

## Машиностроение и машиноведение

УДК 531/534+519.6

DOI: [10.12737/article\\_59cd76c49ad923.69778681](https://doi.org/10.12737/article_59cd76c49ad923.69778681)

М.В.Зернин

### ГИБРИДНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ У ВЕРШИН ТРЕЩИН В ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛАХ

Сформулированы требования в конечном элементу для моделирования сингулярного поля напряжений у вершины трещины. Приведены основные соотношения для аппроксимации искомым параметров в двадцатиузловом конечном элементе трехмерной задачи. Кроме совместных функций формы введены также сингулярные функции напряжений и перемещений. Получены выражения для матриц жесткости такого гибридного элемента.

На серии тестовых примеров продемонстрирована достаточная точность таких гибридных аппроксимаций при сравнительно крупных конечноэлементных сетках.

**Ключевые слова:** коэффициент интенсивности напряжений, метод конечных элементов, сингулярные функции, гибридные аппроксимации, гибридный конечный элемент, тестовые задачи.

M.V. Zernin

### HYBRID FINITE ELEMENT FOR SIMULATION OF STRESS STATE AT CRACK TOP IN 3D BODIES

The peculiarities of a stress field and deformations at a crack top located in 3D bodies at complex stressed state are characterized. The requirements to a final element for the simulation of a singular field of stresses at the crack top are formulated. Basic correlations for the approximation of these parameters in a twenty-unit finite element of a three-dimensional problem are shown. Besides joint functions of the form there are introduced also singular functions of stresses

and movements. Expressions for rigidity matrices of such a hybrid element are obtained. By a set of test examples there is shown a sufficient accuracy of such hybrid approximations at comparatively large finite element grids.

**Key words:** stress intensity factor, finite element method, singular functions, hybrid finite element, hybrid approximations, test problems.

#### Постановка задачи

Практически всегда в реальных материалах имеются исходные трещиноподобные дефекты. Рассмотрим участок упругого тела с фронтом трещины, который находится в условиях сложного напряженного состояния (СНС). При СНС требуется определять все три моды (три типа трещин на рис. 1а-в), различающиеся видами деформации трещины [1; 2], в соответствии с которыми ставят нижний индекс при коэффициенте интенсивности напряжений (КИН). Тип I - нормальный отрыв или разрыв ( $K_{II} = K_{III} = 0, K_I \neq 0$ ). Перемещения берегов трещины происходят вдоль нормали к исходной поверхности трещины. Тип II - поперечный сдвиг ( $K_I = K_{III} = 0, K_{II} \neq 0$ ). Тип III - продольный сдвиг ( $K_I = K_{II} = 0, K_{III} \neq 0$ ).

В механике разрушения необходимо находить решение соответствующей задачи теории упругости для тела с разрезами

нулевой толщины. Такие задачи относятся к сингулярным краевым задачам, т.е. к граничным задачам с особыми точками. К особым точкам относится точка вершины трещины (рис. 2а, б), поскольку решения теории упругости для напряжений и деформаций в этой точке стремятся к бесконечности (рис. 2в). Результаты решения задачи о напряженно-деформированном состоянии (НДС) у вершины трещины нормального отрыва (рис. 1а) можно представить в виде [1; 2]

$$U_i = \frac{K}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} F_i(\mu, \theta); \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta); \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \varphi_{ij}(\theta), \quad (3)$$

где  $r$  и  $\theta$  - полярные координаты (рис. 1г и 2а);  $U_i$  - компоненты поля перемещений;  $\sigma_{ij}$  - компоненты поля напряжений (рис.

1г);  $\varepsilon_{ij}$  - компоненты поля деформаций;  $G$  - модуль упругости при сдвиге;  $\mu$  - коэффициент Пуассона.

