УДК 532.5+628.33

DOI: 10.12737/719

Исследование асимптотических свойств модели гидродинамической стадии эволюции процесса классификации в аппаратах циклонного типа

Г.П. Павлихин, *профессор, д-р техн. наук*
В.А. Львов, *старший преподаватель*
А.В. Крохина, *аспирант*
О.Г. Калугина, *аспирант*

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

e-mail: e9@bmstu.ru

Ключевые слова:
гидроциклон,
инжектор,
классификация суспензий,
вероятностно-статистический расчет.

В статье рассмотрены особенности практического применения вероятностно-статистической модели гидродинамической стадии эволюции процесса классификации в цилиндроконических гидроциклонах с дополнительным инжектором. Приведено выражение для функции распределения частиц твердой дисперсной фазы в классификаторе в зависимости от длительности их пребывания в аппарате, его конструктивных и технологических характеристик. В рамках обоснованных допущений для рассматриваемого процесса классификации получены стационарные решения кинетического уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. При описании изменения характеристик разделения суспензий в классификаторах предложено применять семейство трехпараметрических кривых, параметры которого не только зависят от гидродинамических особенностей потоков внутри аппарата, но и определяются относительными величинами интенсивности классификационного воздействия и центробежных сил по сравнению с интенсивностью случайных воздействий.

Одним из методов улучшения характеристик разделения суспензий по крупности дисперсной фазы в гидроциклонах является дополнительная инжекция части исходной суспензии в аппарат [1,2]. Для решения задачи об описании поведения частиц дисперсной фазы малоконцентрированной суспензии в управляемом процессе классификации был использован подход, основанный на применении вероятностно-статистических методов описания. При этом считалось, что при постоянном расходе Q разделяемой дисперсной системы, поступающей в цилиндроконический гидроциклон, кинетическая стадия эволюции рассматриваемого процесса закончилась еще при вводе разделяемой дисперсной системы в аппарат. Определяя стохастические составляющие процесса на гидродинамической стадии эволюции системы, полагали, что в классификаторе имеет место квазиустановившееся стохастическое движение частиц дисперсной фазы, которое соответствует теории случайных марковских процессов.

После введения цилиндрической системы координат, связанной с осью симметрии классификатора, учитывая быстрое завершение кинетической стадии эволюции системы, считали, что на гидродинамической стадии эволюции системы тангенциальные скорости дисперсионной среды и частиц дисперсной фазы в гидроциклоне практически совпадают. Скорость радиального движения стоксовских безынерционных сферических частиц дисперсной фазы массы $m_ч$ и диаметра $d_ч$, в первом приближении, имела вид:

$$u = u' + \frac{d_ч^2}{18\mu_0}(\rho_ч - \rho_c)\omega^2(R)\cdot R, \qquad (1)$$

где $\rho_ч$ и ρ_c — плотность частиц и среды соответственно,), $\omega(R)$ — угловая скорость вращения, μ_0 — динамическая вязкость дисперсионной среды, R — текущий радиус вращения $u' = u'(Q, R)$ — средняя скорость радиального движения дисперсионной среды.

Воздействие дополнительного инжектируемого потока с расходом Q_{in} учитывали, вводя в выражение (1) некую дополнительную составляющую средней скорости радиального движения дисперсионной среды $u'' = u''(Q_{in}, R)$. Тогда уравнение (1) можно записать в виде:

$$u = u' + u'' + \frac{d_ч^2}{18\mu_0}(\rho_ч - \rho_c)\omega^2(R)\cdot R. \qquad (2)$$

Для определения зависимости $\omega^2 = \omega^2(R)$ воспользуемся известным законом распределения окружных скоростей w' в гидроциклоне по радиусу вращения [3]:

$$w'R^n = w_0' R_0^n = Qk_Q R_0^n / S_{вх} = D = \text{const}, \qquad (3)$$

где $w_0' = w'(R_0)$ — окружная скорость на входе в классификатор, R_0 — радиус цилиндрической части классификатора, $S_{вх}$ — площадь входного патрубка, $k_Q = k_Q(Q)$ — постоянный коэффициент, учитывающий изменение средней скорости потока на входе в классификатор, n — некоторый постоянный показатель.

