УДК 681.11.054
DOI: 10.12737/article_5a02f9fe97a5a7.40674404

С.И. Досько, В.В. Киренков, А.А. Молчанов

МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ТЕСТИРУЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Описан метод формирования оптимальных тестирующих воздействий при проведении проверок и экспериментов с динамическими системами при их доводке, диагностике, приемосдаточных испытаниях. В качестве критерия оптимальности используется известный принцип максимума следа информационной матрицы Фишера, который представляет собой осредненный по оцениваемым параметрам критерий достоверности (точности) проведенных оценок.

Ключевые слова: идентификация, входное воздействие, принцип двойственности, теория оптимального управления, след информационной матрицы, динамические системы.

S.I. Dosko, V.V. Kirenkov, A.A. Molchanov

FORMATION METHOD OF OPTIMUM TESTING IMPACT AT DYNAMIC SYSTEMS TESTS

The paper reports the description of the formation method of optimum testing influences in the course of carrying out tests and experiments with dynamic systems, diagnostics, acceptance tests. A problem is posed in the following way: there is assigned a time interval intended for system tests before a mode of its normal operation, a simulator of the system and input effects maximum allowable according to a module. In what way in this time interval, often limited, one should excite a system in order to ensure, in a certain sense, optimum conditions for system identification?

One of possible methods, for the substantiated solution such a problem, based, from the mathematical point of view, on the duality principle of problems of experimental data processing (identification) and problems of optimum management is considered. As a criterion of optimality there is used a well-known principle of maximum of Fisher information matrix trace, which is a criterion of assessments carried out averaged on parameters assessed of reliability.

Particular attention is paid to the identity of methods for the solution of some inverse problems arising at the assessment of test results of complex dynamic systems with classical problems of optimum management theory. In particular, it is shown, in what way a problem of the optimum testing effect formation in the course of active experiments can be solved with the use of the methodology for the solution of optimum management standard problems based on the well-known Pontryagin maximum.

Key words: identification, input action, duality principle, optimum management theory, information matrix trace, dynamic systems.

Введение

Задачам обработки и интерпретации опытных данных, полученных при испытаниях динамических систем, всегда уделялось большое внимание как в теоретическом, так и в практическом плане. Среди этих задач все большее место занимают так называемые обратные задачи [1; 2], одним из возможных путей совершенствования методологии решения которых является привлечение принципа двойственности - методов теории оптимального управления. Основанием для такого подхода является то, что обе задачи (идентификации и управления) преследуют с математической точки зрения идентичную конечную цель - нахождение экстремума квадратичного функционала от каких-то характеристик (обычно невязок) решаемой задачи.

В статье [10] показано, как использование принципа двойственности может способствовать решению одной из типовых обратных задач, возникающих при оценке результатов штатной эксплуатации динамической системы (в режиме пассивного эксперимента). В настоящей статье с этой точки зрения рассматривается один принципиальный вопрос, возникающий и при проведении активного эксперимента. Речь идет о формировании оптимального тестирующего воздействия.

Математические модели объекта контроля и измерений

Традиционная форма математических моделей объектов или процессов, подлежащих испытаниям и последующей идентификации, обычно представляется в следующем виде (форма Коши):

$$\dot{X} \quad \ldots U,F), \tag{1}$$

где *X(t)* - *n*-мерный вектор состояния; *U(t)* - *m*-мерный вектор управления; *F(t)* - *p*-мерный вектор возмущений.

Линеаризация этой модели посредством ее представления в отклонениях от опорного программного движения может быть записана в следующем стандартном, в частности для теории оптимальных процессов, виде:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t)U + D(t)F, \tag{2}$$

где $A(n\times n)$ - квадратная матрица, определяющая изменение состояния нестационарной линейной системы; $B(n\times m)$, $D\ (n\times p)$ - матрицы управляющих U и возмущающих F воздействий соответственно.

Целесообразность перехода от формы (1) к форме (2) обусловлена тем, что для линейных систем разработаны методы решения задач оптимального управления [2-4], охватывающие различные, в том числе и квадратичные, критерии качества.