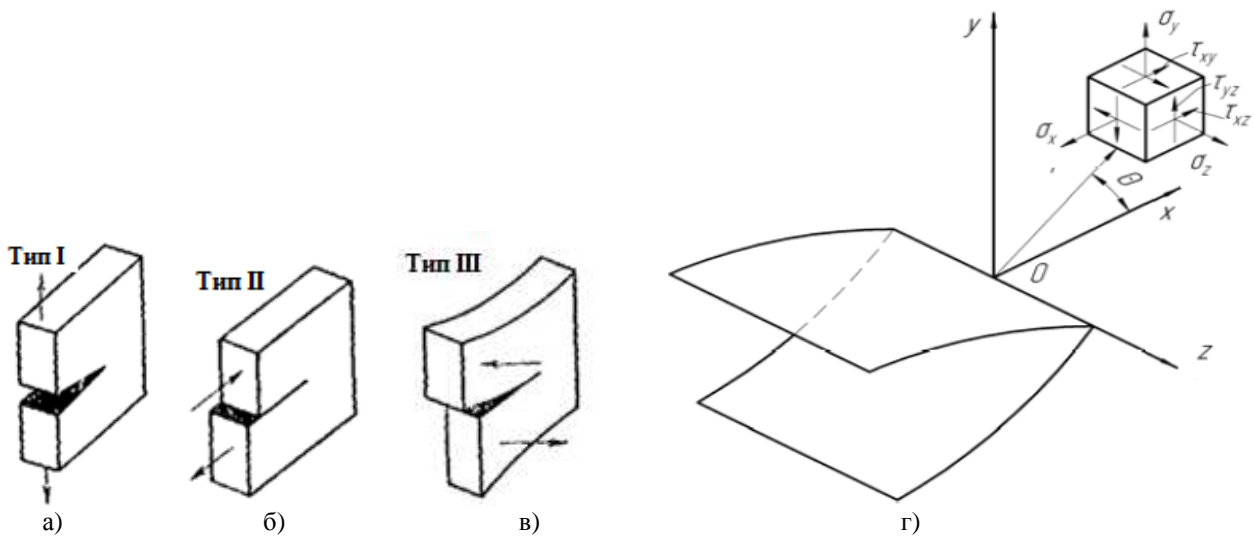


Рис. 1. Схематическое изображение трещины нормального отрыва (а), поперечного сдвига (б), продольного сдвига (в) и компоненты напряжений вблизи вершины трещины в трехмерном представлении (г)

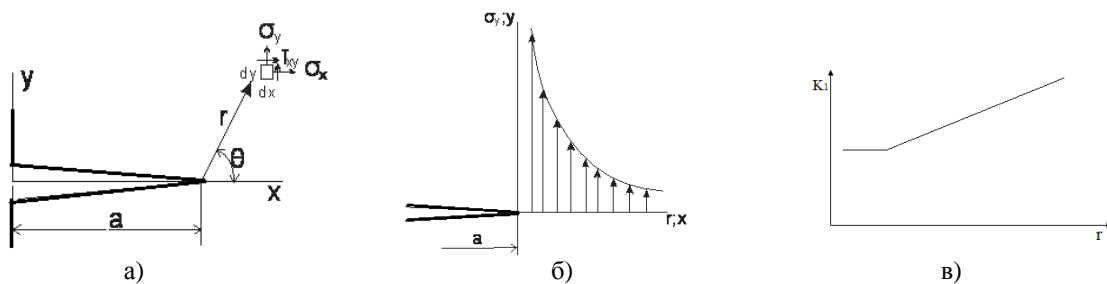


Рис. 2. Схематическое двухмерное изображение трещины нормального отрыва (а), асимптотический график напряжений вблизи вершины трещины (б) и график расчетных значений коэффициента интенсивности напряжений (г)

При решении упругой задачи о НДС у вершины трещины получаем бесконечное значение напряжений (рис. 2б). Формулы (1-3) являются асимптотическими и отображают НДС в малой локальной зоне вблизи вершины трещины. Значение КИН определяет величину перемещений, напряжений и деформаций в малой зоне вблизи фронта трещины. Считается, что различные трещины оказывают одинаковый разрушающий эффект, если значения КИН одинаковы.

Эту важнейшую характеристику (КИН) можно определить прямым моделированием: определить численно (например по методу конечных элементов (МКЭ)) характеристики НДС у вершины трещины и

затем вычислить КИН по любой из формул (1-3). Нами реализованы подобные прямые методы определения КИН [3-5] в сравнительно простых трехмерных деталях с одной и двумя [4] трещинами. При этом для вычисления КИН можно брать любую из точек, входящих в зону асимптоты (рис. 2б). На наш взгляд, целесообразно вычислять КИН в нескольких точках этой зоны. Стабильность значения КИН может являться критерием достаточной точности решения задачи по определению соответствующего поля. А участок стабильного значения КИН является участком, в пределах которого локализуется возмущенное поле НДС у вершины трещины (рис. 2в). В промышленных программных пакетах реа-

лизованы такие методы определения КИН [6; 7]. Прямое моделирование НДС у вершины трещины возможно по двум расчетным схемам: трещину, расположенную в плоскости симметрии детали, можно моделировать как бесконечно-острый разрез; в более общих случаях трещина моделируется как разрез конечной ширины. Примеры таких вариантов моделирования приведены в наших статьях [3-5].

Поскольку зависимости для напряжений и перемещений у вершины трещины определенного типа при разных нагрузках отличаются только КИН, то возможно применение принципа суперпозиции решений, если общую нагрузку можно представить как сумму нескольких более простых нагрузок. Поэтому в случае СНС выражения для напряжений и перемещений у вершины трещины получают как суперпозицию выражений для трех типов нагружения трещин: растяжения, сдвига и среза (рис. 1а-в).

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \sum_{n=1}^{III} K_n f_{ijn}(\theta); \quad (4)$$

$$u_{ij} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sum_{n=1}^{III} K_n \varphi_{ijn}(\theta). \quad (5)$$

Таким образом, если разделить внешнюю нагрузку на три составляющие,

соответствующие трем типам трещин (рис. 1а-в), то определить напряжения у вершины трещины не составляет труда. Обратную задачу – определение  $K_I$ ,  $K_{II}$  и  $K_{III}$  по известному полю напряжений у вершины трещины - решить сложнее.

