Об одном подходе к решению матричных игр на основе теории нечетких множеств и нечеткой логики

About one approach to solving matrix games on the basis of the theory of fuzzy sets and fuzzy logs

УДК 330.45
Получено: 15.03.2019 Одобрено: 29.03.2019 Опубликовано: 25.06.2019

Черных А.К.
д-р техн. наук, доцент, профессор кафедры Санкт-Петербургского военного института войск национальной гвардии Российской Федерации
e-mail: nataliachernykh@mail.ru

Chernykh A.K.
Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of the St. Petersburg Military Institute of the National Guard of the Russian Federation
e-mail: nataliachernykh@mail.ru

Вилков В.Б.
канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры Военной академии материально-технического обеспечения им. генерала армии А.В. Хрулёва

Vilkov V.B., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of the Military Academy of Material and Technical Support named after Army General A.V. Khruleva

Аннотация
В статье рассматриваются применяемые при решении широкого класса экономических задач матричные игры с нечеткими выигрышами. На множестве их ситуаций строится нечеткое множество «ситуация является равновесной». Решением игры предлагается считать ситуацию, для которой значение функции принадлежности указанного нечеткого множества максимально. Любая игра имеет указанное решение в чистых стратегиях. Для игр с выигрышами в форме нечетких треугольных чисел предлагается алгоритм отыскания решения игры. Приводится содержательный пример.
Ключевые слова: решение матричных игр, теория нечетких множеств, теория нечеткой логики.

Abstract
The article discusses matrix games with fuzzy winnings used in solving a wide class of economic problems. On the set of their situations a fuzzy set “the situation is equilibrium” is built. The solution of the game is to consider the situation for which the value of the membership function of the specified fuzzy set is maximal. Any game has a specified solution in pure strategies. For games with prizes in the form of fuzzy triangular numbers, an algorithm is proposed for finding the solution of the game. Provides a meaningful example.
Keywords: solution of matrix games, theory of fuzzy sets, theory fuzzy logic.

Матричные игры находят широкое применение во многих прикладных областях. В частности, они широко применяются в экономике. В данной статье рассматривается проблема определения понятия решения матричной игры с нечеткими выигрышами. Этой и связанным с ней проблемам посвящено достаточно большое число работ. В имеющихся публикациях рассматриваются подходы, использующие ранжирования нечетких чисел, отношения возможности и необходимости, нечеткие множества, заданные на множестве выигрышей и (или) стратегий, идеи Беллмана-Заде и некоторые другие подходы.

В [1] (применительно к нечеткой игре двух лиц) J. Buckley предполагает, что каждый игрок имеет свою цель. На множестве своих стратегий игрок задает нечеткое множество цели, зависящее, вообще говоря, от стратегии противника. Кроме того, игрок выражает свою неопределенность относительно того, какую стратегию будет использовать противник, определяя соответствующее нечеткое множество на множестве его стратегий. Используя идеи Заде и Беллмана [2], игрок на базе указанных нечетких множеств строит нечеткое множество с функцией принадлежности, равной минимуму из функций принадлежности указанных множеств. Стратегия, на которой достигается максимум этой функции, считается оптимальной.

I. Nishizaki и M. Sakawa в [3-6] для каждой ситуации (в смешанных стратегиях) и каждого игрока определяют нечеткий ожидаемый выигрыш и его функцию принадлежности. На множестве возможных четких значений выигрышей игрока задается нечеткое множество цели. На основе идей Заде и Беллмана определяется нечеткое решение (степень достижения нечеткой цели).

Степень принадлежности того факта, что при полученном выигрыше данная ситуация принадлежит нечеткому решению равна минимуму из степени принадлежности этого выигрыша нечеткой цели и степени уверенности в получении этого выигрыша в данной ситуации. Степень принадлежности данной ситуации нечеткому решению равна максимальной из описанных ранее степеней. Решением исходной игры считается ситуация, равновесная в игре с выигрышами, равными значениям функции принадлежности нечеткого решения на ожидаемом нечетком выигрыше в этой ситуации.

Aristidou и Sarangi в [7] на множестве стратегий каждого игрока задается нечеткое множество с функцией принадлежности $\mu_i(s_i)$, $s_i \in S^i$, S^i – множество стратегий i-го игрока. На множестве ситуаций S для каждого игрока задается нечеткая цель с функцией принадлежности $\gamma_i(s)$, $s \in S$ и нечеткое решение с функцией принадлежности $\delta_i(s) = min\{\mu_i(s_i), \gamma_i(s)\}$. Ситуация $s \in S$ считается равновесной по Нэшу, если она равновесная в игре с выигрышами, равными $\delta_i(s)$.

Аналогичный подход предлагают C. Cevikel и M. Ahlatcioglu в [8], где ими рассматривается минимум из значения функции принадлежности нечеткого выигрыша и степени достижения нечеткой цели. В качестве решения игры предлагается ситуация, для которой этот минимум принимает максиминное значение.

В [9] О.В. Серая и Т.И. Каткова рассматривают матричные игры с нечеткими треугольными выигрышами. Используется композиционный критерий, учитывающий меру близости получаемого решения к модальному и уровень неопределенности в отношении получаемого в результате нечеткого значения цены игры. Отталкиваясь от минимальных и максимальных значений выигрышей, находится пессимистическое и оптимистическое решения.

В [10] I. Nishizaki и H. Yano рассматривают игру двух лиц с нулевой суммой с несколькими выигрышами, задаваемыми соответствующими матрицами. Каждой ситуации в игре соответствует вектор выигрышей. Каждый игрок имеет нечеткую цель по каждой координате вектора выигрышей, определенную на множестве соответствующих выигрышей. На основе этих нечетких целей вводится понятие пессимистического Парето оптимального решения.

