УДК 517.956.35
DOI: 10.12737/23183

И.А. Рудаков

ЗАДАЧА О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУНЫ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ 3-ГО РОДА

Рассмотрена задача о периодических по времени решениях волнового уравнения с переменными коэффициентами общего вида и заданной периодической вынуждающей силой. В случае однородных граничных условий 3-го рода и Дирихле доказано существование счетного числа периодических решений при условии, что нелинейное слагаемое имеет степенной рост без предположения монотонности.

Ключевые слова: волновое уравнение, вариационный метод, возмущение четных функционалов.

I.A. Rudakov

PERIODIC SOLUTIONS PROBLEM OF HETEROGENEOUS STRING FORCED OSCILLATIONS EQUATION WITH BOUNDARY CONDITION OF THE THIRD TYPE

The problem of time periodic solutions of a wave equation with floating factors of a general type and a specified periodic driving force is considered. In case of homogeneous boundary conditions of the third type and Dirichlet the existence of a denumerable number of periodic solutions at the condition that a nonlinear item has a power growth without the assumption of monotony is proved.

Key words: wave equation, variational method, even functional disturbance.

Рассмотрим задачу о периодических решениях волнового уравнения

$$p(x)u_{tt}-(p(x)u_x)_x+g(x,t,u)=f(x,t),\ \ 0<x<\pi,\ \ t\in R; \tag{1}$$

$$u(x,t+T)=u(x,t)\ ,\ \ 0<x<\pi,\ \ t\in R; \tag{2}$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)+hu'_x(\pi,t)=0,\ \ \ t\in R. \tag{3}$$

Здесь h есть положительная константа. Пусть функция $p(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$p(x)\in C^2[0,\pi],\ \ p(x)>0\ \ \ \forall x\in[0,\pi]. \tag{4}$$

Обозначим $\Omega=[0,\pi]\times R\setminus(T\,Z)$, $\eta_p(x)=\frac{1}{2}\frac{p''}{p}-\frac{1}{4}\left(\frac{p'}{p}\right)^2$, $Z_+=N\cup\{0\}$,

$G(x,t,u)=\int\limits_0^u g(x,t,s)ds$, $B=\int\limits_0^\pi \eta_p(x)\,dx+\frac{2}{h}-\frac{p'(\pi)}{p(\pi)}$.

Пусть период T представлен в виде

$$T=2\pi\frac{b}{a},\ \ \ a,b\in N,\ НОД\,(a,b)=1. \tag{5}$$

Для нелинейного слагаемого g потребуем выполнения следующих условий:

$$g\in C(\Omega\times R)\ \text{ и }\ T\text{-периодично по } t; \tag{6}$$

существуют положительные константы C_1,C_2,C_3,C_4 , а также $\mu>2, r\ge 2,\ d\in[\mu-1,\mu)$, такие, что

$$0<\mu G(x,t,u)\le u\,g(x,t,u)\ \ \text{при всех}\ \ (x,t)\in\Omega,\ u\in(-\infty,-r]\cup[r,+\infty); \tag{7}$$

$$C_1\,|\,u\,|^d-C_2\le|\,g(x,t,u)\,|\le C_3\,|\,u\,|^d+C_4\ \ \ \ \forall\,(x,t)\in\Omega,\ u\in R. \tag{8}$$

Следует отметить, что периодическим решениям квазилинейного волнового уравнения с постоянными и переменными коэффициентами посвящена обширная литература [1-13]. Волновое уравнение с переменными коэффициентами исследовалось в работах [1; 8-13]. В ранних статьях [1; 8-12] на коэффициент $p(x)$ накладывалось дополнительное условие, состоящее в том, что $\eta_p(x)$ сохраняет постоянный знак ($\eta_p(x)>0\ \forall x\in[0,\pi]$ в [1; 8-10], $\eta_p(x)<0\ \forall x\in[0,\pi]$ в [11]). В работах [12; 13] доказано существование бесконечного числа периодических решений, если нелинейное слагаемое $g(x,t,u)$ монотонно и имеет степенной рост по u, а функция $\eta_p(x)$ может изменять знак на отрезке $[0,\pi]$. Кроме того, в «суперлинейном» случае в [12; 13] правая часть $f(x,t)$ отсутствует ($f(x,t)\equiv 0$) либо не зависит от t. Основной задачей данной работы является доказательство существования счетного числа периодических решений задачи (1)-(3) при выполнении условий (4)-(8) без предположения монотонности по u. При этом правая часть $f(x,t)$ может быть произвольной заданной периодической по времени функцией и $\eta_p(x)$ может изменять знак. Техника доказательства основной теоремы в данной статье отличается от техники из [12; 13] и опирается на работы [15 - 17].

