уровня, при котором на плоскости xy и xz ее очертания спроецируются в виде окружностей.

Поворот вокруг проецирующих плоскостей задается при помощи матриц:

$$R_{zt} = \begin{pmatrix} cos\varphi_{zt} & -sin\varphi_{zt} & 0 & 0 \\ sin\varphi_{zt} & cos\varphi_{zt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_{yt} = \begin{pmatrix} cos\varphi_{yt} & 0 & -sin\varphi_{yt} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sin\varphi_{yt} & 0 & cos\varphi_{yt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_{yz} = \begin{pmatrix} cos\varphi_{yz} & 0 & 0 & -sin\varphi_{yz} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ sin\varphi_{yz} & 0 & 0 & cos\varphi_{yz} \end{pmatrix}$$

Знак угла выбирается положительным при вращении против часовой стрелки, отрицательным – по часовой стрелке. Матрица общего преобразования вращения получается перемножением матриц:

$$M = R_{zt} \times R_{yt} \times R_{yz}$$

Матрица обратного преобразования может быть получена следующим образом:

$$M^{-1} = R^{-1}_{yz} \times R^{-1}_{yt} \times R^{-1}_{zt}$$

Обратные матрицы отдельных поворотов получаются заменой знака угла.

Алгоритм построения фрактального изображения с учетом преобразования секущей сферы в положение уровня выглядит следующим образом.

Алгоритм 2.

По параметрам исходных гиперсфер формируем матрицу $\mathbf{M^{-1}}$.

Синусы и косинусы углов поворота определяются без вычисления самих углов.

Так, если после переноса координаты центра второй сферы стали *(x’’, y’’, z’’, t’’)*,

то $sin\varphi_{zt} = -\frac{y''}{\sqrt{x''^2+y''^2}}$, $cos\varphi_{zt} = \frac{x''}{\sqrt{x''^2+y''^2}}$ и т.п.

Для C_i^{re} из $[C_{min}^{re}.. C_{max}^{re}]$

Для C_j^{im} из $[C_{min}^{im}.. C_{max}^{im}]$

Подставляем значения C_i^{re}; C_j^{im} в систему (8) для преобразованных гиперсфер, выражаем и находим:

$$\begin{cases} (z^{re}-z_0^{re})^2+(z^{im}-z_0^{im})^2=R_0^2-const_0 \\ (z^{re}-z_1^{re})^2+(z^{im}-z_1^{im})^2=R_1^2-const_1 \end{cases} \qquad (9)$$

Система (9) приводится к квадратному уравнению.

Находим его дискриминант Δ.

Если $\Delta\le 0$, точка лежит вне секущей сферы.

Если $\Delta\ge 0$, имеется два различных или совпавших решения для двух полушарий секущей сферы.

Находим $z^{re};z^{im}$ для первого полушария.

Выполняем обратный поворот точки: $(C'^{re}_i;C'^{im}_j;z'^{re};z'^{im})=(C_i^{re};C_j^{im};z^{re};z^{im})\times M^{-1}$.

Выполняем обратный перенос начала координат.

Подставляем $C'^{re}_i;C'^{im}_j;z'^{re};z'^{im}$ в (5).

Находим *Цвет* и выполняем отрисовку.

Находим $z^{re};z^{im}$ для второго полушария.

Выполняем обратный поворот точки: $(C'^{re}_i;C'^{im}_j;z'^{re};z'^{im})=(C_i^{re};C_j^{im};z^{re};z^{im})\times M^{-1}$.

Выполняем обратный перенос начала координат.

Подставляем $C'^{re}_i;C'^{im}_j;z'^{re};z'^{im}$ в (5).

Находим *Цвет* и выполняем отрисовку.

На рис. 4 показаны фрактальные изображения, построенные без преобразования вращения (алгоритм 1) и с преобразованием (алгоритм 2).