В [11] S. Kumar рассматривает многокритериальные (нас интересует случай, когда критерий один) матричные игры двух лиц с четкими выигрышами и нечеткими целями. Используется подход Заде – Беллмана. Строится функция принадлежности нечеткой цели, выражающая степень принадлежности рассматриваемого выигрыша интервалу от минимально до максимально возможного выигрыша. Определяется максиминное значение степени достижения нечеткой цели.

Первая модель, использующая ранжирование нечетких чисел, была рассмотрена Кампосом (Campos) [12].

У T. Maeda [13] на множестве нечетких чисел вводятся варианты отношения нечеткого порядка. С использованием ранжирования вводятся понятия минимаксных равновесных стратегий и их модификаций (недоминируемые и слабо недоминируемые).

В [14] V. Vijay, S. Chandra, A. Mehra и C.R. Bector, вводя нечеткий порядок, задают уровни устремленности (цели) и с их использованием формулируют понятие решения. Вводятся отношения возможности и необходимости. На их основе вводятся понятия приемлемого решения, равновесного решения и решения.

В [15] A. Chakeri с соавторами строят нечеткое отношение предпочтения и по нечеткой игре строят четкую, в [16] A. Chakeri с соавторами для построения решения используют ранжирование нечетких чисел.

В [17] A. Chakeri, N. Sadati и Guy A. Dumont, используя ранжирование нечетких чисел, строят отношение нечетких предпочтений, затем полученные приоритеты выигрышей рассматриваются как оценки возможности быть равновесными.

В [18] L. Cun-lin и Z. Qiang, следуя T. Maeda [13], вводят отношение на множестве нечетких чисел и ситуацию равновесия. Рассматриваются параметрические игры, выигрыши в них зависят от двух параметров и при фиксированных значениях этих параметрах становятся четкими. L. Cun-lin в [19] строит решение на основе нескольких видов порядков, предложенных T. Maeda.

Л.Ф. Василевич в [20] рассматривает матричные игры с нечеткими трапецеидальными выигрышами. С помощью ранжирования специального вида переходит к четким выигрышам, затем с использованием метода Брауна-Робертсона строится решение игры.

D. Qiu , W. Zhang, Y. Xing в [21] рассматривают нечеткие неравенства и с их помощью вводят многоцелевые ситуации равновесия.

В [22] K.N. Kudryavtsev, I.S. Stabulit, V.I. Ukhobotov определяют равновесие по Нэшу, используя разные способы сравнения нечетких чисел.

В [23] D. Qiu, Y. Xing, S. Chen рассматривается биматричная игра с нечеткими треугольными выигрышами. С помощью функции ранжирования значений переходят к игре с четкими выигрышами.

D.-F. Li в [24] тоже использовал упорядочение нечетких чисел.

В [25] V. Vijay, S. Chandra, C.R. Bector предлагают два подхода к решению рассматриваемых игр, первый основывается на ранжировании нечетких чисел, второй – на упорядочении нечетких чисел с использованием меры возможности.

В [26] B. Dutta, S.K. Gupta вводят порядок на множестве трапециидальных нечетких чисел. Для определения ситуация равновесна используются нечеткие неравенства, которые вводятся с использованием α–сечений. Рассматривается Парето-Неш равновесие.

В [27] авторы предлагают новый подход к решению рассматриваемых игр на основе α-сечений множеств треугольных нечетких чисел. Вводится понятие приемлемого решения (с нечеткими неравенствами), на его основе – решение.

S.T. Lui, C. Kao в [28] и J.J. Buckley, L.J. Jowers в [29] строят решение, используя α-сечения.

В [30, 31, 32] авторы с помощью дефаззификации (разными методами) переходит к четкой игре, решение которой и считается решением исходной игры.

В [33] авторы, используя подходящую функцию дефаззификации, осуществляют ранжирование нечетких чисел, вводят понятия приемлемого решения и на его основе решения. У них же в [34] решение концептуализируется с использованием подходящей функции дефаззификации, задаются уровни устремленности игроков и их толерантность, задается порядок на множестве нечетких чисел, определяется понятие решения игры.

В [35] A. Chakeri, S. Sharifian и F. Sheikholeslam описывают возможность использования нечеткого лингвистического отношения предпочтения в теории игр. Для получения предпочтений в соответствии с разницей между выплатами строится нечеткий набор правил «если – то».

D. Garagic, J. Cruz в [36] разделяют нечеткую игру на три процесса: фаззификация, вывод и дефаззификация. Создается матрица нечетких предпочтений с использованием правил «если–то». После дефаззификации получается четкая игра, равновесие Нэша которой рассматриваются как решения в исходной.

В [37] L. Xu, R. Zhao, T. Shu исследуют три похода к определению минимаксной равновесной стратегии: ожидаемая минимаксная равновесная стратегия, r – возможная минимаксная равновесная стратегия и r – надежная минимаксная равновесная стратегия.

A. Chakeri и F. Sheikholeslam в [38] вводят понятие функции удовлетворения, учитывая точки зрения игроков (оптимистическая, нормальная, пессимистическая и т.п.). Эта функция выражает степень уверенности в справедливости арифметического неравенства. С использованием этой функции определяется степень возможности того, что ситуация является равновесной по Нэшу.

В [39] Q. Song, A. Kandel предлагают подход, использующий многокритериальный метод принятия решений для получения оптимальной стратегии в игре.

Желающих более подробно ознакомиться с литературой по рассматриваемому вопросу отсылаем к обзорам [40, 41].