Сформулируем основную теорему данной работы.

Теорема. Пусть выполнены условия (4)-(8), $B\neq 0$ и b является нечетным числом. Тогда для любой функции $f(x,t)\in L_2(\Omega)$ задача (1)-(3) имеет счетное множество различных периодических обобщенных решений из $C(\Omega)$, не ограниченных в $L_{d+1}(\Omega)$.

Определение обобщенного решения будет дано ниже.

Собственные значения дифференциального оператора

Рассмотрим следующую задачу Штурма - Лиувилля:

$$-(p(x)\varphi'(x))'=\lambda\, p(x)\varphi(x); \qquad (9)$$

$$\varphi(0)=\varphi(\pi)+h\varphi'(\pi)=0. \qquad (10)$$

Зададим норму в пространстве $L_r(\Omega)$ $(r\geq 1)$ равенством $\|u\|_r=\left(\int_\Omega |u(x,t)|^r\, p(x)\,dx\,dt\right)^{1/r}$, и пусть $\|u\|=\|u\|_2$. Для функций

$$u\in L_{r_1}(\Omega),\ v\in L_{r_2}(\Omega),\ r_1,r_2\geq 0,\ 1/r_1+1/r_2=1,$$

обозначим $(u,v)=\int_\Omega u(x,t)v(x,t)p(x)\,dxdt,\quad u,v\in L_2(\Omega).$

Скалярное произведение в пространстве $L_r(0,\pi)$ зададим с помощью соотношения

$$(\varphi,\psi)=\int_{[0,\pi]}\varphi(x)\,\psi(x)\,p(x)\,dx,\quad \varphi,\psi\in L_2(0,\pi).$$

Стандартно из (9), (10) выведем

$$\lambda\int_0^\pi \varphi^2(x)\,p(x)\,dx=\int_0^\pi(\varphi'(x))^2\,p(x)\,dx+\frac{1}{h}\,p(\pi)\varphi^2(\pi). \qquad (11)$$

Поэтому задача (9),(10) имеет положительные простые [14] собственные значения $\lambda=\lambda_n^2,\ n\in N\ (\lambda_n>0)$, которым соответствуют собственные функции $\varphi_n(x)$. Будем считать, что функции $\varphi_n(x)$ нормированы в $L_2(0,\pi)$. Согласно теореме

В.А.Стеклова, система функций $\varphi_n(x)$ является полной ортонормированной в $L_2(0,\pi)$.

В [14] для задачи Штурма - Лиувилля (5),(6) доказано следующее асимптотическое представление собственных значений:

$$\lambda_n = n - \frac{1}{2} + \frac{B}{2\pi}\frac{1}{n} + \beta_n , \qquad (12)$$

где $\beta_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $n \in N$.

В $L_2(\Omega)$ рассмотрим полную ортонормированную систему функций

$$\Lambda = \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}}\phi_n(x), \sqrt{\frac{2}{T}}\phi_n(x)\cos\left(\frac{a}{b}mt\right), \sqrt{\frac{2}{T}}\phi_n(x)\sin\left(\frac{a}{b}mt\right) \right\}_{m,n\in N} .$$

Пусть D - множество конечных линейных комбинаций функций из системы Λ. Определим оператор $A_0 : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, для которого $D(A_0) = D$ и

$$A_0\,\varphi = p\varphi_{tt} - (p\varphi_x)_x \quad \forall \varphi \in D(A_0).$$

Пусть $\overline{A}_0\,\varphi = \frac{1}{p}A_0\varphi \quad \forall \varphi \in D(A_0)$. Обозначим $A = (\overline{A}_0)^*$ в $L_2(\Omega)$ [1]. Функции из системы Λ являются собственными функциями операторов $\overline{A}_0$ и A с собственными значениями

$$\mu_{nm} = \lambda_n^2 - \left(\frac{a}{b}m\right)^2 , \quad n \in N,\ m \in Z_+ .$$

Пусть $T_m = \sqrt{\frac{2}{T}}$ при $m \in N$, $T_0 = \frac{1}{\sqrt{T}}$. Функция

$$u = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} T_m\varphi_n(x)\left(a_{nm}\cos\frac{a}{b}mt + b_{nm}\sin\frac{a}{b}mt \right) \qquad (13)$$

принадлежит $D(A)$ тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\mu_{nm}^2(x)\left(a_{nm}^2 + b_{nm}^2\right)$. При этом

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\mu_{nm}T_m\varphi_n(x)\left(a_{nm}\cos\frac{a}{b}mt + b_{nm}\sin\frac{a}{b}mt \right).$$

Справедливы следующие свойства [1]: 1) A самосопряжен в $L_2(\Omega)$; 2) $R(A)$ замкнут в $L_2(\Omega)$; 3) $L_2(\Omega) = Ker(A) \oplus R(A)$.