Поскольку $w' = \omega R$, то обращаясь к рассмотрению периферийных слоев дисперсионной среды в классификаторе, где $n \in [0{,}5;\ 1]$ [3], с учетом (3) имеем $\omega = w_0' R_0^n / R^{n+1} = D / R^{n+1}$ и после подстановки в (2) получаем:

$$u = \frac{dR}{dt} = u' + u'' + \frac{d_ч^2}{18\mu_0}(\rho_ч - \rho_c)\frac{D^2}{R^{2n+1}} = \\ = u' + u'' + \frac{C_ч}{R^{2n+1}} D^2, \qquad (4)$$

где $C_ч = \frac{d_ч^2}{18\mu_0}(\rho_ч - \rho_c)$ – постоянная величина для данного диаметра частиц, t – время.

Определим среднюю скорость радиального движения дисперсионной среды $u' = u'(R)$ в виде:

$$u' = -Qk_\gamma \sin\gamma_0 / (LR) = -A_0 / R, \qquad (5)$$

где $Q = \text{const}$; γ_0 — половинный угол раскрытия конусной части классификатора; $k_\gamma = k_\gamma(Q)$ — постоянный коэффициент, определяющий осредненное эффективное отклонение нисходящего потока от стенок цилиндрической части аппарата; L – длина цилиндрической рабочей части классификатора; $A_0 = Qk_\gamma \sin\gamma_0 / L$ — постоянная величина, характеризующая радиальный эффективный расход, приходящийся на единицу длины цилиндрической рабочей части.

Представим дополнительное воздействие инжектируемого потока в виде:

$$u'' = -Q_{in}k_{in} / (LR) = -A_{in} / R, \qquad (6)$$

где Q_{in} = const — расход потока разделяемой дисперсной системы, инжектируемого в классификатор; $k_{in} = k_{in}(Q, Q_{in})$ — постоянный коэффициент, определяющий эффективность классификационного воздействия, с учетом конструктивного исполнения инжектора, $A_{in} = Q_{in}k_{in} / L$ — постоянная величина, характеризующая инжектируемый эффективный расход, приходящийся на единицу длины цилиндрической рабочей части классификатора.

Подставив выражения (5) и (6) в уравнение (4), получаем:

$$u = \frac{dR}{dt} = \frac{C_ч}{R^{2n+1}}D^2 - \frac{A_0}{R} - \frac{A_{in}}{R} = \frac{C_ч}{R^{2n+1}}D^2 - \frac{(A_0 + A_{in})}{R}. \qquad (7)$$

Анализ уравнения (7) показывает, что при выбранной обобщенной координате R, процессы классификационного воздействия инжектируемого потока и радиального движения дисперсионной среды подобны в том смысле, что $uR = \text{const}$.

Обозначая $R^{n+1} = S(R)$ — новая обобщенная координата, для новой средней скорости движения частиц W' в пространстве S с учетом подобия вида $W'S = \text{const}$ получаем:

$$W' = \frac{dR^{n+1}}{dt} = \frac{dS}{dt} = -\left(\frac{(A_0 + A_{in})(n+1)}{S^{(1-n)/(n+1)}} - \frac{C_ч(n+1)}{S}D^2\right) = \\ = -(A_\Sigma S^{\frac{n-1}{n+1}} - \frac{C_\Sigma}{S}), \qquad (8)$$

где $A_\Sigma = (n+1)(A_0 + A_{in})$ и $C_\Sigma = (n+1)C_ч D^2$ — некоторые постоянные величины.

Здесь наряду со средней скоростью процесса W' по-прежнему присутствует случайная составляющая этой скорости $\tilde{W}$, влиянием которой нельзя пренебречь. Тогда уравнение (8) имеет вид:

$$W = W' + \tilde{W} = -(A_\Sigma S^{\frac{n-1}{n+1}} - \frac{C_\Sigma}{S}) + \tilde{W}. \qquad (9)$$

Поскольку величина $\tilde{W}$ в уравнении (9) обусловлена наличием случайных сил, распределение частиц дисперсной фазы в радиальном направлении можно характеризовать лишь статистически, например с помощью функции плотности распределения $f = f(S, t)$.