Напомним необходимые для дальнейшего понятия теории матричных игр [42, 43] и теории нечетких множеств [2, 44–46].

Матричной игрой g называется игра двух игроков, в которой каждый из них имеет конечное число способов поведения (стратегий). Игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают по стратегии, после чего каждый из них получает определенный выигрыш, при этом сумма полученных выигрышей равна нулю.

Пусть $A(g)=\{a_1,a_2,...,a_m\}$ – множество стратегий первого игрока, $B(g)=\{b_1,b_2,...,b_n\}$ – множество стратегий второго игрока. Выбор игроками по стратегии будем называть ситуацией. Если игроки выбрали стратегии a_i и b_j соответственно, то обозначать такую ситуацию будем (i, j).

Для игры g на множестве ее ситуаций определена функция $H_{ij}(g)$ – функция выигрыша первого игрока, выигрыш второго игрока в ситуации (i, j) равен $-H_{ij}(g)$. Каждый игрок стремится максимизировать свой выигрыш.

Игра g однозначно задается матрицей выигрышей первого игрока:

$$A(g)=\begin{pmatrix} H_{11}(g) & H_{12}(g) & \dots & H_{1n}(g) \\ H_{21}(g) & H_{22}(g) & \dots & H_{2n}(g) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_{m1}(g) & H_{m2}(g) & \dots & H_{mn}(g) \end{pmatrix}.$$

Первый игрок всегда может гарантировать себе выигрыш, равный

$$\max_{1\le i\le m}\min_{1\le j\le n} H_{ij}(g).$$

Второй игрок всегда может гарантировать себе проигрыш, равный

$$\min_{1\le j\le n}\max_{1\le i\le m} H_{ij}(g).$$

Определение. В матричной игре g ситуация (i_0, j_0) называется ситуацией равновесия или седловой точкой, если

$H_{ij_0}(g) \le H_{i_0 j_0}(g)$,

$H_{i_0 j}(g) \ge H_{i_0 j_0}(g)$,

при $1 \le i \le m$ и $1 \le j \le n$.

Игры, имеющие ситуацию равновесия, называются вполне определенными. Выигрыш первого игрока в ситуации равновесия называется ценой игры, а стратегии, образующие седловую точку, называются оптимальными.

К сожалению, далеко не всякая игра является вполне определенной. Стремясь обойти этот недостаток, Нейман ввел понятие смешанных стратегий. Смешанная стратегия игрока есть распределение вероятностей по его стратегиям. Имеет место теорема.

Теорема. Всякая матричная игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.

Рассмотрим теперь необходимые нам для дальнейшего понятия теории нечетких множеств и нечеткой логики.

Нечетким множеством $\widehat{A}$ на универсальном множестве U называется совокупность пар $(\mu_{\widehat{A}}(u), u)$, где $\mu_{\widehat{A}}(u)$ – степень принадлежности элемента $u \in U$ к нечеткому множеству $\widehat{A}$. Чем выше степень принадлежности, тем в большей мере элемент универсального множества соответствует свойствам нечеткого множества, тем с большей надежностью мы можем утверждать, что он является элементом этого множества. Функция $\mu_{\widehat{A}}(u)$ называется функцией принадлежности нечеткого множества $\widehat{A}$.

Нечеткие множества в случае, когда универсальным множеством является числовая ось, принято называть нечеткими величинами. Нечеткая величина, функция принадлежности которой непрерывна и имеет единственный максимум, называется нечетким числом. Часто при решении практических задач используются треугольные нечеткие числа, являющиеся, по существу, линейным приближением нечетких чисел более сложного вида. Мы в дальнейшем будем использовать такого типа линейные приближения.

Треугольным нечетким числом $\widehat{D}$ называется тройка $\langle c, d, f \rangle$, $c \le d \le f$ действительных чисел, посредством которых его функция принадлежности $\mu_{\widehat{D}}(u)$ определяется следующим образом:

$$\mu_{\widehat{D}}(u) = \begin{cases} \dfrac{u-c}{d-c}, \text{если } u \in [c, d], \\ \dfrac{f-u}{f-d}, \text{если } u \in [d, f], \\ 0 \quad , \text{ иначе.} \end{cases}$$

Второе число тройки $\langle c, d, f \rangle$ обычно называют модой или четким значением нечеткого треугольного числа $\widehat{D}$, $\mu_{\widehat{D}}(d) = 1$. Числа c и f характеризуют степень нечеткости (размытости) четкого числа.

Следуя [46–58], введем некоторые понятия нечеткой логики. В нечеткой логике рассматриваются нечеткие высказывания, которые могут быть истинными или ложными в какой-то степени. Степень истинности нечеткого высказывания принимает значения из замкнутого промежутка [0; 1], при этом 0 совпадает со значением «ложь», 1 – со значением «истина».

Рассмотрим некоторое нечеткое высказывание A, степень его истинности обозначим $\mu(A)$.

Конъюнкцией нечетких высказываний A и B (записывается $A \wedge B$ и читается «A и B») называется логическая операция, результатом которой является нечеткое высказывание, для которого

$$\mu(A \wedge B) = min\{\mu(A), \mu(B)\}.$$

Дизъюнкцией нечетких высказываний A и B (записывается $A \vee B$ и читается «A или B») называется логическая операция, результатом которой является нечеткое высказывание, для которого

$$\mu(A \vee B) = max\{\mu(A), \mu(B)\}.$$

Пусть G есть множество всех матричных игр с m стратегиями у первого игрока и n стратегиями у второго. Это множество будем рассматривать как универсальное множество, на котором заданы нечеткие множества – нечеткие матричные игры, игры, в которых выигрыши являются нечеткими и задаются нечеткими числами (для простоты треугольными). Функцию принадлежности нечеткой матричной игры $\widehat{g}$ обозначим $\mu_{\widehat{g}}(g), g \in G$. Поскольку матричная игра однозначно определяется матрицей выигрышей, то будем считать, что $g = A(g)$, и тогда $\mu_{\widehat{g}}(g) = \mu_{\widehat{g}}(A(g))$.