Уравнение измерений также представляется в традиционной для теории оптимального управления форме:

$$Y(t) = C(t)X + L(t)U + V(t), \tag{3}$$

где $Y(l\times 1)$, $C\ (l\times n)$, $L(p\times r)$ - вектор и матрица измерений соответственно; $V\ (l\times 1)$ – случайный процесс, характеризующий ошибки измерений.

Выбор тестирующего воздействия и решение задачи идентификации

Основной задачей, которая решается в процессе активного эксперимента, является определение фактических значений и отклонений от расчетных значений какого-то комплекса наиболее важных параметров регулятора системы a_i, в частности параметров закона управления.

В такой постановке, помимо решения задачи собственно идентификации, всегда встает и другая упомянутая выше задача: как выбрать тестирующие воздействия, которые с учетом естественных ограничений могли бы обеспечить наилучшие (в каком-то смысле) условия идентифицируемости системы? Эта задача может решаться с привлечением методов теории оптимальных процессов и теории чувствительности [2; 4; 5]. Пусть имеется динамическая система, уравнение которой в матрично-векторной форме по аналогии с (1) может быть представлено в следующем виде:

$$\dot{X} = f(X, a, U, F), \tag{4}$$

где $a[m\times 1]$ - упомянутый выше вектор оцениваемых параметров.

В заданном интервале времени (0; *T*) система подвергается испытаниям, в процессе которых на ее вход подается внешнее тестирующее воздействие *F(t)*. В ходе испытаний производится регистрация части фазовых координат в соответствии с уравнением измерений (3):

$$Y(t) = C(t)X + V(t). \tag{5}$$

Решение задачи идентификации подразумевает в общем случае оценку параметров, входящих в правую часть соотношения (4), в частности неизвестных элементов вектора a и входных воздействий F. Условия проведения активного эксперимента методически облегчают эту задачу, ибо предполагают задание в качестве *F(t)* известных, заранее выбранных тестирующих воздействий. С учетом этого задача идентификации элементов вектора a может решаться следующим образом.

Первый этап – ее линеаризация относительно опорного решения, имеющего место при номинальных значениях элементов a^o, а именно:

$$X[a^0+\Delta a, F(t)\} = X[a^0, F(t)] + W(t)\Delta a, \tag{6}$$

где *Δa[m×1]* - вектор отклонений оцениваемых параметров; *W(t)(n×m)* - так называемая матрица коэффициентов чувствительности, определяемая по правилам дифференцирования матриц и векторов следующим образом:

$$W(t) = \frac{\partial X}{\partial a} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial a_2}\cdots\frac{\partial x_1}{\partial a_m} \\ \frac{\partial x_2}{\partial a_1}\,\frac{\partial x_2}{\partial a_2}\cdots\frac{\partial x_2}{\partial a_m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial a_1}\,\frac{\partial x_n}{\partial a_2}\cdots\frac{\partial x_n}{\partial a_m} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Элементы матрицы чувствительности *W(t)* могут быть получены после этого [5] путем дифференцирования по *a* соотношения (4):

$$\dot{V} \qquad \partial x\,\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial x}W(t) + \frac{\partial f}{\partial a}. \tag{8}$$

Таким образом, соотношения (4) при $a = a^o$ и (8) при $W(0)=0$ определяют значения функций чувствительности при внешнем воздействии *F(t)*. В частности, при условии $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ они могут быть сведены к типовому операторному уравнению, рассматриваемому при классических методах решения обратных задач [1].