Обозначим $\sigma(A) = \{\mu_{nm} \mid n \in N,\ m \in Z_+\}$. Точно так же, как в [12], доказывается, что при $B \neq 0$ ядро $KerA$ является конечномерным.

Из (12) вытекает следующее представление для μ_{nm}:

$$\mu_{nm} = \frac{1}{4b^2}((2n-1)b - 2am)((2n-1)b + 2am) + \frac{B}{\pi} + \overline{\beta}_n , \qquad (14)$$

где $\overline{\beta}_n \to 0$ при $n \to \infty$.

При нечетном b уравнение

$$(2n-1)b - 2am = 0$$

не имеет целочисленных решений и $\sigma(A)$ есть дискретное неограниченное множество без конечных предельных точек. Легко видеть, что в случае нечетного b существует положительная константа C_0, такая, что если $\mu_{nm} \neq 0$, то

$$|\,\mu_{nm}| \geq C_0(n+m) . \qquad (15)$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1)-(3) называется функция $u \in L_{d+1}(\Omega)$, такая, что

$$\int_\Omega u\,(p\,\varphi_{tt} - (p\varphi_x)_x)\,dx\,dt + \int_\Omega g(x,t,u)\ \varphi\,dx\,dt = \int_\Omega f(x,t)\varphi\,dx\,dt \quad \forall \varphi \in D .$$

Доказательство теоремы. При доказательстве теоремы будем использовать методы Рабиновитца - Танаки - Bahri - Berestycki [15 -1 7].

Функции $u, v \in D(A)$ могут быть представлены в виде сумм Фурье по системе Λ:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} T_m \varphi_n(x)\,(a_{nm}\cos(\frac{a}{b}mt) + b_{nm}\sin(\frac{a}{b}mt)), \qquad (16)$$

$v = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} T_m \varphi_n(x)\,(a'_{nm}\cos(\frac{a}{b}mt) + b'_{nm}\sin(\frac{a}{b}mt))$. Определим скалярное произведение [15]

$$< u, v >= \sum_{\mu_{nm}\neq 0} |\mu_{nm}|\,(a_{nm}a'_{nm} + b_{nm}b'_{nm}) + \sum_{\mu_{nm}=0}(a_{nm}a'_{nm} + b_{nm}b'_{nm})$$

и норму $\|u\|_E = \sqrt{< u, u >}$. Обозначим $E^+ = \overline{span}\{\varphi_n(x)\cos(\frac{a}{b}mt),\ \varphi_n(x)\sin(\frac{a}{b}mt) |\ \mu_{nm} < 0\}$,

$$E^- = \overline{span}\{\varphi_n(x)\cos(\frac{a}{b}mt),\ \varphi_n(x)\sin(\frac{a}{b}mt) |\ \mu_{nm} > 0\},$$

$$E^0 = \overline{span}\{\varphi_n(x)\cos(\frac{a}{b}mt),\ \varphi_n(x)\sin(\frac{a}{b}mt) |\ \mu_{nm} = 0\}.$$

Здесь замыкание берется по норме $\|\cdot\|_E$. Множество $E = E^+ \oplus E^- \oplus E^0$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением $<,>$. Для любой функции $u \in E$ имеет место представление

$$u = u^+ + u^- + u^0,$$

где $u^+ \in E^+, u^- \in E^-, u^0 \in E^0$.

При $q > 1$ из (11) и неравенств Гельдера и Хаусдорфа - Юнга вытекает существование положительной константы C_q, такой, что

$$\|u\| \le C_q \|u\|_E \quad \forall u \in E \qquad (17)$$

и вложение $E \to L_q$ является вполне непрерывным.

На множестве E рассмотрим функционал

$$F(u) = -\frac{1}{2}(Au, u) + \int_\Omega (f \cdot u - G(x,t,u))\,dx\,dt.$$

Функционал F дифференцируем по Фреше. Стационарные точки F являются обобщенными решениями задачи (1)-(3).

Стандартно [15; 18] доказывается, что F удовлетворяет условию компактности Пале - Смейла, состоящему в том, что из любой последовательности $\{u_n\} \in E$, такой, что $F(u_n) \le M \ \ \forall n$ и $F'(u_n) \to 0$ в E^* при $n \to \infty$, можно выделить сходящуюся в E подпоследовательность. Здесь и далее F' есть производная Фреше.