Рассмотрим нечеткую матричную игру $\widehat{g}$ с m стратегиями у первого игрока и n стратегиями у второго. Пусть выигрыши первого игрока в ней являются нечеткими треугольными числами

$\widehat{D}_{ij}(\widehat{g}) = \langle c_{ij}(\widehat{g}), d_{ij}(\widehat{g}), f_{ij}(\widehat{g}) \rangle$ ($i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$)

с функциями принадлежности $\mu_{ij}^{\widehat{g}}(u)$.

Будем предполагать, что $c_{ij}(\widehat{g}) < d_{ij}(\widehat{g}) < f_{ij}(\widehat{g})$ или $c_{ij}(\widehat{g}) = d_{ij}(\widehat{g}) = f_{ij}(\widehat{g})$. В первом случае

$$\mu_{ij}^{\widehat{g}}(u) = \begin{cases} \dfrac{u - c_{ij}(\widehat{g})}{d_{ij}(\widehat{g}) - c_{ij}(\widehat{g})}, \text{если } c_{ij}(\widehat{g}) \le u \le d_{ij}(\widehat{g}), \\ \dfrac{f_{ij}(\widehat{g}) - u}{f_{ij}(\widehat{g}) - d_{ij}(\widehat{g})}, \text{если } d_{ij}(\widehat{g}) \le u \le f_{ij}(\widehat{g}), \\ \quad 0 \ , \qquad \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

во втором случае

$$\mu_{ij}^{\widehat{g}}(u) = \begin{cases} 1, \text{если } u = d_{ij}(\widehat{g}), \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

Рассмотрим игру $g \in G$ с матрицей выигрышей $A(g)$. Значения функций принадлежности в нечеткой игре $\widehat{g}$ для выигрышей из $A(g)$ будем обозначать $h_{ij}(g)$: $h_{ij}(g) = \mu_{ij}(H_{ij}(g))$. Отметим, что равенство $h_{ij}(g) = \mu_{ij}(H_{ij}(g))$, рассматриваемое как уравнение относительно $H_{ij}(g)$, кроме ситуации, когда $h_{ij}(g) = 1$, имеет два решения – одно больше $d_{ij}(\widehat{g})$, другое – меньше.

В соответствии с определением конъюнкции в нечеткой логике имеем:

$$\mu_{\widehat{g}}(A(g)) = \min_{i,j} \mu_{ij}(H_{ij}(g)).$$

Рассмотрим нечеткую матричную игру $\widehat{g}$ с матрицей выигрышей

$\widehat{A}(\widehat{g}) = \left\| \widehat{D}_{ij}(\widehat{g}) \right\|_{i,j=1}^{m,n}$.

Обозначим через $F^{ij}(\widehat{g})$ множество таких матриц выигрышей $A^{ij}(\widehat{g})$, что в игре с матрицей выигрышей $A^{ij}(\widehat{g}) \in F^{ij}(\widehat{g})$ ситуация (i, j) является седловой точкой.

Обозначим через $A_0^{ij}(\widehat{g})$ матрицу, для которой выполняется равенство:

$$\mu_{\widehat{g}}\left(A_0^{ij}(\widehat{g})\right) = \max_{A \in F^{ij}(\widehat{g})} \mu_{\widehat{g}}(A).$$

Величину $\mu_{\widehat{g}}\left(A_0^{ij}(\widehat{g})\right)$ будем рассматривать как степень надежности того, что ситуация (i, j) в рассматриваемой нечеткой игре $\widehat{g}$ является седловой точкой, что следует из определения дизъюнкции в нечеткой логике.

Решением рассматриваемой нечеткой игры $\widehat{g}$ будем считать ситуацию (i, j), для которой степень надежности того, что она является седловой точкой, максимальна.

Достоинством предлагаемого подхода является то, что любая игра имеет решение в чистых стратегиях, чего нельзя сказать о классическом подходе. Его недостатком – то, что максимальное значение надежности может оказаться равным нулю. Но если пересечение всех носителей нечетких множеств, задающих выигрыши, не пусто и содержит более одной точки, то указанное значение будет больше нуля.

Напомним [46], что носителем нечеткого множества называется подмножество всех таких точек универсального множества, для которых функция принадлежности рассматриваемого нечеткого множества больше нуля.

Следует отметить, что если дана игра с четкими выигрышами, имеющая седловую точку, то, рассматривая ее как игру с нечеткими выигрышами $\widehat{D}_{ij} = \left\langle d_{ij}, d_{ij}, d_{ij} \right\rangle$, в качестве решения получим эту седловую точку.

Задача по отысканию указанного решения игры сводится к решению последовательности пар задач линейного программирования – по паре для каждой ситуации.

Рассмотрим нечеткую игру $\widehat{g}$ с нечеткой матрицей выигрышей $\widehat{A}(\widehat{g}) = \left\| \widehat{D}_{ij}(\widehat{g}) \right\|_{i,j=1}^{m,n}$ и ситуацию (i_0, j_0). Пусть

$$A_0^{i_0 j_0}(\widehat{g}) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

такая матрица выигрышей в игре $\widehat{g}$, что $\mu_{\widehat{g}}\left(A_0^{i_0 j_0}(\widehat{g})\right)$ есть максимальная степень надежности того, что ситуация (i_0, j_0) в рассматриваемой нечеткой игре $\widehat{g}$

является седловой точкой, и пусть $\mu_{\widehat{g}}\left(A_0^{i_0 j_0}(\widehat{g})\right) = u_0$.