Полученные соотношения позволяют свести исходную задачу в разряд линейных задач, для которых разработаны и исследованы методы идентификации, дающие несмещенные и эффективные оценки. В предположении гауссовского характера распределения ошибок измерений *V(t)* решение для вектора *Δa* ищется исходя из условия *min* квадратичного функционала, имеющего вид

$$I = \int_0^T [(Y(t) - C(t)X(f,a^0) - C(t)W(t)\Delta a)^T (Y(t) - C(t)X(f,a^0) - C(t)W(t)\Delta a)]dt, \tag{9}$$

где *T* (в подынтегральном выражении и далее) - символ транспонирования. Минимизация функционала (9) по *Δa* приводит к следующему матрично-векторному уравнению для определения составляющих этого вектора:

$$\int_0^T [W(t)^T C(t)^T C(t) W(t)]dt\Delta a - \int_0^T [W(t)^T C(t)\Delta Y]dt = 0, \tag{10}$$

где $\Delta Y = Y(t) - C(t)X(f,a^0)$ - вектор отклонений фактических результатов измерений от модельных значений, соответствующих $\Delta a = 0$.

Уравнение (10) представляет собой алгебраическое уравнение *m*-го порядка относительно составляющих вектора *Δa* ($\Delta a_1, \Delta a_2 \ldots \Delta a_M$), решение которого в общем виде записывается следующим образом:

$$\Delta a = B^{-1}\Delta Y, \tag{11}$$

где $B(m\times m) = \int_0^T [W(t)^T \cdot C(t)^T C(t) W(t)]dt$ - так называемая матрица идентификации (иногда ее называют информационной матрицей Фишера).

Элементы этой матрицы определяются характером изменения по времени и величиной функций чувствительности *W(t),* определяемых входными воздействиями *F(t).* В условиях активного эксперимента имеется возможность так формировать эти воздействия, чтобы обеспечить в каком-то смысле оптимальные условия для определения элементов вектора *Δa.* В качестве этих оптимальных условий целесообразно выбрать такие, которые обеспечивают минимально возможные ошибки определения элементов этого вектора.

Как следует из соотношения (11), эти погрешности могут характеризоваться диагональными элементами матрицы B^{-1}. Критерий, к которому нужно стремиться, состоит в том, чтобы сумма всех диагональных членов этой матрицы была минимальной в рамках дозволенных пределов изменения входных воздействий *F(t).* Известно, что сумма диагональных элементов квадратной матрицы (или ее след *Sp*) равна сумме собственных чисел этой матрицы. Если обозначить собственные числа матрицы *B* через $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_м$, то след матрицы B^{-1} и условия оптимальности запишутся следующим образом:

$$SpB^{-1} = \sum_{1}^{m} \frac{1}{\lambda_i} = \min. \qquad (12)$$

При решении аналогичных задач условие минимизации следа обратной матрицы B^{-1} заменяют более простым условием - максимизации следа матрицы *B*, т.е:

$$SpB = \sum_{1}^{m} \lambda_i = \max. \qquad (13)$$

Условие (13) при решении задач идентификации трактуется как условие максимума следа информационной матрицы Фишера [2].

Меандровый сигнал и принцип максимума Л.С. Понтрягина

Рассмотренный подход позволяет свести исходную задачу идентификации к задаче выбора оптимального управления процессами, использовав классический принцип максимума Л.С. Понтрягина [4]. Из этого принципа следует, что оптимальное входное воздействие *F(t)* для рассматриваемой задачи имеет кусочно-постоянный (меандровый) вид, который может быть представлен следующим образом:

$$F(t) = CsignA(\psi), \qquad (14)$$

где *C* - модуль предельно допустимого входного воздействия; $signA(\psi)$ - знак функции вспомогательных переменных *Ψ* метода Л.С. Понтрягина $A(\psi)$.

Общий вид оптимального тестирующего воздействия (в соответствии с (14)) при продолжительности испытаний *T* приведен на рисунке.

Аналитических методов определения времени изменения знака вспомогательных переменных *Ψ* не существует. Поэтому даже для сравнительно простых систем это возможно только применением приближенных численных методов.