Из условия (7) вытекает существование положительных констант A_1, A_2, A_3, таких, что при всех $(x,t,u) \in \Omega \times R$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{\mu}(u \cdot g(x,t,u) + A_1) \ge G(x,t,u) + A_2 \ge A_3 |u|^\mu. \qquad (18)$$

Рассмотрим на E еще один функционал:

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|_E - \frac{1}{2}\|u^+\|_E - \int_\Omega G(x,t,u)\,dx\,dt + \Psi(u)(f, u).$$

Здесь $\Psi(u) = \chi(H(u)),\ H(u) =$
$= \int_\Omega (G(x,t,u) + A_2)\,dxdt / \Phi(u), \Phi(u) = \overline{a}\sqrt{F^2(u) + 1}$,
$\overline{a} = 12/(\mu - 2)$ и χ есть бесконечно дифференцируемая функция, такая, что $\chi(\tau) = 1$ при $\tau \le 1$, $\chi(\tau) = 0$ при $\tau \ge 2$ и $-2 \le \chi'(\tau) \le 0$ при всех τ.

Для функционала I выполнено следующее свойство, которое не верно для F (лемма 1.18 [15], утверждение 1.2 [16]): существует положительная константа $D_1 = D_1(\|f\|_{\mu/(\mu-1)})$, такая, что при всех $u \in E$ имеет место неравенство

$$|I(u) - I(-u)| \le D_1(|I(u)|^{1/\mu} + 1). \qquad (19)$$

Аналогично лемме 1.29 [15] доказывается существование положительной константы $M_0 = M_0(\|f\|\mu/(\mu - 1))$, такой, что $I(u)=F(u)$, если $I(u)\geq M_0$ и $\| I'(u)\|_{E^*}\leq 1$.

Занумеруем отрицательные собственные значения оператора A в порядке невозрастания: $0>-\mu_1\geq-\mu_2\geq\ldots$ $(\mu_i>0)$. Каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность. Пусть e_i есть собственные векторы оператора A, соответствующие $(-\mu_i)$, нормированные в E.

Для любого $u\in E_n$ выполнено неравенство $\| u\|_E\leq\sqrt{\mu_n}\cdot\| u\|_2$. Поэтому существуют константы C_5, C_6, такие, что для любой функции $u=u^+ +u^- +u^0\in E_n^+\oplus E^-\oplus E^0$, $u^+\in E_n^+, u^-\in E^-, u^0\in E^0$, имеет место оценка

$$I(u)\leq\frac{1}{2}\| u^+\|_E^2 -C_5\frac{1}{\mu_n^{\mu/2}}\| u^+\|_E^{\mu} -\frac{1}{2}\| u^-\|_E^2 -C_6\| u^0\|_E^{\mu} +C_5.$$

Отсюда вытекает существование возрастающей последовательности $R_n>0$, такой, что $I(u)\leq 0$ при всех $u\in E_n^+\oplus E^-\oplus E^0$, таких, что $\| u\|_E\geq R_n$.

Обозначим
$D_n=\{u\in E_n^+\oplus E^-\oplus E^0 \mid \| u\|_E\leq R_n\}$.

Для построения минимаксных последовательностей критических значений I построим следующие семейства непрерывных отображений [16]:

$$\Gamma_n=\{\gamma\in C(D_n,E)\mid\gamma \text{ удовлетворяет условиям } (\gamma_1)-(\gamma_2)\};$$

(γ_1) $\gamma(-u)=\gamma(u)$ при $u\in D_n$;

(γ_2) $\gamma(u)=u$ при $u\in\partial D_n$;

(γ_3) при $u\in D_n$ имеет место представление $\gamma(u)=\alpha(u)u+k(u)$, где $\alpha\in C(D_n,[1,\overline{\alpha}])$ есть четный функционал ($\overline{\alpha}\geq 1$ зависит от γ) и k есть вполне непрерывный оператор, так что при $u\in\partial D_n$ имеем $\alpha(u)=1$ и $k(u)=0$.

Обозначим
$U_n=D_{n+1}\bigcap\{u\in E|\langle u,e_{n+1}\rangle\geq 0\}$.