Назовем еще причины, из-за которых методы прямого моделирования применять не рационально. Так, в нашей монографии [8] охарактеризованы трещины, возникающие при контактном нагружении. Часто в зоне контактирования появляется большое количество различным образом ориентированных трещин, влияющих друг на друга. При прямом моделировании НДС в таких зонах необходимо использовать очень мелкую сетку конечных элементов (КЭ) практически во всей зоне. Трудоемкость решения задачи становится непомерно большой. Кроме того, размеры КЭ могут оказаться сопоставимыми с размерами компонентов структуры материала, и применимость гипотезы об однородности материала становится неочевидной. В таких случаях размеры КЭ должны быть достаточно большими, чтобы применять континуальные модели сплошной среды, и одновременно достаточно малыми, чтобы моделировать локальные поля НДС с высокими градиентами.

### Применение сингулярных КЭ для моделирования НДС у вершины трещины

По сравнению с прямым моделированием НДС у вершины трещины более экономичными являются варианты использования КЭ с корневой особенностью у вершины трещины. Рассмотрим аппроксимацию перемещений в трехмерных двадцатиузловых конечных элементах [9; 10]. Перемещения в любой точке КЭ можно выразить через перемещения его узлов:

$$\{U(\{x_j\})\} = \sum_{i=1}^n N_i(\{x_j\})\{q_i\}, \quad (6)$$

где  $N_i(\{x_j\})$  - функции формы КЭ;  $\{q_i\} = \{q_{i1} \dots q_{ni}\}$  - векторы узловых перемещений;  $n$  - число узлов элемента.

Вводятся криволинейные координаты  $p_j (j=1 \dots m)$ , которые являются безразмерными переменными, изменяющимися на отрезке  $[-1; +1]$ , причем экстремальные значения эти координаты имеют на границах элемента. На рис. 3а, б в качестве примера изображены прямоугольная и криволинейная системы координат, а также компоненты векторов поля перемещений и узловых степеней свободы произвольного по форме элемента объемного тела.

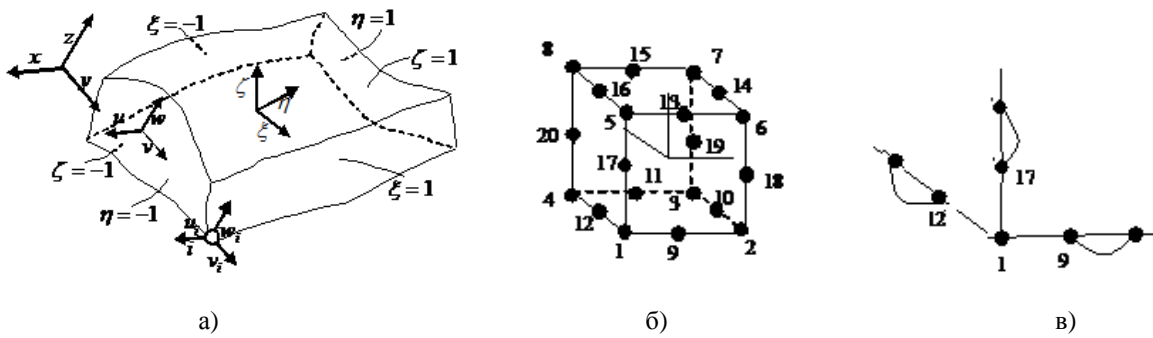


Рис. 3. Системы координат и перемещения в двадцатиузловом конечном элементе произвольной формы: а – глобальная, б – локальная; в - смещенные узлы в сингулярном конечном элементе

Каждая из функций формы  $N_i (i = 1 \dots n)$  принимает значение, равное единице, в  $i$ -м узле и нулевые значения в остальных узлах элемента. Основное свойство этих функций заключается в их совместности, которая означает, что у элементов с общей границей перемещения во всех ее точках будут совпадать, так как узловые перемещения этих элементов одни и те же. Различают линейные (1-го порядка), квадратичные (2-го порядка), кубические (3-го порядка) КЭ - в зависимости от степени полинома, реализуемого в функциях формы.

Если в КЭ второго порядка средние узлы расположить не на середине кубика (как показано на рис. 3б), а сдвинуть их на  $1/4$  стороны, то вблизи узла (узел №1 на рис. 3в) появится особая сингулярная зона [11; 12], такая же, как на графике 2б. Это довольно простой способ моделирования сингулярного поля напряжений у вершины трещины, и он реализован во многих промышленных программных пакетах [7; 8]. Но среди КЭ с сингулярным полем НДС наиболее эффективен, на наш взгляд, вариант применения гибридного КЭ [11].