Для того, чтобы эта ситуация (i_0, j_0) была бы седловой точкой в игре с матрицей выигрышей $A_0^{i_0 j_0}(\widehat{g})$ требуется, чтобы выполнялись неравенства:

$\beta_{i_0 j_0} \le \beta_{i_0 j}$, $j = 1,2,\ldots,n$,

$\beta_{i_0 j_0} \ge \beta_{i j_0}$, $i = 1,2,\ldots,m$,

$u_0 \le \mu_{ij}(\beta_{ij})$, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,n$,

$$0 \le u_0 \le 1,$$
$$c_{ij} \le \beta_{ij} \le f_{ij},\ i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n$$
$$\beta_{ij} = d_{ij}(\widehat{g}),\ i = 1,2,...,m,\ i \ne i_0,\ j = 1,2,...,n,\ j \ne j_0.$$

Достаточным требованием для выполнения этих неравенств является: либо $u_0 = 0$; либо u_0 является решением задачи (1); либо u_0 является решением задачи (2).

Задачи (1) и (2) возникают по той причине, что функции принадлежности линейно возрастают на интервалах $\lfloor c_{ij}, d_{ij} \rfloor$ и линейно убывают на $\lfloor d_{ij}, f_{ij} \rfloor$.

При рассмотрении ситуации (i, j_0) при $i \ne i_0$ выигрыш в ней мы разве что увеличиваем и можно ограничиться интервалом $\lfloor d_{ij}, f_{ij} \rfloor$, что однозначно определяет вид соответствующего неравенства. Для ситуации (i_0, j) при $j \ne j_0$ выигрыш в ней разве что уменьшаем и можно ограничиться интервалом $\lfloor c_{ij}, d_{ij} \rfloor$. В ситуации же (i_0, j_0) выигрыш может быть надо увеличить, а может быть уменьшить.

Пример. Дана нечеткая игра $\widehat{g}$. Предполагается, что выигрыши игроков задаются нечеткими числами, для простоты (треугольными). Дана матрица игры *A* (в ней указаны моды соответствующих нечетких чисел):

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 10 \\ 8 & 4 & 3 \end{pmatrix} /$$

Эта игра не имеет седловой точки (в чистых стратегиях). Оптимальными смешанными стратегиями являются: $P = (2/3, 1/3)$ для первого игрока и $Q = (1/2, 1/2, 0)$ для второго, цена игры равна 6.

Предполагается, что выигрыш первого игрока в ситуации (i, j) является нечетким числом $\widehat{D}_{ij} = \langle c_{ij}, d_{ij}, f_{ij} \rangle$ значения чисел c_{ij}, d_{ij}, f_{ij} указаны в табл. 1:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
u \to max, \\
u \le \dfrac{f_{i_0 j}(\widehat{g}) - \beta_{i_0 j}}{f_{i_0 j}(\widehat{g}) - d_{i_0 j}(\widehat{g})},\ j = 1,2,...,n,\ j \ne j_0, \\
\dfrac{f_{i_0 j}(\widehat{g}) - \beta_{i_0 j}}{f_{i_0 j}(\widehat{g}) - d_{i_0 j}(\widehat{g})} \le 1,\ j = 1,2,...,n,\ j \ne j_0, \\
u \le \dfrac{\beta_{ij_0} - c_{ij_0}(\widehat{g})}{d_{ij_0}(\widehat{g}) - c_{ij_0}(\widehat{g})},\ i = 1,2,...,m,\ i \ne i_0, \\
\dfrac{\beta_{ij_0} - c_{ij_0}(\widehat{g})}{d_{ij_0}(\widehat{g}) - c_{ij_0}(\widehat{g})} \le 1,\ i = 1,2,...,m,\ i \ne i_0, \\
u \le \dfrac{f_{i_0 j_0}(\widehat{g}) - \beta_{i_0 j_0}}{f_{i_0 j_0}(\widehat{g}) - d_{i_0 j_0}(\widehat{g})}, \\
\dfrac{f_{i_0 j_0}(\widehat{g}) - \beta_{i_0 j_0}}{f_{i_0 j_0}(\widehat{g}) - d_{i_0 j_0}(\widehat{g})} \le 1, \\
\beta_{i_0 j_0} \le \beta_{i_0 j},\ j = 1,2,...,n,\ j \ne j_0, \\
\beta_{i_0 j_0} \ge \beta_{ij_0},\ i = 1,2,...,m,\ i \ne i_0, \\
c_{ij} \le \beta_{ij} \le f_{ij},\ i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n.
\end{array}
\right. \tag{1}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
u \to max, \\
u \le \dfrac{f_{i_0 j}(\widehat{g}) - \beta_{i_0 j}}{f_{i_0 j}(\widehat{g}) - d_{i_0 j}(\widehat{g})},\ j = 1,2,...,n,\ j \ne j_0, \\
\dfrac{f_{i_0 j}(\widehat{g}) - \beta_{i_0 j}}{f_{i_0 j}(\widehat{g}) - d_{i_0 j}(\widehat{g})} \le 1,\ j = 1,2,...,n,\ j \ne j_0, \\
u \le \dfrac{\beta_{ij_0} - c_{ij_0}(\widehat{g})}{d_{ij_0}(\widehat{g}) - c_{ij_0}(\widehat{g})},\ i = 1,2,...,m,\ i \ne i_0, \\
\dfrac{\beta_{ij_0} - c_{ij_0}(\widehat{g})}{d_{ij_0}(\widehat{g}) - c_{ij_0}(\widehat{g})} \le 1,\ i = 1,2,...,m,\ i \ne i_0, \\
u \le \dfrac{\beta_{i_0 j_0} - c_{i_0 j_0}(\widehat{g})}{d_{i_0 j_0}(\widehat{g}) - c_{i_0 j_0}(\widehat{g})}, \\
\dfrac{\beta_{i_0 j_0} - c_{i_0 j_0}(\widehat{g})}{d_{i_0 j_0}(\widehat{g}) - c_{i_0 j_0}(\widehat{g})} \le 1, \\
\beta_{i_0 j_0} \le \beta_{i_0 j},\ j = 1,2,...,n,\ j \ne j_0, \\
\beta_{i_0 j_0} \ge \beta_{ij_0},\ i = 1,2,...,m,\ i \ne i_0, \\
c_{ij} \le \beta_{ij} \le f_{ij},\ i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n.
\end{array}
\right. \tag{2}
$$