$\Lambda_n=\{\lambda\in C(U_n,E)|\lambda$ удовлетворяет условиям $(\lambda_1)-(\lambda_3)\}$;

(λ_1) $\lambda|_{D_n}\in\Gamma_n$;

(λ_2) $\lambda(u)=u$ при $u\in\partial U_n\setminus D_n$;

(λ_3) при $u\in U_n$ имеет место представление $\lambda(u)=\tilde{\alpha}(u)u+\tilde{k}(u)$, где $\tilde{\alpha}\in C(D_n,[1,\overline{\alpha}])$ есть четный функционал ($\overline{\alpha}\geq 1$ зависит от λ) и $\tilde{k}$ есть вполне непрерывный оператор, причем $\tilde{\alpha}(u)$ четно на D_n и $\tilde{\alpha}(u)=1$, $\tilde{k}(u)=0$ при $u\in\partial U_n\setminus D_n$.

Определим последовательности минимаксных значений [15; 16]:

$$b_n=\inf_{\gamma\in\Gamma_n}\sup_{u\in D_n} I(\gamma(u)),$$

$$c_n=\inf_{\lambda\in\Lambda_n}\sup_{u\in U_n} I(\lambda(u)).$$

Легко видеть, что имеет место неравенство $c_n\geq b_n$. Для $d_0>0$ обозначим

$$\Lambda_n(d_0)=\{\lambda\in\Lambda_n\mid I(\lambda(u))\leq b_n+d_0\ \forall u\in D_n\},$$

$$c_n(d_0)=\inf_{\lambda\in\Lambda_n(d_0)}\sup_{u\in U_n} I(\lambda(u))\geq c_n.$$

Из леммы 1.57 [16] следует, что если выполнены неравенства

$$c_n>b_n>M_0, \qquad (20)$$

то для любого $d_0\in(0,c_n-b_n)$ величина $c_n(d_0)$ является критическим значением I и $c_n(d_0)\geq c_n$. Таким образом, для доказательства существования счетного числа обобщенных решений задачи (1)-(3) достаточно показать, что неравенства (20) выполнены для бесконечного числа индексов.

Предположим противное: найдется натуральное число N_1, такое, что $c_n=b_n$

при любом $n \geq N_1$. Тогда аналогично лемме 1.64 [16] доказывается существование константы γ, такой, что

$$b_n \leq \gamma \cdot n^{\mu/(\mu-1)} \qquad (21)$$

при всех $n \in N$.

Для оценки значений b_n снизу заметим, что из (14) следует существование константы B_0, такой, что имеет место неравенство

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\| u^+ \|_E^2 - \frac{1}{2}\| u^- \|^2 - B_0 \| u^+ \|_\mu^\mu - B_0 \| u^- \|_\mu^\mu - B_0 \| u^0 \|_\mu^\mu - B_0$$

при всех $u = u^+ + u^- + u^0 \in E^+ \oplus E^- \oplus E^0$.

Обозначим $K(u^+) = \frac{1}{2}\| u^+ \|_E^2 - B_0 \| u^+ \|_\mu^\mu$ при $u^+ \in E^+$. Легко видеть, что

$$I(u^+) \geq K(u^+) - B_0 \qquad (22)$$

при всех $u^+ \in E^+$.

Стандартно доказывается тот факт, что функционал K удовлетворяет условию Пале - Смейла. Для построения последовательности критических значений K определим семейство непрерывных отображений

$$A_n^m = \{ \sigma \in C(S^{m-n}, E_m^+) \,|\, \sigma(-x) = \sigma(x) \;\; \forall x \in S^{m-n} \}.$$

Здесь $n, m \in N, m > n, S^k$ есть единичная сфера в R^{k+1}.

Определим $\beta_n^m = \sup\limits_{\sigma \in A_n^m} \min\limits_{x \in S^{m-n}} K(\sigma(x))$, где $n, m \in N, m > n$. В [15] доказаны следующие свойства чисел β_n^m. Существует возрастающая последовательность натуральных чисел m_j, такая, что $\lim\limits_{j\to\infty} \beta_n^{m_j} = \beta_n$ при всех натуральных n. Последовательность $\{\beta_n\}$ не убывает, числа β_n являются критическими значениями функционала K и $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = +\infty$. Кроме того, имеет место оценка

$$b_n + B_0 \geq \beta_n. \qquad (23)$$

Чтобы получить нижнюю оценку чисел β_n, рассмотрим

$index\, K''(u) = \max\{\dim H \,|\, H -$ подпространство E^+, такое, что $\langle K''(u)h, h \rangle \leq 0 \;\forall h \in H \}$.