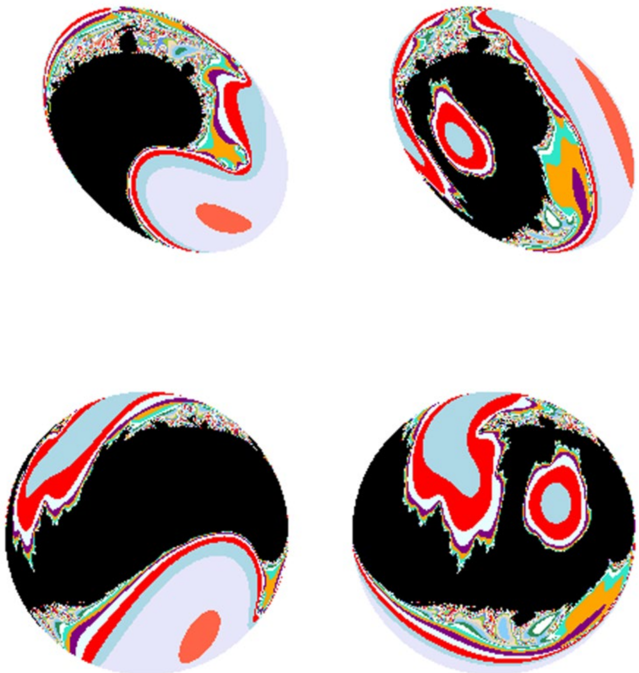


Рис. 4. Фрактальные изображения, полученные до (вверху) и после (внизу) преобразования секущей сферы в положение уровня

Таким образом, приведенный выше алгоритм позволяет получать изображения сферических сечений гиперфарктала общего вида с наименьшим искажением, поскольку секущая сфера без искажения оказывается вложена в одно из 3-мерных подпространств уровня. Изображения в виде двух полушарий более удобны для анализа и понимания, поскольку более привычны и используются, к примеру, для представления земной поверхности. Отметим, что предлагаемый подход может использоваться без проецирования. Он позволяет получать значения цвета для точек преобразованной 4-мерной модели, из которой, отбрасыванием координаты t может быть сформировано 3-мерное фрактальное изображение, как множество разноцветных точек в 3-мерном пространстве.

5. Изображение в виде полушарий и 3-мерная модель сферического фрактала, которые могут быть построены при помощи алгоритмов 1 и 2, обладают следующим общим недостатком: в центре полушарий плотность точек выше, а ближе к очерковой линии и соответствующему контуру в пространстве – значительно ниже. Кроме того, изображение в виде полушарий не очень удобно использовать при создании текстур для 3*D*-моделей. На практике обычно используют прямоугольные изображения (рис. 1), которые представляют собой развертку равнопромежуточной цилиндрической проекции поверхности шара. Рассмотрим построение такой развертки.

После преобразования, рассмотренного в п. 4, секущая сфера располагается таким образом, что в 3-мерное пространство (x, y, z) она вкладывается без искажения, и все ее точки имеют общую t-координату, значение которой можно рассчитать по формуле (10).

Введем угловые (сферические) координаты $-\pi \le \varphi \le \pi$ (азимут или долгота) и $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ (зенит или широта), как показано на рис. 5.

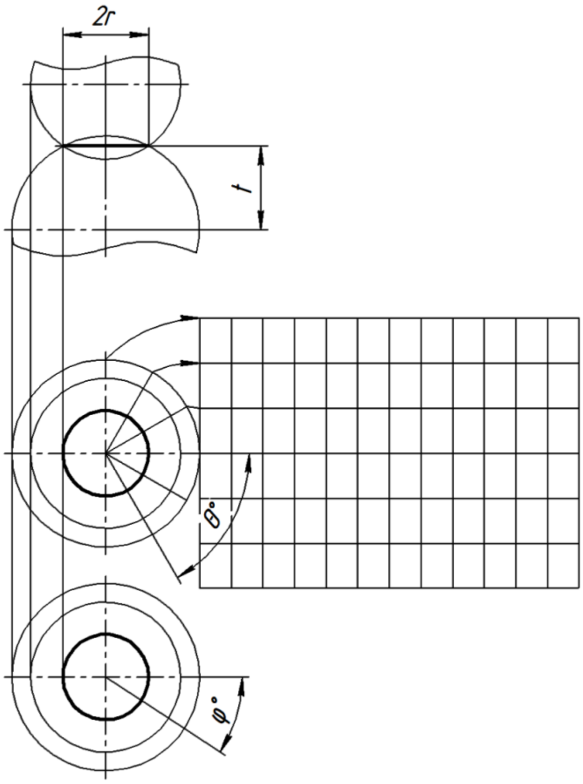


Рис. 5. Формирование развертки цилиндрической проекции секущей сферы

Для перехода к декартовым координатам используются следующие формулы:

$$x = -r \cdot cos\theta \cdot cos\varphi,$$
$$y = r \cdot cos\theta \cdot sin\varphi, \qquad (12).$$
$$z = r \cdot sin\theta$$

Отобразим прямоугольную область значений угловых координат на прямоугольную область экрана высотой h и шириной w. Преобразование экранных координат ($x^э$, $y^э$) в угловые будет задаваться следующим образом:

$$\varphi = 2\pi \cdot (x^э - x_0^э) / w,$$
$$\theta = \pi \cdot (y^э - y_0^э) / h \qquad (13).$$

Алгоритм построения фрактального изображения выглядит следующим образом:

Алгоритм 3.