Таблица 1

Характеристики нечетких выигрышей

$\widehat{D}_{ij}$	c_{ij}	d_{ij}	f_{ij}
$\widehat{D}_{11}$	4	5	8
$\widehat{D}_{12}$	3	7	9
$\widehat{D}_{13}$	5	10	13
$\widehat{D}_{21}$	4	8	12
$\widehat{D}_{22}$	2	4	7
$\widehat{D}_{23}$	2	3	5

Функции принадлежности нечетких выигрышей указаны в табл. 2.

Таблица 2

Функции принадлежности

$\widehat{D}_{ij}$	Функция $\mu_{ij}(x)$ на интервале	
	(c_{ij}, d_{ij})	(d_{ij}, f_{ij})
$\widehat{D}_{11}$	$x-4$	$(8-x)/3$
$\widehat{D}_{12}$	$(x-3)/4$	$(9-x)/2$
$\widehat{D}_{13}$	$(x-5)/5$	$(13-x)/3$
$\widehat{D}_{21}$	$(x-4)/4$	$(12-x)/4$
$\widehat{D}_{22}$	$(x-2)/2$	$(7-x)/3$
$\widehat{D}_{23}$	$x-2$	$(5-x)/2$

Расчеты показали максимум степени надежности того, что игра, в которой ситуация (1,1) является равновесной, равен 4/7, при этом $\beta_{11} = \beta_{21} = 44/7$. В качестве значений остальных β_{ij} можно взять, например, H_{ij}:

	b_1	b_2	b_3
a_1	44/7*	7	10
a_2	44/7	4	3

Здесь и далее седловые точки отмечены звездочками.

Максимум степени надежности того, что игра, в которой ситуация (2,3) является равновесной, равен 0, например:

	b_1	b_2	b_3
a_1	5	7	5
a_2	8	6	5*

Максимум степени надежности того, что игра, в которой ситуация (2,1) является равновесной, равен 1/6, например:

	b_1	b_2	b_3
a_1	25/6	7	10
a_2	14/3*	6,5	14/3

Для ситуации (1,2) максимум степени надежности равен 5/7, например, в игре с матрицей

	b_1	b_2	b_3
a_1	41/7	41/7*	10
a_2	8	4	3

Для ситуации (1,3) максимум степени надежности равен 3/8, например, в игре с матрицей

	b_1	b_2	b_3
a_1	55/8	7	55/8*
a_2	8	4	3

Для ситуации (2,2) максимум степени надежности равен 1/3, например, в игре с матрицей

	b_1	b_2	b_3
a_1	5	13/3	10
a_2	8	13/3*	13/3

Сравнивая шесть полученных результатов, получаем окончательный ответ: ситуация (1,2) является седловой точкой с максимальной степенью надежности, которая равна 5/7.

В качестве выводов отметим:

– в вырожденном случае, когда выигрыши являются по существу четкими числами, $\left(\alpha_{ij} = \left\langle b_{ij}, b_{ij}, b_{ij} \right\rangle\right)$ и игра имеет седловую точку, рассматриваемый подход в качестве решения дает эту же седловую точку;

– предложенное решение существует всегда;

– предложенное решение хотя и всегда существует, но его степень надежности может оказаться равной нулю, и это не такая уж редкость. Например, когда $\alpha_{ij} = \left\langle b_{ij}, b_{ij}, b_{ij} \right\rangle$ и игра не имеет седловой точки. Кроме того, в этом случае решением является любая ситуация.

В плане дальнейшего развития изложенного подхода, на наш взгляд, представляют интерес следующие направления исследований:

– обобщение результатов на произвольные нечеткие величины;

– нахождение условий, при которых степень надежности ситуации, являющейся решением, не меньше заданной величины;

– построение решения, основываясь на идеях Заде – Беллмана [2], с учетом степени принадлежности рассматриваемой ситуации нечеткой цели;

– обобщение результатов на случай бескоалиционных игр с конечным числом игроков и на случай игр с несколькими матрицами выигрышей у каждого из игроков.

Таким образом, в представленной статье на множестве присущих экономическим системам ситуаций строится нечеткое множество. Значениями его функции принадлежности является максимальное на рассматриваемом универсальном множестве игр значение надежности того, что рассматриваемая ситуация является седловой точкой. Ситуация, для которой указанное значение максимально, предлагается считать решением рассматриваемой нечеткой игры. Для случая, когда выигрыши задаются треугольными нечеткими числами, предлагается подход к отысканию решения, использующий линейное программирование.

Новизна заключается в новом подходе к построению описанного нечеткого множества и, как следствие, в новом определении понятия решения для рассматриваемого класса игр.