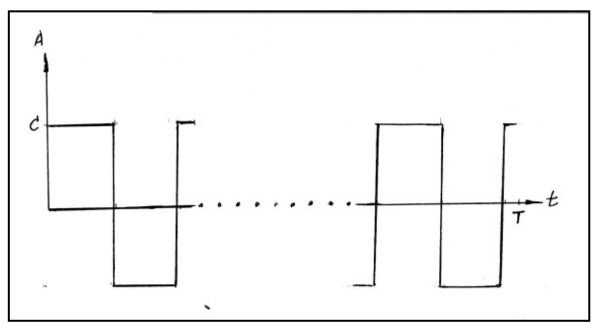

Рис. Оптимальное (по Л.С. Понтрягину) тестирующее воздействие

Модельный пример

Ниже приведен модельный пример формирования оптимального тестирующего воздействия для некой механической системы. Пусть аналоговая передаточная функция между входным воздействием (сила, момент) X и выходом - перемещением (угловым или линейным) (*W=Y/X)* принята в форме

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}. \qquad (15)$$

Расчетные значения параметров *k*, *T* и *ξ*, реализуемые этим набором, составляли 1,0; 0,051с и 0,256. Используя методологию

Z-преобразования, перейдем от аналоговой формы (15) к системе разностных уравнений

$$y[i] = z_1 x[i-1] + z_2 x[i-2] + z_3 y[i-1] + z_4 y[y-2] \qquad (16)$$

со значениями коэффициентов z_1=0,379, z_2=0,319, z_3=0,908, z_4=-0,605. При моделировании амплитуда тестирующего воздействия вида (14) принималась равной C = ±1, шаг по времени ΔT= 0,05с, интервал тестирования с учетом ограничения n=30 (1,5 с).

Эффективность того или иного воздействия оценивалась, как указано во введении, посредством сравнения коэффициентов влияния ошибок измерений D ($K_i = \frac{\Delta z_i}{D}$) на точности оценок. Результаты расчетов для случая классического гармонического воздействия с собственной частотой Ω = 3 Гц, меандровых воздействий различного числа переключений N и ступенчатого N=0 приведены в таблице. Во всех случаях амплитуда входного воздействия ограничивалась значением C = ±1.

Таблица

Коэффициенты влияния ошибок измерений K_i

Коэффициенты разностных уравнений						
	Гармоническая функция Ω = 3 Гц	Меандровое воздействие				
		N=0	N=1	N=2	N=3	N=4
Z_1	0,938	1,001	0,454	0,346	0,269	0,316
Z_2	1,312	1,538	0,693	0,525	0,399	0,443
Z_3	0,602	1,732	0,734	0,537	0,537	0,586
Z_4	0,709	1,086	0,491	0,363	0,369	0,372

Данные таблицы свидетельствуют о том, что для выбранного примера - системы с передаточной функцией (15) и интервалом тестирования 1,5 с - оптимальным входным сигналом является меандровый сигнал с числом переключений N=3. Достигаемые при этом точности оценок параметров закона управления (коэффициентов z_i) существенно выше традиционных тестирующих сигналов - как в виде гармонической функции, так и в виде единичного ступенчатого воздействия.

Заключение

В статье обращается внимание на идентичность методов решения некоторых обратных задач, возникающих при оценке результатов испытаний сложных динамических систем, с классическими задачами теории оптимального управления. В частности, показано, как задача формирования оптимальных тестирующих воздействий в процессе активных экспериментов может решаться с использованием методологии решения типовых задач оптимального управления на основе известного принципа максимума Л.С. Понтрягина. Не исключено, что найдутся и другие обратные задачи, где окажется возможным эффективное использование методов оптимального управления. Рассмотренная в статье методология позволяет сделать объективное суждение о близости теоретически оптимальной и находящейся в эксплуатации реальной системы контроля, включая её тестирующие воздействия, и целесообразности в этом отношении её доработки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. - М.: Наука, 1974.
2. Брайсон, А. Прикладная теория оптимальных процессов / А. Брайсон, Хо Ю-ши. - М.: Мир, 1972.
3. Ройтенберг, Я.И. Автоматическое управление / Я.И. Ройтенберг. - М.: Наука, 1978.
4. Понтрягин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.]. - М.: Физматгиз, 1961.
5. Розенвассер, Е.Н. Чувствительность систем управления / Е.Н. Розенвассер, Р.М. Юсупов. - М.: Наука, 1981.
6. Киренков, В.В. Типовые обратные задачи и методы их решения при оценке результатов испытаний изделий ракетно-космической техники / В.В. Киренков, С.И. Досько // Ракетно-космическая техника: сб. науч. тр. РКК «Энергия» им. С.П. Королева. - 2014. - Сер. XII. - Вып. 3. - С. 99.
7. Калман, Р. Очерки по математической теории систем / Р. Калман [и др.]. - М.: Мир, 1971.
8. Тихонов, А.Н. Численные методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, А.В. Гончарский [и др.]. - М.: Наука, 1990.
9. Киренков, В.В. Решение обратных задач оценки испытаний изделий ракетно-космической техники с использованием методов теории оптимального управления / В.В. Киренков, В.Г. Микитенко // Космическая техника и технологии. - 2015. - № 4 (11). - С. 74-81.
10. Досько, С.И. Использование принципа двойственности при решении обратных задач оценки результатов испытаний / С.И. Досько, В.В. Киренков, В.Г. Микитенко // Вестник Брянского государственного технического университета. - 2017. - № 2 (55).