**Гибридный конечный элемент**

На рис. 4 изображен фрагмент фронта трещины и примыкающие к нему гибридные КЭ четырех типов. Там же показана

на локальная система координат, связанная с фронтом трещины.

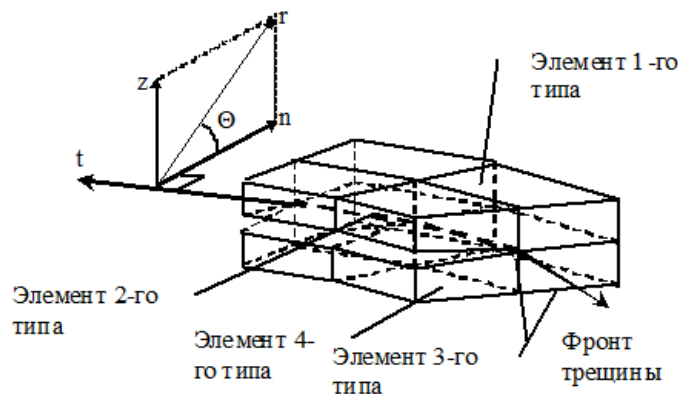


Рис. 4. Гибридные конечные элементы разных типов

Асимптотические решения, описывающие перемещения вблизи фронта трещины и соответствующие им сингулярные напряжения, выраженные в ортогональной

системе координат  $(n, t, z)$ , которая связана с фронтом трещины (изображен жирной пунктирной линией на рис. 4), выглядят следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} u_n \\ u_z \\ u_t \end{Bmatrix} = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \begin{bmatrix} \frac{K_I}{8} \left[ (5-8\nu) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{8} \left[ (9-8\nu) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ \frac{K_I}{8} \left[ (7-8\nu) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{8} \left[ (-3+8\nu) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \\ K_{III} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} = U_s K; \tag{7}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{nz} \\ \sigma_{zt} \\ \sigma_{nt} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} K_I \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left( 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left( 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) \\ 2\nu \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{bmatrix} + K_{II} \begin{bmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left( 2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ -2\nu \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left( 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) \end{bmatrix} \\ K_I \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \sigma_s K. \tag{8}$$

Фактически формулы (7) и (8) являются конкретным видом формул (4) и (5) для системы координат  $(n, t, z)$ .

Гибридный метод допускаемых напряжений является вариантом построения матриц жесткости элементов, основанным на обобщении принципа минимума дополнительной энергии. Сущность этого метода состоит в задании уравновешенного поля напряжений  $\{s\}$  внутри элемента через обобщенные параметры  $\{\beta\}$  и  $\{K\}$  с одновременным заданием совместного поля перемещений через узловые перемещения  $\{q\}$ .

Пусть перемещения на границе элемента определяются выражением

$$\tilde{u} = Lq. \tag{9}$$

Для этого заданного граничного перемещения нам необходимо определить поле напряжений внутри элемента, которое было бы уравновешенным и соответствовало бы совместному полю деформации

$$\sigma_{rx} = [1 \quad y \quad z \quad y^2 \quad y \cdot z \quad z^2 \quad y^3 \quad y^2 \cdot z \quad y \cdot z^2 \quad z^3 \quad y^4 \quad y^3 \cdot z \quad y^2 \cdot z^2 \quad y \cdot z^3 \quad z^4].$$

Таким образом, используется полный полином четвертой степени. Для остальных компонент нормальных напряжений выражения аналогичны. Касательные на-

пряжений. Пусть поле напряжений внутри элемента задается в следующем виде:

$$\sigma = \sigma_r \beta + \sigma_s K, \tag{10}$$

где  $\beta$  - неопределенные параметры, а  $K$  - вектор коэффициентов интенсивности напряжений. Поле напряжений  $ss$ , определяемое формулами Ирвина (4), является уравновешенным и соответствует совместному полю деформаций. Для выражения  $\sigma_r \beta$  также необходимо обеспечить выполнение зависимостей (8).

Для этого необходимо выполнение условий Ладыженской - Бабушки - Бреucci [11], которые требуют, чтобы число параметров для двадцатиузлового элемента было 54. Выберем  $\sigma_r$  с учетом всех этих требований. Например, для компоненты  $\sigma_x$  выберем представление в виде полинома, включающего следующие степени декартовых координат:

пряжения аппроксимируются так:  $\sigma_{r,xy} = [1 \quad z \quad z^2]$ . Матрица  $\sigma_r$  выглядит следующим образом:

$$\sigma_r = \begin{bmatrix} \sigma_{rx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{ry} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{rz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{rxy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{rxz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{rzy} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Дополнительно необходимо учесть граничные условия на поверхности трещины:

$$n_j \sigma_{ij} = 0, \quad (12)$$

где  $n_j$  – направляющие косинусы.