Будем считать постоянными во времени средние скорости движения частиц $W' = W'(S)$ и стационарность случайных возмущений, интенсивность которых охарактеризуем с помощью параметра $B = B(S)=$ const в пространстве S. Тогда для описания гидродинамической стадии эволюции системы в пространстве S можно воспользоваться кинетическим уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова [4] (далее уравнение ФПК) в виде:

$$\frac{\partial f(S,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial S}(W'(S)f(S,t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S^2}(B(S)f(S,t)). \quad (10)$$

Обозначив $B/2 = b_0$, вводя безразмерную координату $x = S/S_0$, получаем:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(k\cdot x^{\frac{n-1}{n+1}} - \frac{c}{x})f(x,t)\right] + b\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}, \quad (11)$$

где $S_0 = R_0^{n+1}$ — постоянная величина, а $k = A_\Sigma / S_0^{\frac{2}{n+1}}$, $c = C_\Sigma / S_0^2$, $b = b_0 / S_0^2$ — постоянные коэффициенты, характеризующие интенсивность классификационного воздействия, центробежных сил и случайных возмущений, соответственно.

При решении уравнения (11) воспользуемся в качестве начального условия выражением:

$$f(x,0) = f_0(x) \quad (12)$$

и условием нормировки функции $f(x,t)$:

$$\int_0^\infty f(x,t)dx = 1. \quad (13)$$

Последнее условие показывает, что функция $f(x,t)$ должна быть ограниченной на интервале $(0, \infty)$, не иметь сингулярности в нуле и удовлетворять условию $f \underset{x\to\infty}{\to} 0$.

Можно показать [5], что для предельного случая $n=1$ функции вида

$$\left\{x^{\frac{\Theta}{2}} e^{-\frac{mx}{2}}\left(\frac{\Theta\cdot m}{(\Theta+2i)}x\right)^{\frac{\Theta}{2}} e^{-\frac{\Theta\cdot m}{2(\Theta+2i)}x} L_i^{(\Theta-1)}\left(\frac{\Theta\cdot m}{(\Theta+2i)}x\right)\times \exp\left(-\frac{k^2(\Theta+i)}{b(\Theta+2i)^2}i\cdot t\right)\right\};\ i=0,1,2,\ldots;$$

будут частными решениями уравнения (11), где $L_i^{(\Theta-1)}\left(\frac{\Theta\cdot m}{(\Theta+2i)}x\right)$ — обобщенный многочлен Лагерра, степени i и порядка $(\Theta-1)$ [6], $\Theta = \frac{c}{b}$ и $m = \frac{k}{b}$. Тогда общее решение этого уравнения для предельного случая $n=1$ может быть представлено в виде:

$$f(x,t) = \left\{x^{\frac{\Theta}{2}} e^{-\frac{mx}{2}}\sum_{i=0}^{i=\infty}\left(\frac{\Theta\cdot m}{(\Theta+2i)}x\right)^{\frac{\Theta}{2}} e^{-\frac{\Theta\cdot m}{2(\Theta+2i)}x}\times\right.$$
$$\left.\times C_i L_i^{(\Theta-1)}\left(\frac{\Theta\cdot m}{(\Theta+2i)}x\right)\exp\left(-\frac{k^2(\Theta+i)}{b(\Theta+2i)^2}i\cdot t\right)\right\}, \quad (14)$$

где C_i — постоянные, которые следует искать из начальных условий (12) и условий нормировки (13), используя свойства решений и функций, включая свойства специальных функций.

Мы получили в виде (14) искомое выражение для функции предельного распределения $f(x,t)$. Это выражение позволяет найти зависимость вида распределения стоксовских безынерционных сферических частиц массы $m_ч$ и диаметра $d_ч$ в пространстве безразмерной координаты $x = (R/R_0)^2$ цилиндрической рабочей части классификатора радиуса R_0 от длительности пребывания t в ней и конструктивных параметров аппарата, с учетом расходных характеристик и свойств разделяемой дисперсной системы.