По параметрам исходных гиперсфер формируем матрицу $\mathbf{M^{-1}}$.

Рассчитываем радиус r и t-координату секущей сферы по формулам (10) и (11).

Для $x_i^{\text{э}}$ из [$x_{min}^{\text{э}}$.. $x_{max}^{\text{э}}$]

Для y_j^{im} из [$y_{min}^{\text{э}}$.. $y_{max}^{\text{э}}$]

По формулам (13) и (12) получаем координаты точки в пространстве (x_{ij},y_{ij},z_{ij})

На основе значений x_{ij},y_{ij},z_{ij} и t формируем четверку (C_{ij}^{re}; C_{ij}^{im}; z_{ij}^{re}; z_{ij}^{im}).

Выполняем обратный поворот точки: $(C'^{re}_i;C'^{im}_j;z'^{re};z'^{im})=(C_i^{re};C_j^{im};z^{re};z^{im})\times M^{-1}$

Выполняем обратный перенос начала координат.

Подставляем $C'^{re}_i;C'^{im}_j;z'^{re};z'^{im}$ в (5).

Находим *Цвет* и выполняем отрисовку.

На рис. 6 показан пример построенного при помощи этого алгоритма фрактального изображения и результат наложения его в виде текстуры и рельефа на 3*D*-модель сферы.

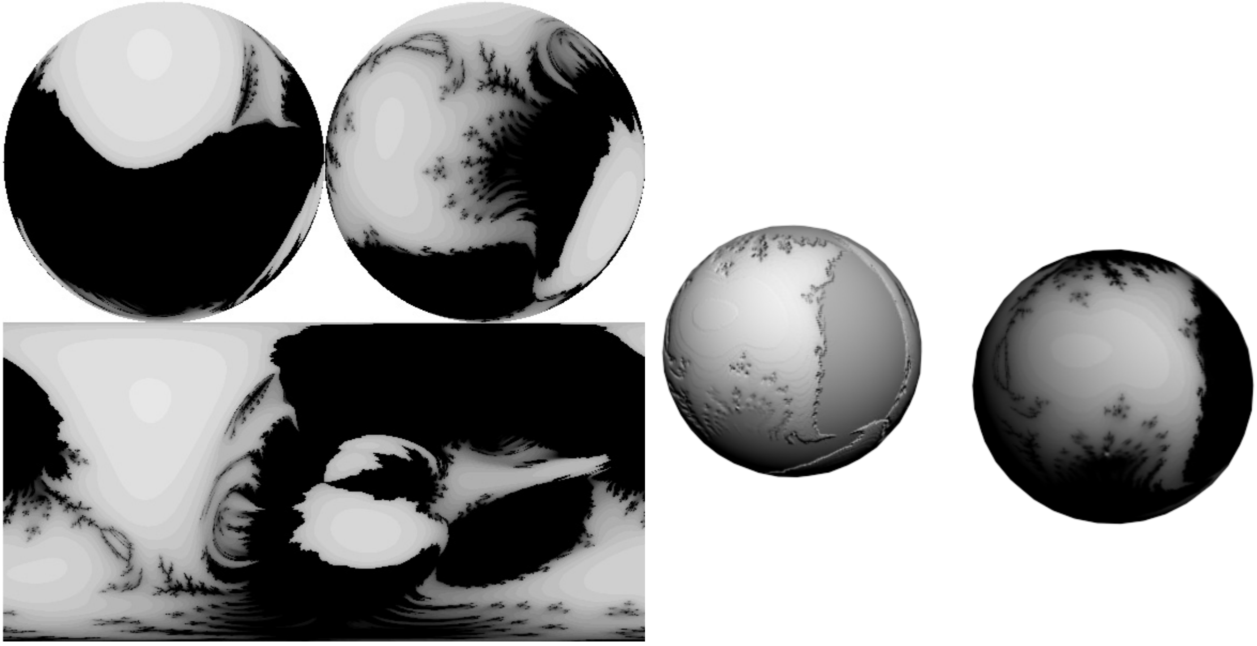


Рис. 6. Развертка равнопромежуточной цилиндрической проекции секущей сферы и ее использование в качестве текстуры при 3*D*-моделировании

Таким образом, приведенный выше алгоритм позволяет получать развертки секущих сфер для использования их в системах 3*D*-графики.