Если на поверхности трещины отсутствуют напряжения, то нежелательно рассматривать (12) в качестве естественных граничных условий модифицированного принципа минимума дополнительной

энергии, так как это ухудшит точность. Необходимо обеспечить удовлетворение этих условий априори. Однако если усилия на поверхности трещины не нулевые, то можно оставить эти условия в качестве естественных граничных условий. Итак, если условия (12) удовлетворяются априори, функционал, представляющий дополнительную энергию, может быть записан таким образом:

$$\pi_c = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_r \beta + \sigma_s K)^T D^{-1} (\sigma_r \beta + \sigma_s K) dV - \int_S (\sigma_r \beta + \sigma_s K)^T \tilde{n} dS, \quad (13)$$

где  $n$  – матрица направляющих косинусов.

В соответствии с теоремой о дивергенции перепишем второе слагаемое выражения (13) через объемный интеграл:

$$\int_S (\sigma_r \beta + \sigma_s K)^T \tilde{n} dS = \int_V (\sigma_r \beta + \sigma_s K)^T B q dV. \quad (14)$$

Выполним упрощение выражения (13) с учетом (14), вводя следующие обозначения:

$$A_{rr} = \int_V \sigma_r^T D^{-1} \sigma_r dV; \quad A_{rs} = \int_V \sigma_r^T D^{-1} \sigma_s dV; \quad A_{ss} = \int_V \sigma_s^T D^{-1} \sigma_s dV; \quad A_{rB} = \int_V \sigma_r^T B dV; \\ A_{sB} = \int_V \sigma_s^T B dV.$$

Получаем:

$$\pi_c = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_r \beta + \sigma_s K)^T D^{-1} (\sigma_r \beta + \sigma_s K) dV - \int_V (\sigma_r \beta + \sigma_s K)^T B q dV = \\ = \frac{1}{2} \beta^T A_{rr} \beta + K^T A_{rs} \beta + \frac{1}{2} K^T A_{ss} K - \beta^T A_{rB} q - K^T A_{sB} q. \quad (15)$$

Дифференцируем (15) по  $\beta$ :

$$\frac{d\pi_c}{d\beta} = A_{rr} \beta + A_{rs} K - A_{rB} q = 0.$$

Получаем:

$$\beta = A_{rr}^{-1} (A_{rB} q - A_{rs} K). \quad (16)$$

Подставляем (16) в (15) и получаем:

$$\pi_c = \frac{1}{2} (q^T A_{Br} - K^T A_{sr}) A_{rr}^{-1} A_{rr} A_{rr}^{-1} (A_{rB} q - A_{rs} K) + K^T A_{sr} A_{rr}^{-1} (A_{rB} q - A_{rs} K) + \\ + \frac{1}{2} K^T A_{ss} K - q^T A_{Br} A_{rr}^{-1} (A_{rB} q - A_{rs} K) - K^T A_{sB} q. \quad (17)$$

Дифференцируем (17) по  $q$  и  $K$ :

$$\frac{d\pi_c}{dq} = A_{Br} A_{rr}^{-1} A_{rB} q - A_{Br} A_{rr}^{-1} A_{rs} K + A_{Br} A_{rr}^{-1} A_{rs} K - 2A_{Br} A_{rr}^{-1} A_{rB} q +$$

$$+ A_{Br} A_{rr}^{-1} A_{rs} K - A_{Bs} K = -A_{Br} A_{rr}^{-1} A_{rB} q + A_{Br} A_{rr}^{-1} A_{rs} K - A_{Bs} K;$$

$$\frac{d\pi_c}{dK} = A_{sr} A_{rr}^{-1} A_{rB} q - A_{sB} q + A_{ss} K - A_{sr} A_{rr}^{-1} A_{rs} K.$$

Получаем:

$$K_{11} = A_{Br} A_{rr}^{-1} A_{rB}; \quad (18)$$

$$K_{12} = -A_{Br} A_{rr}^{-1} A_{rs} + A_{Bs};$$

$$K_{21} = -A_{sr} A_{rr}^{-1} A_{rB} + A_{sB}; \quad (19)$$

$$K_{22} = -A_{ss} + A_{sr} A_{rr}^{-1} A_{rs}.$$

Формируем из (18) и (19) матрицу жесткости гибридного совместного КЭ:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

### Тестирование гибридного конечного элемента

Под руководством автора инженеры В.В.Лебков и С.Н.Осипов программно реализовали и протестировали такой КЭ [13; 14]. В качестве простейшего тестового примера была выбрана полоса со сквозной краевой трещиной (рис. 5). Полоса дискретизировалась двумя гибридными конечными элементами первого и второго типов

соответственно. Исследовалось напряженно-деформированное состояние полосы под воздействием равномерно распределенной нагрузки. Исходные данные следующие:  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ;  $\mu = 0,3$ ;  $W = 2,5 \text{ мм}$ ;  $H = 4 \text{ мм}$ ;  $A = 2 \text{ мм}$ ;  $q = 1000 \text{ Н/м}^2$ .