Использование выражения (14) не тривиально и в инженерной практике может вызывать большие затруднения. Поэтому необходимо ввести дополнительные обоснованные допущения, которые позволят существенно упростить дальнейшие исследования и расчеты, а также рассмотреть более общий случай протекания процесса классификации при $n \neq 1$. Для упрощения вида полученной функции предельного распределения $f(x,t)$ обратимся к рассмотрению сомножителей $T(t) = \exp\left(-\frac{k^2(\Theta+i)}{b(\Theta+2i)^2}i\cdot t\right) = \exp\left(-\mathrm{K}_i\cdot i\cdot t\right)$, входящих в состав выражения (14). Влияние аналогичных сомножителей $\exp\left(-\mathrm{K}\cdot i\cdot t\right)$, но при $\mathrm{K} = \mathrm{const}$, на вид функций распределения для схожих диффузионных моделей различных явлений переноса, описываемых с помощью обобщенных многочленов Лагерра, исследовали многие авторы [7]. При этом было установлено, что с необходимой для инженерных расчетов точностью при $\mathrm{K}\cdot t \approx\geq 3$ вид функций распределения $f(x,t)$ не зависит от времени t и практически не отличается от предельного стационарного распределения $f_\infty(x)$, т.е. имеет место:

$$f(x,t) \cong \lim_{t\to\infty} f(x,t) = f_\infty(x). \quad (15)$$

Другими словами, можно считать, что для моментов времени $t_\infty \approx\geq \frac{3}{\mathrm{K}}$ вид распределения $f(x,t)$ не зависит от времени и справедливо $f(x,t) = f_\infty(x)$.

Среднее время пребывания частицы в цилиндрической рабочей части классификатора $\tilde{t}$ можно оценить с помощью выражения:

$$\tilde{t} = \int_0^\infty t f(t) dt = V / (Q + Q_{in}), \qquad (16)$$

где $f(t)$ — функция распределения по длительности пребывания частиц в рабочей части классификатора; $V = \pi R_0^2 L$ — объем цилиндрической рабочей части классификатора; $(Q + Q_{in})$ — полный расход разделяемой дисперсной системы. Для циклонных классификаторов, имеющих практическое значение, величину $\tilde{t}$ согласно (16) можно оценить на уровне не выше нескольких секунд ($\tilde{t}$ ~ 0,1…10 с). Величину $K_i = -\dfrac{k^2(\Theta+i)}{b(\Theta+2i)^2}$ можно оценить по порядку на уровне $K_i \sim 10^3 \ldots 10^8$ с$^{-1}$, так как её составляют сомножители $\dfrac{k^2}{b}$ и $\dfrac{(\Theta+i)}{(\Theta+2i)^2}$, первый из которых можно оценить на уровне ~ $10^3 \ldots 10^8$ с$^{-1}$, а второй — на уровне не выше нескольких единиц. Соответственно, величины $t_\infty \approx\geq \dfrac{3}{K_i}$ имеют порядок на уровне не более $t_\infty \sim 10^{-2}$, и неравенство $\tilde{t} >> t_\infty$ выполняется для любых практически значимых классификаторов.

Представленные оценки позволяют сделать вывод, что для определения изменения характеристик разделения циклонных классификаторов вполне обоснованно применять предельное стационарное распределение $f_\infty(x)$, это можно проверить экспериментально.

Предельное стационарное распределение позволяет существенно упростить решение (14), представив его в виде аналитического выражения (гамма-распределения) для предельного случая (15):

$$f_\infty(x) = C_0 x^\Theta e^{-mx} = C_0 x^{\frac{c}{b}} e^{\frac{k}{b}x}, \qquad (17)$$

где

$$C_0 = \frac{m^{\Theta+1}}{\Gamma(\Theta+1)}. \qquad (18)$$

Из (17) и (18) следует, что в процессе классификации через некоторое время после ввода разделяемой дисперсной системы в аппарат устанавливается предельное стационарное распределение $f_\infty(x)$, вид которого не зависит от начального распределения $f(x,0) = f_0(x)$. При этом слева от моды (при $x \to 0$) предельное стационарное распределение ведет себя, как степенная функция ~ x^Θ, а справа от моды (при $x \to \infty$) — как экспоненциальная функция ~ e^{-mx}.