Литература

1. J. Buckley. Multiple goals non cooperative conflict under uncertainty: a fuzzy set approach. Fuzzy Sets and Systems, 13, 1984. P. 107–124.
2. Zadeh L.H., Bellman R.E. Decition-making in a fuzzy environment. – Managem Sci., 1970, vol. 17. P.141-164.
3. I. Nishizaki, M. Sakawa. Max-min solution for fuzzy multiobjective matrix games. Fuzzy Sets and Systems, 67(1), 1994. P. 53-69.
4. I. Nishizaki, M. Sakawa. Equilibrium solutions for multiobjective bimatrix games incorporating fuzzy goals. Journal of optimization theory and applications, 86(2), 1995. P. 433-457.
5. I. Nishizaki M. Sakawa. Equilibrium solutions in multiobjective bimatrix games with fuzzy payoffs and fuzzy goals. Fuzzy Sets and Systems, volume 111, issue 1, 2000. P. 99-116.
6. I. Nishizaki, M. Sakawa. Fuzzy and Multiobjective Games for Conflict Resolution, New York: Physica-Verlag, 2001.
7. M. Aristidou, S. Sarangi. Games in fuzzy environments. Southern Economic Journal, 72(3), 2006. P. 645-659.
8. A. Cevikel, M. Ahlatcioglu. A linear Interactive Solution Concept for Fuzzy Multiobjective Games. European Journal of Pure and Applied Mathematics, 3(1), 2010. P. 107-117.
9. *Серая О.В., Каткова Т.И.* Задача теории игр с нечеткой платежной матрицей. Математические машина и системы. – 2012. – №2. – С. 29–36.
10. I. Nishizaki, H. Yano. Interactive Fuzzy Approaches for Solving Multiobjective Two-Person Zero-Sum Games, Applied Mathematics, vol.7 no.5, 2016. P. 387-398/
11. S. Kumar. Max-min solution approach for multi-objective matrix game with fuzzy goals. Yugoslav Journal of Operations Research, 26 (2016), number 1. P. 51-60.
12. L. Campos. Fuzzy linear programming models to solve fuzzy matrix games. Fuzzy Sets and Systems, 32 (3), 1989. P. 275–289.
13. T. Maeda. On characterization of equilibrium strategy of two-person zero-sum games with fuzzy payoffs. Fuzzy Sets and Systems,139 (2003). P. 283–296.
14. V. Vijay, A. Mehra, S. Chandra . C. R. Bector. Fuzzy matrix games via a fuzzy relation approach, 2007. https://www.academia.edu/26211379/Fuzzy_matrix_games_via_a_fuzzy_relation_approach
15. A. Chakeri, A. Dariani, C. Lucas. How can fuzzy logic determine game equilibriums better. Intelligent Systems (IS'08), 4-th International IEEE Conference, vol. 1, 2008. P. 2-51-2-56.
16. A. Chakeri, N. Sadati, S. Sharifian. Fuzzy Nash equilibrium in fuzzy games using ranking fuzzy numbers. IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ), 2010. P. 1-5.
17. A. Chakeri, N. Sadati, Guy A. Dumont. Nash Equilibrium Strategies in Fuzzy Games. 2013. https://www.intechopen.com/books/game-theory-relaunched/ nash-equilibrium-strategies-in-fuzzy-games
18. L. Cunlin Li, Z. Qiang, Nash equilibrium strategy for fuzzy non-cooperative games. Fuzzy Sets and Systems, 176(1). August 2011P. 46-55.
19. L. Cun-lin. Characterization of the Equilibrium Strategy of Fuzzy Bimatrix Games Based on L-R Fuzzy Variables. 2012. http://dx.doi.org/10.1155/2012/824790.
20. *Василевич Л.Ф.* Решение нечётких матричных игр. zavantag.com /docs/2010/index-21314.html