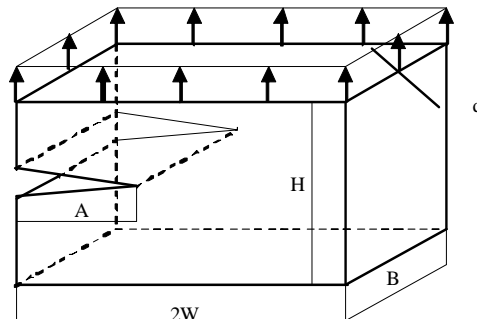


Рис. 5. Схема полосы с краевой трещиной

В результате расчета получили значение коэффициента интенсивности напряжений  $K_I = 2,51 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ . Аналитическое значение для КИН в этой задаче взято из справочника [15], оно составляет  $K_I = 2,47 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ . Таким образом, даже при использовании всего двух гибридных конечных элементов относительная погрешность составляет 1,33 %.

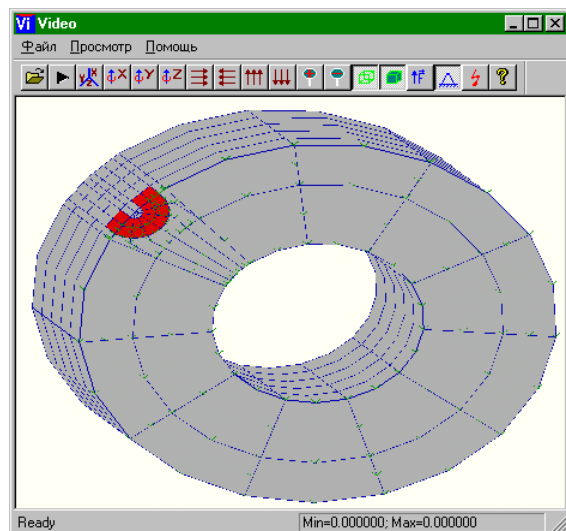
Этот подход применялся для определения КИН в двухслойном сталебаббитовом образце, используемом для исследования развития трещин в баббитовых слоях [16; 17]. Образец представляет собой двух-

слойную трубу. Внутренний радиус  $r_0 = 3 \text{ мм}$ , радиус стыка баббитового слоя и подложки  $r_1 = 7 \text{ мм}$ , внешний радиус баббитового слоя  $r_2 = 9 \text{ мм}$ . Длина рабочей части образца составляет 100 мм. Образец нагружался на стенде МУИ-6000 по схеме изгиба с вращением [16; 17]. Начальные трещины появлялись на поверхности баббитового слоя и имели полуэллиптическую форму.

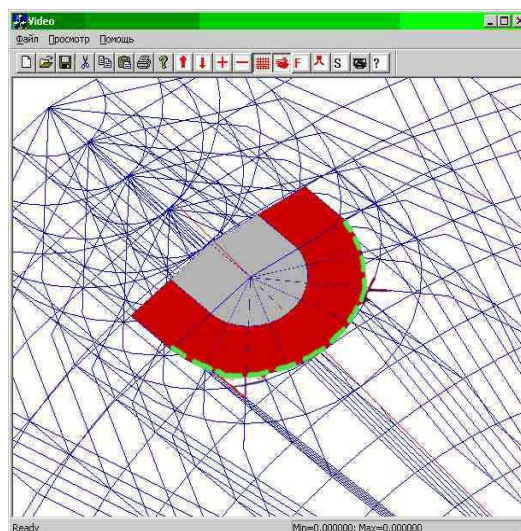
Для моделирования трещин в баббитовом слое осуществлялась авторазбивка [17] фрагмента образца с трещиной (рис. 6а). Полуэллиптическая трещина в бабби-

товом слое имеет один радиус, равный 0,8 мм, второй - 1,8 мм. Нагрузка, приложенная к объекту, вращается вокруг продольной оси образца, что необходимо для моделирования условия испытания. Фронт

трещины окружается гибридными элементами (рис. 6б). Так как образец имеет плоскость симметрии, то рассматривается его половина.



а)



б)

Рис. 6. Сетка конечных элементов для сталебронзового образца стенда МУИ-6000 (а) и увеличенный фрагмент этой сетки вблизи фронта трещины (б)

Исходные данные:  
 $E_{\text{подложки}} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ;  $E_{\text{бронзы}} = 0,6 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ;  
 $\mu = 0,3$ ;  $M_{\text{и}} = 1000 \text{ Нм}$ .

Ранее были выполнены приближенные расчеты КИН [17]. Результаты расчетов сведены в таблицу, на основании которой построены графики зависимости  $K_{I_{\text{max}}} / M$  от длины трещины (рис. 7). Все

данные приведены для случая, когда максимальные усилия действуют в плоскости, которая проходит через точку выхода трещины на поверхность образца. Изменяется только один радиус полуэллиптической трещины, второй остается постоянным и равен 1,8 мм.