Распределение (17) одномодальное, с абсциссой моды:

$$x_m = \frac{\Theta}{m} = \frac{c}{k}. \qquad (19)$$

С практической точки зрения соотношение (19) весьма полезно, поскольку в пространстве безразмерной координаты x не только устанавливает взаимосвязь между коэффициентами c и k, характеризующими интенсивность центробежных сил и классификационного воздействия, но и наделяет их отношение наглядным физическим смыслом. Более того, соотношение (19) позволяет сделать вывод, что положение абсциссы моды x_m распределения (17) в пространстве безразмерной координаты x не зависит от интенсивности случайных возмущений b.

Вернемся к рассмотрению уравнения (11), оно также допускает весьма наглядную интерпретацию. Его можно записать в виде, аналогичном виду обычного уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} J(x,t) = 0,$$

где $J(x,t) = -\left[(k \cdot x^{\frac{n-1}{n+1}} - \frac{c}{x}) f(x,t) + b \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \right]$ — плотность соответствующего потока.

Для стационарного состояния $\dfrac{\partial f}{\partial t} = -\dfrac{\partial J}{\partial x} = 0$ и $J(x) = J_\infty = \text{const}$, что позволяет записать:

$$x \frac{df_{\infty,n}(x)}{dx} = -(m \cdot x^{\frac{2n}{n+1}} - \Theta) f_{\infty,n}(x) - \frac{J_\infty}{b} \cdot x. \qquad (20)$$

Перед нами линейное уравнение первого порядка вида: $f_2(x) U'_x = f_1(x) U + f_0(x)$. Последнее уравнение имеет решение: $U = C'_1 e^F + e^F \int e^F \dfrac{f_0(x)}{f_2(x)} dx$, где $F(x) = \int \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} dx$. Тогда решение уравнения (20) можно представить в виде:

$$f_{\infty,n}(x) = e^F \left(C'_1 - \int e^{-F} \frac{J_\infty}{b} dx \right),$$

где

$$F(x) = -\int (m \cdot x^{\frac{n-1}{n+1}} - \frac{\Theta}{x}) dx = -m \cdot \frac{(n+1)}{2n} \cdot x^{\frac{2n}{n+1}} + \\ + \ln x^\Theta + \ln C'_0,$$

а C'_0, C'_1 — некоторые постоянные.

В результате получаем:

$$f_{\infty,n}(x) = C_0' x^{\Theta} \exp\left(-\frac{m(n+1)}{2n}\cdot x^{\frac{2n}{(n+1)}}\right)\times$$
$$\times\left(C_1' - C_0'\frac{J_\infty}{b}\int x^{-\Theta}\exp\left(\frac{m(n+1)}{2n}\cdot x^{\frac{2n}{(n+1)}}\right)dx\right). \qquad (21)$$

В наиболее общем виде процедура определения вида полученного стационарного распределения $f_{\infty,n}(x)$ сводится к определению представленного в выражении (21) интеграла, исследованию его свойств и определению постоянных. Однако в рассматриваемом случае данная процедура может быть существенно упрощена. Для этого необходимо сопоставить распределение (21) с распределением (17), принимая во внимание, что последнее есть его предельный случай (при $n=1$).

Очевидно, что в условиях статистического равновесия $J_\infty = 0$ распределения (21) и (17) совпадают. С физической точки зрения, для стационарного распределения условие $J_\infty = 0$ эквивалентно допущению о постоянстве не только полного количества частиц данного размера в цилиндрической рабочей части классификатора, но и относительного количества частиц данного размера в каждом рассматриваемом интервале $(x, x+dx)$. В противном случае при $J_\infty \neq 0$ в стационарных условиях происходит либо непрерывное накопление частиц данного размера в цилиндрической рабочей части классификатора с последующей его забивкой, либо их непрерывное удаление, в количестве, превышающем их поступление и приводящее к полному отсутствию частиц данного размера в цилиндрической рабочей части аппарата. И то и другое явно противоречит сделанным допущениям, законам сохранения и имеющимся экспериментальным данным.