Опираясь на теорию абсолютных гомотопических групп, докажем существование возрастающей последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$ и последовательности $\{u_k\} \in E^+$, таких, что при всех натуральных k имеют место неравенства [15; 17; 18]

$$K(u_k) \leq \beta_k; \qquad (24)$$

$$K'(u_k) = 0; \qquad (25)$$

$$index\, K''(u_k) \geq n_k. \qquad (26)$$

Из (25) выведем соотношение

$$\| u_k \|_E^2 - \mu B_0 \| u_k \|_\mu^\mu = \langle K'(u_k), u_k \rangle = 0.$$

Отсюда и из (23), (24) получим

$$b_k \geq K(u_k) - B_0 = \frac{1}{2} B_0 (\mu - 2) \| u_k \|_\mu^\mu - B_0. \qquad (27)$$

С помощью теорий интерполяционных пространств и сингулярных чисел, следуя методу К. Танаки, докажем, что при всех $q \geq 2$ существует положительная константа C_7, такая, что

$$C_7 \| \| u_k |^{(\mu-2)/2} \|_q^q \geq n_k.$$

Отсюда и из (27) при $q = 2 + \frac{1}{\mu - 2}$ выведем

$$b_k \geq C_8 (n_k)^{\frac{2\mu}{2\mu-3}} - B_0. \qquad (28)$$

Из неравенств (21), (28) вытекает неверное неравенство $\frac{\mu}{\mu - 1{,}5} \leq \frac{\mu}{\mu - 1}$. Из полученного противоречия следует, что неравенство (20) выполнено для бесконечного числа индексов. Таким образом, функционал I имеет бесконечное число критических точек u_{n_l}, таких, что $I(u_{n_l}) = c_{n_l}(d_0) \ge c_{n_l}$.

Так как u_{n_l} является критической точкой I, то

$$\| u_{n_l}^+ \|_E^2 - \| u_{n_l}^- \|_E^2 - (g(x,t,u_{n_l}, u_{n_l}) + (f, u_{n_l}) = \langle I'(u_{n_l}), u_{n_l} \rangle = 0 .$$

Поэтому

$$I(u_{n_l}) = \frac{1}{2}\int_\Omega g(x,t,u_{n_l}) u_{n_l}\, dx\, dt + \frac{1}{2}(f, u_{n_l}) - \int_\Omega G(x,t,u_{n_l})\, dx\, dt .$$

Отсюда и из неравенств (8), (18) получим

$$c_{n_l} \le I(u_{n_l}) \le \frac{1}{2}\int_\Omega | g(x,t,u_{n_l}) | \cdot | u_{n_l} |\, dx\, dt + \frac{1}{2}(f, u_{n_l}) + A_2 \pi T \le$$

$$\le \frac{1}{2} C_3 \| u_{n_l} \|_{d+1}^{d+1} + \frac{1}{2} C_4 \int_\Omega | u_{n_l} |\, dx\, dt + \frac{1}{2}(f, u_{n_l}) + A_2 \pi T \le$$

$$\le \frac{1}{2} C_3 \| u_{n_l} \|_{d+1}^{d+1} + C_9 \| u_{n_l} \|_{d+1} + A_2 \pi T .$$

Таким образом, $\lim\limits_{l\to\infty} \| u_{n_l} \|_{d+1} = +\infty$. Обозначим $w = -g(x,t,u_{n_l}) + f \in L_{(d+1)/d}$. Так как u_{n_l} является критической точкой I, то для всех $h \in E$ выполнено равенство

$$\left(u_{n_l}, Ah\right) = \int_\Omega h w\, dx\, dt . \qquad (29)$$

Пусть a_{mk}, b_{mk}, $a^0{}_{mk}, b^0{}_{mk}$ есть коэффициенты Фурье функций u_{n_l}, w по системе Λ соответственно. Подставив в (29)

$$h = \varphi_m(x)\cos\left(\frac{a}{b}kt\right), \quad h = \varphi_m(x)\sin\left(\frac{a}{b}kt\right),$$

где $m, \in N, k \in Z_+$, получим

$$\mu_{mk}\, a_{mk} = a^0{}_{mk} ,\ \mu_{mk}\, b_{mk} = b^0{}_{mk} .$$

Обозначим $I = \sum\limits_{\mu_{mk}\ne 0} \frac{1}{|\mu_{mk}|}(| a^0{}_{mk} | + | b^0{}_{mk} |)$. Используя неравенства Хаусдорфа - Юнга и Гельдера, выведем

$$I \le \left(\sum_{\mu_{mk}\ne 0} (| a^0{}_{mk} |^{d+1} + | b^0{}_{mk} |^{d+1}) \right)^{1/(d+1)} \left(\sum_{\mu_{mk}\ne 0} \frac{1}{| \mu_{mk} |^{(d+1)/d}} \right)^{d/(d+1)} \le$$

$$\le C_{10} \| h \|_q \left(\sum_{\mu_{mk}\ne 0} \frac{1}{| \mu_{mk} |^{(d+1)/d}} \right)^{d/(d+1)} \| w \|_{(d+1)/d} .$$

Отсюда и из конечномерности $Ker\, A$ вытекает включение $u_{n_l} \in C(\Omega)$. Теорема доказана.