Таблица

Результаты расчетов КИН

Радиус трещины $R_{\text{трещины}}$ , мм	Приближенное значение [17] $K_{I_{\text{max}}} / M$ , мм <sup>-2,5</sup>	Расчетное значение $K_{I_{\text{max}}} / M$ , мм <sup>-2,5</sup>	Относительная погрешность $\delta$ , %
0	0	0	0
0,1	0,290	0,282	2,75
0,2	0,506	0,501	0,98
0,3	0,642	0,658	2,49
0,4	0,725	0,76	4,82
0,6	0,9	0,985	9,4
0,8	1,0	1,113	13,3
1,0	1,112	1,212	8,99
1,2	1,165	1,23	5,57
1,5	1,204	1,315	9,21
1,8	1,25	1,324	5,92



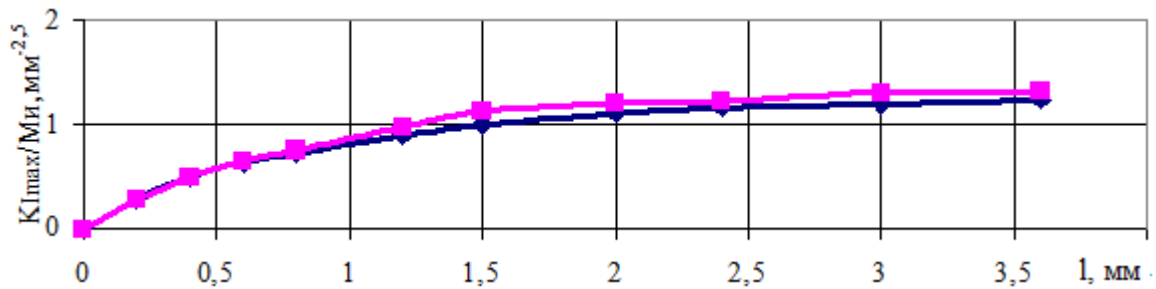


Рис. 7. Зависимость  $K_{I_{max}} / M$  от длины  $l$  трещины образца для стэнда МУИ-6000 с размерами  $r_0=3$  мм,  $r_1=7$  мм,  $r_2=9$  мм: —◆— - приближенное решение по [17]; —■— - МКЭ

Полученные результаты свидетельствуют о том, что применение совместных гибридных конечных элементов позволяет рассчитывать детали с трехмерными де-

### Выводы

Построен двадцатиузловой конечный элемент с гибридными аппроксимациями для моделирования сингулярных полей НДС у вершин трещин в трехмерных те-

фектами произвольной формы с достаточной точностью при сравнительно крупных конечноэлементных сетках.

лах. Тестовые примеры продемонстрировали эффективность применения такого конечного элемента.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брок, Д. Основы механики разрушения / Д. Брок. - М.: Высш. шк., 1980. - 368 с.
2. Черепанов, Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов. - М.: Наука, 1974. - 640 с.
3. Зернин, М.В. Трещиностойкость баббита Б83 / М.В. Зернин // Вестник Брянского государственного технического университета. - 2017. - № 1. - С. 91-101.
4. Зернин, М.В. Напряженно-деформированное состояние баббитовых слоев с трещинами / М.В. Зернин // Вестник Брянского государственного технического университета. - 2017. - № 1. - С. 102-111.
5. Зернин, М.В. Напряженное состояние в антифрикционном слое подшипника скольжения при наличии трещин / М.В. Зернин // Вестник Брянского государственного технического университета. - 2017. - № 2. - С. 93-103.
6. Морозов, Е.М. ANSYS в руках инженера / Е.М. Морозов. - М.: Ленанд, 2010. - 456 с.
7. Рудаков, К.Н. UGS Femap 9.3. Геометрическое и конечноэлементное моделирование конструкций / К.Н. Рудаков. - М.: ДМК Пресс, 2009. - 296 с.
8. Морозов, Е.М. Контактные задачи механики разрушения / Е.М. Морозов, М.В. Зернин. - 2-е изд. - М.: Либроком, 2010. - 544 с.
9. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация: [пер. с англ.] / О. Зенкевич, К. Морган. - М.: Мир, 1986. - 318 с.
10. Шабров, Н.Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей / Н.Н. Шабров. - Л.: Машиностроение, 1983. - 212 с.
11. Атлури, С. Вычислительные методы в механике разрушения: [пер. с англ.] / С. Атлури, Ф. Эрдоган, А. Кабаяси, Л. Фрэйи, М. Нагаки, Т. Нисиока, Дж. Ньюман, И. Раджу. - М.: Мир, 1990. - 392 с.
12. Сиратори, М. Вычислительная механика разрушения: [пер. с англ.] / М. Сиратори, Т. Миёси, Х. Мацусита. - М.: Мир, 1986. - 334 с.
13. Лебков, В.В. Определение коэффициентов интенсивности напряжений методом конечных элементов / В.В. Лебков // Динамика, прочность и надежность транспортных машин: сб. науч. тр. / под ред. Б.Г. Кеглина. - Брянск: БГТУ, 2002. - С. 107-112.
14. Осипов, С.Н. Определение коэффициентов интенсивности напряжений методом гибридных конечных элементов / С.Н. Осипов // Вестник Брянского государственного технического университета. - 2007. - № 4. - С. 80-83.
15. Мураками, М. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений / М. Мураками. - М.: Мир, 1986. - 334 с.
16. Кузьменко, А.Г. Закономерности развития трещин в баббитах / А.Г. Кузьменко, М.В. Зернин. - Брянск: БГТУ, 1983. - 83 с. - Деп. в ВИНТИ 9.09.83, № 5280-83.
17. Зернин, М.В. Развитие независимых усталостных трещин в баббитовых слоях, нанесенных на подложку / М.В. Зернин // Динамика, прочность и надежность транспортных машин: сб. науч. тр. / под ред. Б.Г. Кеглина. - Брянск: БИТМ, 1990. - С. 119-131.