Все это позволяет сделать важный практический вывод, что для обеспечения стационарных условиях работы классификатора плотность соответствующего потока частиц любого размера $d_{ч,j}$ в пространстве x должна быть равна нулю $J(x,t) = J(x) = J_\infty = 0$. Полагая, что $J_\infty = 0$, $\alpha = 2n/(n+1)$ и $m' = m/\alpha$, из (21) получаем:

$$f_{\infty,n}(x) = C_{0,n}\cdot x^{\Theta}\exp\left(-\frac{m(n+1)}{2n}\cdot x^{\frac{2n}{(n+1)}}\right) =$$
$$= C_{0,n}\cdot x^{\Theta} e^{-m'' x^{\alpha}}, \qquad (22)$$

где

$$C_{0,n} = \frac{\alpha\cdot m'^{\frac{\Theta+1}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{\Theta+1}{\alpha}\right)}. \qquad (23)$$

Выражения (22) и (23) полностью определяют функцию стационарного распределения $f_{\infty,n}(x)$ в пространстве безразмерных координат x, при $n \in [0{,}5,\ 1]$, в зависимости от коэффициентов k, c и b, характеризующих интенсивность классификационного воздействия, центробежных сил и случайных возмущений, соответственно. При этом определяющими величинами будут не сами коэффициенты k, c и b, а относительные величины (комбинированные комплексы) $m' = \frac{k}{b}\cdot\frac{(n+1)}{2n}$ и $\Theta = \frac{c}{b}$, характеризующие соответственно относительную интенсивность классификационного воздействия и центробежных сил по сравнению с интенсивностью случайных возмущений.

Возникает вопрос, правомерно ли использовать предельное стационарное распределение $f_{\infty,n}(x)$ при оценке изменения характеристик разделения циклонных классификаторов, ведь аналитическое решение уравнения (11) осуществлялось лишь для частного случая $(n=1)$, но не оценивалось, действительно ли этот случай предельный.

Обратимся к рассмотрению этого вопроса, начиная с качественного рассмотрения стадии ввода разделяемой дисперсной системы в цилиндрическую рабочую часть классификатора. На этой стадии в начальный момент времени частицы дисперсной фазы сосредоточены на конце входного патрубка и имеют координату абсциссы моды $x_0 = 1$. Далее, в процессе ввода разделяемой дисперсной системы независимо от величины $n \in [0{,}5,\ 1]$ координата моды меняет свое положение на величину $s_n = |x - x_0|$. Аналогичный процесс происходит и на гидродинамической стадии эволюции процесса классификации до тех пор, пока абсцисса моды не достигнет своего стационарного значения $x_{m,n}$ и не будет выполняться $s_n = s_{\max,n} = |x_{m,n} - x_0|$, для $n \in [0{,}5,\ 1]$.

Распределение (22), как и распределение (17), одномодальное, но с абсциссой моды:

$$x_{m,n} = \left(\frac{\Theta}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{c}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \qquad (24)$$

Соотношение (24) не только устанавливает взаимосвязь между коэффициентами c и k, характеризующими интенсивность центробежных сил и классификационного воздействия, но и показывает, что положение абсциссы моды $x_{m,n}$, как и положение абсциссы моды x_m распределения (17), в пространстве безразмерной координаты x не зависит от интенсивности случайных возмущений b. При этом для $n \in [0{,}5;\ 1)$, $\alpha \in [0{,}66;\ 1)$ и $1/\alpha \in [1{,}5;\ 1)$ выполняется

$x_{m,n} < x_m$ при $\frac{c}{k} < 1$ и $x_{m,n} \geq x_m$ при $\frac{c}{k} \geq 1$. Соответственно имеет место неравенство $s_{\max,n} > s_{\max,1}$ при n ≠ 1. Иными словами, система проходит минимальный эволюционный путь в пространстве безразмерной координаты x при $n = 1$. Поскольку величины абсцисс моды x_m и $x_{m,n}$ не зависят от интенсивности случайных возмущений b, можно считать, что время изменения положения абсцисс моды обратно пропорционально средней скорости соответствующего процесса $W' = -(k - \frac{c}{x})$ и $W'_n = -(kx^{\alpha-1} - \frac{c}{x})$. При этом для $x_0 \to x_m$ и $x_0 \to x_{m,n}$, независимо от положения абсциссы моды, при прочих равных условиях, выполняется $|W'_n| \geq |W'|$. Указанное обстоятельство позволяет предположить, что после ввода разделяемой дисперсной системы в классификатор промежутки времени, за которые устанавливаются стационарные распределения $f_\infty(x)$ и $f_{\infty,n}(x)$, имеют один порядок. Таким образом, в первом приближении сделанные выше оценки и выводы для распределения $f_\infty(x)$ можно распространить и на распределение $f_{\infty,n}(x)$.