В доказанной теореме приведены условия существования бесконечного числа периодических по времени решений квазилинейного волнового уравнения с однородными граничными условиями 3-го рода и Дирихле на отрезке при произвольной периодической по времени правой части.

Статья написана при поддержке гранта Министерства образования и науки РФ № 1.2640.2014.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barby, V. Periodic solutions to nonlinear one dimensional wave equation with x - dependent coefficients/ V.Barby, N.H.Pavel // Trans. Amer. Math. Soc.-1997.-V. 349. - № 5.- P. 2035-2048.
2. Rabinowitz, P. Free vibration for a semilinear wave equation/ P. Rabinowitz//Comm. Pure Aple. Math.-1978.- V. 31.- № 1.- P. 31-68.
3. Bahri, A. Periodic solutions of a nonlinear wave equation/A. Bahri, H. Brezis// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. - 1980.- V. 85. – P. 3130-320.
4. Brezis, H. Forced vibration for a nonlinear wave equations/ H. Brezis, L. Nirenberg //Comm. Pure Aple. Math.-1978.- V. 31. - № 1.- P. 1-30.
5. Плотников, П. И. Существование счетного множества периодических решений задачи о вынужденных колебаниях для слабо нелинейного волнового уравнения/П. И. Плотников// Математический сборник. -1988.-Т. 136(178).- № 4(8). - С. 546-560.
6. Feireisl, E. On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term/ E. Feireisl //Chechosl. Math. J.- 1988.-V. 38.- № 1.- P.- 78-87.
7. Рудаков, И.А. Нелинейные колебания струны/ И.А. Рудаков//Вестн. МГУ. Сер. 1, Матем., мех. – 1984.- № 2. – С. 9-13.
8. Рудаков, И. А. Периодические решения нелинейного волнового уравнения с непостоянными коэффициентами/ И. А. Рудаков //Математические заметки. -2004. -Т. 76.- Вып. 3. -С. 427-438.
9. Shuguan, J. Time periodic solutions to a nonlinear wave equation with x - dependet coefficients/ J. Shuguan//Calc. Var. -2008.-V. 32. – P. 137-153.
10. Рудаков, И.А. Периодические решения квазилинейного волнового уравнения с переменными коэффициентами/ И.А. Рудаков //Математический сборник. -2007.-Т. 198.- № 4(8). - С. 546-560.
11. Рудаков, И.А. О периодических по времени решениях квазилинейного волнового уравнения/ И.А. Рудаков // Труды МИАН. -2010. – Т. 270. – С. 226-232.
12. Рудаков, И.А. Периодические колебания неоднородной струны с закрепленным и свободным концами / И.А. Рудаков// Вестник Брянского государственного технического университета. – 2015. – № 3(47). – С. 83-93.
13. Рудаков, И.А. Периодические решения волнового уравнения с непостоянными коэффициентами и однородными граничными условиями Дирихле и Неймана/ И.А. Рудаков// Дифференциальные уравнения. –2016. – Т. 52. – № 2. – С. 247-256. – URL: http://nasb.gov.by/eng/publications/difur/index.php.
14. Трикоми, Ф. Дифференциальные уравнения/ Ф.Трикоми. – М.: УРСС, 2003.-351 с.
15. Tanaka, K. Infinitely many periodic solutions for the equation: $u_{tt} - u_{xx} \pm |u|^{p-1} u = f(x,t)$. II/K. Tanaka//Trans. Amer. Math. Soc.-1988.-V. 307. –P. 615-645.
16. Rabinowitz, P.H. Multiple critical points of perturbed symmetric functionals/ P.H. Rabinowitz//Trans. Amer. Math. Soc.-1982.-V. 272. - P. 753-769.
17. Bahri, A. Topological results on a certain class of functionals and applications/A.Bahri, H.Berestycki//Trans. Amer. Math. Soc.-1981.-V. 267.-№ 1.-P. 1-32.
18. Рудаков, И.А. Периодические решения квазилинейного уравнения вынужденных колебаний балки/И.А.Рудаков//Известия РАН. Сер. мат.- 2015.-Т. 79. -№ 5.-С. 215-238.