1. Tikhonov, A.N. *Methods for Incorrect Problem Solution* / A.N. Tikhonov, V.Ya. Arsenin. – M.: Science, 1974.
2. Braison, A. *Applied Theory of Optimum Processes* / A. Braison, Ho Yu-shi. – M.: Mir, 1972.
3. Roitenberg, Ya.I. *Automated Management* / Ya.I. Roitenberg. – M.: Science, 1978.
4. Pontryagin, L.S. *Mathematical Theory of Optimum Processes* / L.S. Pontryagin [et al.]. – M.: Physmathgiz, 1961.
5. Rosenwasser, E.N. *Management System Sensitivity* / E.N. Rosenwasser, R.M. Yusupov. – M.: Science, 1981.
6. Kirenkov, V.V. Standard inverse problems and methods for their solution at test results assessment of missile-space engineering / V.V. Kirenkov, S.I. Dosko // *Missile-Space Engineering; Proceedings of Korolev MSC "Energy"*. – 2014. – Series XII. – Edition #. – pp. 99.
7. Kalman, R. *Sketches on Mathematical Theory of Systems* / R. Kalman [et al.]. – M.: Mir, 1971.
8. Tikhonov, A.N. *Numetical Methods of Incorrect Problems Solution* / A.N. Tikhonov, A.V. Goncharsky [et al.]. – M.: Science, 1990.
9. Kirenkov, V.V. Inverse problems solution of missile-space product tests using methods of optimum management theory / V.V. Kirenkov, V.G. Mikitenko // *Space Engineering and Technologies*. – 2015. – No.4 (11). – pp. 74-81.
10. Dosko, S.I. Duality principle use at solution of test result inverse problems / S.I. Dosko, V.V. Kirenkov, V.G. Mikitenko // *Bulletin of Bryansk State Technical University*. 2017. – No.2 (55).

Статья поступила в редколлегию 5.05.17.
Рецензент: д.т.н., профессор ИКТИ РАН Шептунов С.А.

Сведения об авторах:

Досько Сергей Иванович, к.т.н., ст. науч. сотрудник Института конструкторско-технологической информатики РАН, тел. 8-977-494-71-15, e-mail: dosko@mail.ru.
Киренков Вениамин Васильевич, к.т.н, вед. науч. сотрудник РКК «Энергия» им. С.П. Королева, тел.: 8-916-352-45-03.
Молчанов Александр Александрович, аспирант Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, НТИМИ, научный сотрудник, тел.: 8-925-053-63-52, e-mail: Alexandrmolchanov@inbox.ru.

Dosko Sergey Ivanovich, Can. Eng., Senior researcher, Institute of Design-Technological Informatics of RAS, e-mail: dosko@mail.ru
Kirenkov Veniamin Vasilievich, Can. Eng., Leading researcher of Korolev MSC "Energy", phone: 8-916-352-45-03.
Molchanov Alexander Alexandrovich, Post graduate student of Bauman State Technical University of Moscow,
e-mail: Alexandrmolchanov@inbox.ru.