Следует особо подчеркнуть, что в общем случае коэффициенты $W'(S)$ и $B(S)$ в уравнении ФПК выражаются через усредненные характеристики процесса и в этом смысле их вычисление может быть сведено к чисто механической задаче. Однако при наличии в процессе классификации состояния статистического равновесия фактически нет необходимости раздельно вычислять коэффициенты $W'(S)$ и $B(S)$ в кинетическом уравнении (10). В частном случае эти коэффициенты можно выразить друг через друга из условия обращения в ноль плотности соответствующего потока в состоянии статистического равновесия. В нашем случае эта задача при необходимости может быть решена путем подстановки того или иного предельного стационарного (равновесного) распределения в уравнение $J_\infty = 0$.

Для определения трансформации предельных стационарных распределений в зависимости от изменения диаметра частиц $d_ч$ и радиуса цилиндрической рабочей части классификатора R перейдем к новой безразмерной переменной $r = R / R_0$. При этом кинетическое уравнение (10) будет справедливо и для функций распределения f по другим переменным, если выполнены условия, лежащие в основе вывода уравнения ФПК – относительно малое изменение величин в элементарных актах взаимодействия и линейность по f интегрального оператора, выражающего изменение функции благодаря этим актам [8]. Применительно к рассматриваемой задаче, процедура определения стационарных функций распределения f по другим переменным может быть существенно упрощена, поскольку не требует составления и решения соответствующего кинетического уравнения.

Действительно, принимая во внимание известные соотношения $f_\infty(x)dx = f_\infty(r)dr$ и $f_{\infty,n}(x)dx = f_{\infty,n}(r)dr$, получаем: $f_\infty(r) = f_\infty(x)\frac{dx}{dr}$ и $f_{\infty,n}(r) = f_{\infty,n}(x)\frac{dx}{dr}$. С учетом обозначений (17), (18) и (22), (23) это позволяет записать:

$$f_\infty(r) = 2C_0 \cdot r^{2\Theta+1} \cdot \exp(-mr^2) \qquad (25)$$

и

$$f_{\infty,n}(r) = (n+1)C_{0,n} \cdot r^{(n+1)\Theta+n} \cdot \exp(-m'r^{2n}) \,. \qquad (26)$$

Выражения (25) и (26) полностью определяют функции стационарных распределений $f_\infty(r)$ и $f_{\infty,n}(r)$ в пространстве безразмерных координат r, при $n = 1$ и $n \in [0{,}5;\ 1]$ соответственно, в зависимости от коэффициентов k, c и b, характеризующих интенсивность классификационного воздействия, центробежных сил и случайных возмущений. При этом определяющими величинами по-прежнему будут не сами коэффициенты k, c и b, а относительные величины (комбинированные комплексы) $m = \frac{k}{b}$, $m' = \frac{k}{b} \cdot \frac{(n+1)}{2n}$ и $\Theta = \frac{c}{b}$, характеризующие соответственно относительную интенсивность классификационного воздействия и центробежных сил по сравнению с интенсивностью случайных возмущений.

Распределения (26) составляют семейство трехпараметрических кривых и формально (после некоторых преобразований) совпадают с универсальными эмпирическими формулами Свенссона–Авдеева [9]. Последние описывают аналитические формы кривых распределения частиц продуктов измельчения. Кроме того, распределения (26) совпадают с аналитическим выражением Шифрина для описания числа капель в облаках в зависимости от их размера. Однако в отличие от последних распределений, которые получены эмпирическим путем, распределения (26) можно отнести к разряду теоретических формул, поскольку они были найдены исходя из вполне конкретных физических предпосылок. Все эти распределения можно рассматривать как обобщение большинства известных эмпирических и теоретических законов статистического распределения случайных величин. В частности, при определенных значениях параметров они могут быть преобразованы в нормальный закон Гаусса, в законы Максвелла, Пирсона и другие статистические закономерности [4], а также в известные формулы Розина–Раммлера, Годена–Андреева–Шумана, Ромашова и т.п. [9].