6. Основные результаты.

Предложен новый (ранее не встречавшийся авторам) способ построения фрактальных изображений, как неплоских сечений гиперфрактала. Он позволяет получать как плоские (проекции и развертки), так и объемные фрактальные изображения.

Описаны геометрические модели, разработаны и опробованы алгоритмы построения сферических сечений гиперфрактала на примере Жулиа-Мандельброта: построение простой проекции сферического сечения гиперфрактала, построение 3D-модели и проекции сферического сечения с преобразованием сферы в положение уровня и построение развертки цилиндрической равнопромежуточной проекции секущей сферы. Приведенные алгоритмы могут применяться и к другим итерационным формулам.

Фрактальные изображения и 3*D*-модели, получаемые предлагаемым способом, могут применяться в предметном дизайне (производство бижутерии и предметов декора), а также при разработке компьютерных программ для генерации фрактальных карт.

Литература

1. *Брылкин Ю.В.* Моделирование микро- и наноструктуры поверхности для решения задач газовой динамики и тепломассообмена // Геометрия и графика. – 2018. – №2. – С. 94–99. – DOI: 10.12737/article_5b55a695093294.45142608
2. *Жихарев Л.А*. Фрактальные размерности // Геометрия и графика. – 2018. – №3. – С. 33–48. – DOI: 10.12737/article_5bc45918192362.77856682
3. *Брылкин Ю.В.* Рационализация алгоритма моделирования поверхности методом броуновского движения по критерию минимизации количества итераций // Геометрия и графика. – 2017. – №1. – С. 43–50. – DOI: 10.12737/25123
4. *Локтев А.А.* Использование фракталов в задачах обеспечения информационной безопасности / А.А. Локтев, А.В. Залетдинов. – Вестник Тамбовского университета. Серия «Естественные и технические науки». – 2010. – Т. 15, № 2. – С. 599–604.
5. Фракталы в дизайне [Электронный ресурс]. – URL: https://www.sni-project.ru/blog/196-fraktaly-v-dizajne . – Загл. с экрана (Дата обращения: 11.09.2020)
6. *Трубецков Д.И., Трубецкова Е.Г.* Фрактальное искусство // Известия вузов. ПНД. – 2016. – Т. 24, вып. 6. – С. 84-102. DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-6-84-102
7. *Трубочкина Н.К.* Новый промышленный дизайн и технологии, как результат математическо-компьютерных фрактальных исследований // Качество. Инновации. Образование. – 2012. – Т. 84. № 5. – С. 76–82.
8. *Бойков А.А.* О создании фрактальных образов для дизайна и полиграфии и некоторых геометрических обобщениях, связанных с ними / А.А. Бойков [и др.] // Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации. Материалы VIII Международной научно-практической интернет-конференции, февраль – март 2019 г. – Пермь: ПНИПУ, 2019. – С. 325–339.
9. *Лабуть А.* Фрактальные множества на комплексной плоскости [Электронный ресурс]. – URL: http://digitalphysics.ru/htm/Fraqtalnye_mnozhestva_na_qompleqsnoi_plosqosti.htm . – Загл. с экрана (Дата обращения: 11.09.2020)
10. *Лабуть А.* Снова о многомерности множества Мандельброта–Жюлиа [Электронный ресурс]. – URL: http://www.sciteclibrary.ru/texsts/rus/stat/st2526.htm . – Загл. с экрана (Дата обращения: 11.09.2020)
11. *Пеклич В.А*. Высшая начертательная геометрия. – Москва: АСВ, 2000. – 344 с.
12. *Рыжов Н.Н.* Параметрическая геометрия. – Москва: МАДИ, 1988. – 56 с.
13. *Первикова В.Н.* Чертежи поверхностей n-мерного пространства и их инженерные приложения / В. Н. Первикова, Д. М. Коробова, А. А. Решетникова // Геометрические преобразования и прикладная многомерная геометрия. Труды МАИ. – Москва, 1973. – Вып. 271. – С. 68–86.
14. *Филиппов П.В.* Начертательная геометрия многомерного пространства и ее приложения. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1979. – 280 с.
15. *Бойков А.А.* О построении моделей объектов пространства четырех и более измерений в учебном процессе // Геометрия и графика. – 2018. – Т. 6, № 4. – С. 54–71. – DOI: 10.12737/article_5c21f96dce5de8.36096061