21. D. Qiu, W. Zhang, Y. Xing. Multi-objective Fuzzy Bi-matrix Game Model. 2017. https://www.researchgate.net/publication/319134352_Multi-objective_Fuzzy_ Bi-matrix_Game_Model_A_Multicriteria_Non-Linear_Programming_Approach
22. K. N. Kudryavtsev, I. S. Stabulit, V. I. Ukhobotov. A Bimatrix Game with Fuzzy Payoffs and Crisp Game, 2017. https://www.researchgate.net/publication/321084657_A_Bimatrix_Game_with_Fuzzy_Payoffs_and_Crisp_Game
23. D. Qiu , Y. Xing, S. Chen. Solving fuzzy matrix games through a ranking value function method. J. Math. Computer Sci., 18 (2018). P. 175–183.
24. D.-F. Li. A fuzzy multi-objective approach to solve fuzzy matrix games, The Journal of Fuzzy Mathematics, 7, 1999. P. 907–912.
25. V. Vijay, S. Chandra, C. R. Bector. Bimatrix games with fuzzy payoffs and fuzzy goals. Fuzzy Optimization and Decision Making, 3, 2004. P. 327–344.
26. B. Dutta, S. Gupta. On Nash equilibrium strategy of two-person zero-sum games with trapezoidal fuzzy payoffs. Fuzzy Information and Engineering, 6(3). P. 299-314.
27. Mijanur Rahaman Seikh, Prasun Kumar Nayak, Madhumangal Pal. An alternative approach for solving fuzzy matrix games. International Journal of Mathematics and Soft Computing, vol.5, no. 1, 2015. P. 79–92.
28. S. Lui, C. Kao. Solution of fuzzy matrix games: an application of the extension principle. International Journal of Intelligent Systems, 22, 2007. P. 891–903.
29. J. Buckley, L. Jowers. Fuzzy two-person zero-sum games, in: J.J. Buckley, L.J. Jowers (Eds.), Monte Carlo Methods in Fuzzy Optimization, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008. P. 165–173.
30. Laxminarayan Sahoo, Effect of defuzzification methods in solving fuzzy matrix games, Received: 22.05.2015 Published: 11.11.2015 Year: 2015, number: 8, pages: 51-64 Original Article, Journal of New Theory.
31. Laxminarayan Sahoo. An approach for solving fuzzy matrix games using signed distance method. ISSN 1746-7659, England, UK Journal of Information and Computing Science, vol. 12, no. 1, 2017. P. 073-080.
32. T. Stalin, M. Thirucheran. Solving Fuzzy Matrix Games Defuzzificated by Trapezoidal Parabolic Fuzzy Numbers. International Journal for Scientific Research & Development. Vol. 3, Issue 10, 2015. ISSN (online): 2321-061, P. 1006-1010.
33. C. R. Bector S. Chandra, V. Vijay. Duality in linear programming with fuzzy parameters and matrix games with fuzzy payoffs, Fuzzy Sets and Systems, 146, 2004. P. 253-269.
34. V. Vijay, S. Chandra, C. R. Bector. Matrix Games with Fuzzy Goals and Fuzzy Payoffs. Omega. vol. 33, 2004, P. 425-429.
35. A. Chakeri, S. Sharifian, F. Sheikholeslam. Linguisitic representation of Nash equilibriums in fuzzy games, 2010. https://www.researchgate.net/publication/251946853_Linguisitc_representation_of_Nash_equilibriums_in_fuzzy_games
36. D. Garagic, J. Cruz (2003). An Approach to Fuzzy Non-Cooperative Nash Games. J. Optim. Theory Appl. 118: 475-491.
37. L. Xu, R. Zhao, T. Shu, Three equilibrium strategies for two-person zero-sum games with fuzzy payoffs, in: L. Wang, Y. Jin (Eds.), Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, Springer, Heidelberg, 2005, p. 350–354.
38. A. Chakeri, F. Sheikholeslam. Fuzzy Nash Equilibriums in Crisp and Fuzzy Games, IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 21(1), 2013. P. 171-176.
39. Q. Song, A. Kandel (1999). A Fuzzy Approach to Strategic Games. IEEE Trans. Fuzzy Syst. 7: 634-642.
40. C. R. Bector, S. Chandra. Fuzzy mathematical programming and fuzzy matrix games. Springer Verlag, Berlin, Germany, 2005. bookfi.net/book/490613
41. M. Larbani, (2009). Non cooperative fuzzy games in normal form: A survey. Fuzzy Sets and Systems, 160(22), P. 3184-3210.

42. *Петросян Л.А*. Теория игр: Учеб. пособие для ун-тов:/ Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина. – М.: Высш. шк., Книжный дом «Университет», 1998. – 304 с.
43. Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970. – 707 с.
44. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982. – 429 с.
45. Zadeh L.A. Fuzzy sets. – Information and Control, 1965, v. 8, № 3, P. 338-353.
46. *Штовба С.Д*. Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику. – Винница: УНИВЕРСУМ-Винница, 2001. – 71 с.
47. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 166 с.
48. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 206 с.
49. *Тэрано Т., Асаи К., Сугэно М.* Прикладные нечёткие системы. – М.: Мир, 1993. – 368 с.
50. *Черных А.К., Козлова И.В., Вилков В.Б.* Вопросы прогнозирования материально-технического обеспечения с использованием нечётких математических моделей //Проблемы управления рисками в техносфере. – 2015. – № 4 (36). – С. 107–117.
51. *Вилков В.Б., Черных А.К., Гарькушев А.Ю., Сазыкин А.М.* Оценка качества решений на применение внутренних войск на основе многокритериальной оптимизации // Вопросы оборонной техники. Серия 16: Технические средства противодействия терроризму. – 2016. – № 1-2 (91-92). – С. 43–50.
52. *Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г., Воробьев А.С., Гасюк Д.П., Сосюра О.В*. Основы теории эффективности боевых действий ракетных войск и артиллерии. – М.: Министерство обороны РФ, 2003. – 168 с.
53. *Черных А.К., Вилков В.Б.* Управление безопасностью транспортных перевозок при организации материального обеспечения сил и средств МЧС России в условиях чрезвычайной ситуации // Пожаровзрывобезопасность. – 2016. – Т. 25. – № 9. – С. 52–59.
54. *Анисимов В.Г., Гарькушев А.Ю., Сазыкин А.М.* Оптимизация внедрения новых технологий в перспективные образцы артиллерийского вооружения // Известия Российской академии ракетных и артиллерийских наук. – 2012. – № 4 (74). – С. 39–44.
55. *Балясников В.В., Ведерников Ю.В., Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г.* Модель причинного анализа на основе использования данных об особых ситуациях // Вопросы оборонной техники. Серия 16: Технические средства противодействия терроризму. – 2015. – № 1-2 (79-80). – С. 31–38.
56 *Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г., Богоева Е.М.* Формализация процедуры риск-ориентированного подхода при выполнении государственными органами контрольных функций // Вестник Российской таможенной академии. – 2014. – № 4. – С. 96–102.
57. *Тебекин А.В., Тебекин П.А.* Классификация методов принятия управленческих решений на основе оптимизации показателей эффективности // Журнал исследований по управлению. – 2018. – Т. 4. – № 4. – С. 13–24.
58. *Тебекин А.В., Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г.* Нелинейная модель оптимизации параметрических рядов в системах управления. // Вестник Российской таможенной академии. – 2015. – № 3 (32). – С. 115–122.