1. Broyek, D. *Fundamental of Fracture Mechanics* / D. Broyek. – М.: Higher school, 1980. – pp. 368.
2. Cherepanov, G.P. *Brittle Failure Mechanics* / G.P. Cherepanov. – М.: Science, 1974. – pp. 640.
3. Zernin, M.V. Crack resistance of babbitt B83 / M.V. Zernin // *Bulletin of Bryansk State Technical University*. – 2017. – No. 1. – pp. 91-101.
4. Zernin, M.V. Stress-strain state of babbitt layers with cracks / M.V. Zernin // *Bulletin of Bryansk State Technical University*. – 2017. – No. 1. – pp. 102-111.
5. Zernin, M.V. Stress state in anti-friction layer of friction bearing at fracture presence / M.V. Zernin // *Bulletin of Bryansk State Technical University*. – 2017. – No. 2. – pp. 93-103.
6. Morozov, E.M. *ANSYS in Engineer's Hands* / E.M. Morozov. – М.: Lenand, 2010. – pp. 456.
7. Rudakov, K.N. *UGS Femap 9.3. Geometrical and Finite Element Simulation of Structures* / K.N. Rudakov. – М.: DMK Press, 2009. – 2009. – pp. 296.
8. Morozov, E.M. *Contact Problems of Fracture Mechanics* / E.M. Morozov, M.V. Zernin. – 2-d Edition – М.: Librokom, 2010. – pp. 544.
9. Zenkevich, O. *Finite Elements and Approximation*: [transl. from Engl.] / O. Zenkevich, K. Morgan. – М.: Mir, 1986. – pp. 318.
10. Shabrov, N.N. *Finite Element Method in Parts Computation for Heat-Engines* / N.N. Shabrov. – L.: Mechanical Engineering, 1983. – pp. 212.
11. Atlury, S. *Computer Methods in Fracture Mechanics*: [transl. from Engl.] / S. Atlury, F. Erdogan, A. Kabayasi, L. Froen, M. Nagasaki, T. Nisioka, J. Newman, I. Radju. – М.: Mir, 1990. – pp. 392.
12. Siratori, M. *Computer Fracture Mechanics*: [transl. from Engl.] / M. Siratori, T. Miyosi, H. Matsushita. – М.: Mir, 1986. – pp. 334.
13. Lebkov, V.V. Definition of stress intensity factors by finite element method / V.V. Lebkov // *Dynamics, Strength and Reliability of Transport Vehicles: Proceedings* / under the editorship of B.G. Keglina. – Bryansk: BSTU, 2002. – pp. 107-112.
14. Osipov, S.N. Definition of stress intensity factors by method of hybrid finite elements / S.N. Osipov // *Bulletin of Bryansk State Technical University*. – 2007. – No. 4. – pp. 80-83.
15. Murakami, M. *Reference Book on Stress Intensity Factors* / M. Murakami. – М.: Mir, 1986. – pp. 334.
16. Kuzmenko, A.G. *Regularities in Fractures Development in Babbitts* / A.G. Kuzmenko, M.V. Zernin. – Bryansk: BSTU, 1983. – pp. 83. – Dep. in VINITI 9.09.83, No. 5280-83.
17. Zernin, M.V. Development of independent fatigue cracks in babbitt layers applied upon substrate / M.V. Zernin // *Dynamics, Strength and Reliability of Transport Vehicles: Proceedings* / under the editorship of B.G. Keglina. – Bryansk: BITM, 1990. – pp. 119-131.

Статья поступила в редколлегию 13.06.17.

Рецензент: д.т.н., профессор Брянского государственного технического университета  
Кеглин Б.Г.

#### Сведения об авторах:

**Зернин Михаил Викторович**, к.т.н., доцент кафедры «Информатика и программное обеспечение»

**Zernin Mikhail Victorovich**, Can. Eng., Assistant Prof. of the Dep. "Informatics and Software", Bryansk State Technical University, e-mail: [zerninmv@mail.ru](mailto:zerninmv@mail.ru).

Брянского государственного технического университета, e-mail: [zerninmv@mail.ru](mailto:zerninmv@mail.ru).