Распределения (25) и (26) одномодальные, с абсциссой моды:

$$r_m = \left(\frac{2\Theta+1}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{27}$$

и

$$r_{m,n} = \left(\frac{(n+1)\Theta+n}{2nm'}\right)^{\frac{1}{2n}} \tag{28}$$

соответственно.

Выражения (27) и (28) показывают, что положения абсцисс моды распределений (25) и (26) в пространстве безразмерной координаты r зависят не только от относительной интенсивности центробежных сил по сравнению с классификационным воздействием, но и от интенсивности случайных возмущений b, точнее, от относительной интенсивности случайных возмущений по сравнению с интенсивностью классификационного воздействия. При этом вопрос об определяющем влиянии классификационного воздействия и случайных возмущений остается открытым и требует как экспериментальной, так и расчетной проверки с привлечением соответствующего программного обеспечения. Представленное исследование асимптотических свойств модели гидродинамической стадии эволюции процесса классификации в аппаратах циклонного типа позволяет перейти к решению важной прикладной задачи – определению характеристик разделения циклонных классификаторов.

Основные результаты

Теоретически показана возможность описать поведение частиц дисперсной фазы малоконцентрированной суспензии в управляемом процессе классификации на основе стационарных решений кинетического уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова.

Показано, что изменение характеристик разделения суспензий в гидроциклонах с дополнительной инжекцией может быть удовлетворительно описано с помощью семейства трехпараметрических кривых, формально совпадающих с универсальными эмпирическими формулами Свенссона–Авдеева.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пикущак Е.В.* Моделирование седиментации частиц полидисперсной суспензии в классификационных аппаратах. Диссертация … канд. физ.-мат. наук. Томск, 2009. — 120с.
2. *Павлихин Г. П., Крохина А. В., Львов В. А.* Гидравлические характеристики гидроциклона с дополнительным инжектором //Безопасность в техносфере. 2009. № 6. С. 21–25.
3. *Терновский И. Г., Кутепов А. М.* Гидроциклонирование. — М.: Наука, 1994. — 350 с.
4. Справочник по теории вероятностей и математической статистике/ В. С. Королюк и др. — М.: Наука, 1985. — 640 с.
5. *Павлихин Г.П., Крохина А.В., Львов В.А.* Вероятностно-статистическая модель процесса разделения суспензий в гидроциклонах с дополнительной инжекцией //Безопасность в техносфере. 2012. № 2. С. 46–51.
6. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике — М.: Наука, 1977. — 832 с.
7. *Протодьяконов И. О., Богданов С. Р.* Статистическая теория явлений переноса в процессах химической технологии. — Л.: Химия, 1983. — 400 с.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Физическая кинетика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 536 с.
9. *Коузов П. А.* Основы анализа дисперсного состава промышленных пылей и измельченных материалов. — Л.: Химия, 1987. — 264 с.

Research of Asymptotic Properties related to Model of Hydrodynamic Stage of Classification Process Evolution in Cyclonic Type Devices

G.P. Pavlikhin, Doctor of Engineering, Professor, Bauman Moscow State Technical University
V.A. Lvov, Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University
A.V. Krokhina, Postgraduate Student, Bauman Moscow State Technical University
O.G. Kalugina, Postgraduate Student, Bauman Moscow State Technical University

The practical application features of probabilistic and statistical model related to hydrodynamic stage of classification process evolution in the cylinder-conic hydroclones with additional injector are considered in this paper. Expression for the distribution function of firm disperse phase particles in the qualifier is given over time of their stay in the device, as well as depending on its constructive and technical characteristics. The stationary solutions of Fokker-Plank-Kolmogorov kinetic equation have been got for considered process of classification within reasonable assumptions. At the description related to the change of characteristics of division of suspensions in qualifiers the application of three-parametrical curves family which parameters depend not only on hydrodynamic features of streams in the device, but also are defined by relative values of classification influence intensity and centrifugal forces in comparison with intensity of casual influences is offered.

Keywords: hydroclone, injector, classification of suspensions, probabilistic and statistical calculation.