1. Barby, V. Periodic solutions to nonlinear one dimensional wave equation with x - dependent coefficients/ V.Barby, N.H.Pavel // Trans. Amer. Math. Soc.-1997.-V. 349. - № 5.- P. 2035-2048.
2. Rabinowitz, P. Free vibration for a semilinear wave equation/ P. Rabinowitz//Comm. Pure Aple. Math.-1978.- V. 31.- № 1.- P. 31-68.
3. Bahri, A. Periodic solutions of a nonlinear wave equation/A. Bahri, H. Brezis// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. - 1980.- V. 85. – P. 3130-320.
4. Brezis, H. Forced vibration for a nonlinear wave equations/ H. Brezis, L. Nirenberg //Comm. Pure Aple. Math.-1978.- V. 31. - № 1.- P. 1-30.
5. Plotnikov, P.I. Existence of denumerable set for periodic solutions of problem on forced oscillations for weakly nonlinear wave equation/P.I. Plotnikov// *Mathematical Collection*. -1988.-T. 136(178).- № 4(8). - pp. 546-560.
6. Feireisl, E. On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term/ E. Feireisl //Chechosl. Math. J.- 1988.-V. 38.- № 1.- P.- 78-87.
7. Rudakov, I.A. Nonlinear string oscillations/ I.A. Rudakov//*Bulletin of MSU. Series. 1, Mathem., Mech*. – 1984.- № 2. – pp. 9-13.
8. Rudakov, I. A. Periodic solutions of nonlinear wave equation with variable coefficients/ I. A. Rudakov //Mathematical Notes. -2004. -Vol. 76.- Issue. 3. - pp. 427-438.
9. Shuguan, J. Time periodic solutions to a nonlinear wave equation with x - dependent coefficients/ J. Shuguan//Calc. Var. -2008.-V. 32. – P. 137-153.
10. Rudakov, I.A. Periodic solutions of quasi-linear wave equation with variable coefficients/ I.A. Rudakov //*Mathematical Collection*. -2007.-Vol. 198.- № 4(8). - pp. 546-560.

11. Rudakov, I.A. On time periodic solutions of quasi-linear wave equation / I.A. Rudakov // *Proceedings of MIAN*. -2010. – Vol. 270. – pp. 226-232.
12. Rudakov, I.A. Periodic oscillations of heterogeneous string with fixed and free end parts / I.A. Rudakov// *Bulletin of Bryansk State Technical University*. – 2015. – № 3(47). – pp. 83-93.
13. Rudakov, I.A. Periodic solutions of wave equation with non-constant coefficients and homogeneous boundary conditions of Dirichlet and Neuman I.A. Rudakov// *Differential Equations*. –2016. – Vol. 52. – № 2. – pp. 247-256. – URL: http://nasb.gov.by/eng/publications/difur/index.php.
14. Trikomi, F. Differential Equations/ F.Trikomi. – M.: URSS, 2003.- pp. 351.
15. Tanaka, K. Infinitely many periodic solutions for the equation: $u_{tt} - u_{xx} \pm |u|^{p-1} u = f(x,t)$. II/K. Tanaka//Trans. Amer. Math. Soc.-1988.-V. 307. –P. 615-645.
16. Rabinowitz, P.H. Multiple critical points of perturbed symmetric functionals/ P.H. Rabinowitz//Trans. Amer. Math. Soc.-1982.-V. 272. - P. 753-769.
17. Bahri, A. Topological results on a certain class of functionals and applications/A.Bahri, H.Berestycki//Trans. Amer. Math. Soc.-1981.-V. 267.-№ 1.-P. 1-32.
18. Rudakov, I.A. Periodic solutions of quasi-linear equation of beam forced oscillations/I.A.Rudakov//*Proceedings of RAS. Series Math*.-2015.-Vol. 79. -№ 5.-pp. 215-238.

Статья поступила в редколлегию 13.05.2016.
Рецензент: д.т.н., профессор МГТУ им. Н.Э. баумана Кувыркин Г.Н.

Сведения об авторах:

Рудаков Игорь Алексеевич, д.физ.-мат.н., профессор кафедры «Прикладная математика ФН-2» МГТУ им. Н.Э. Баумана, e-mail: rudakov_ia@mail.ru.

Rudakov Igor Alekseevich, physical. - мат.н., professor of "Applied Mathematics of FN-2 department of MSTU of N. E. Bauman, e-mail: rudakov_ia@mail.ru.