

Стержневая система с сосредоточенными массами как расчетная модель сферического движения летательного аппарата

Core system with concentrated masses as a calculated model of the spherical movement of the aircraft

Самонов С.А.

канд. техн. наук, начальник технического отдела
e-mail: samonsergey@mail.ru

Samonov S.A.

Candidate of Technical Sciences, Head of Technical Department
e-mail: samonsergey@mail.ru

Аннотация

Статья посвящена теоретическому обоснованию метода замещения распределенных масс сосредоточенными применительно к расчетам сферического вращения тел произвольной формы, например, летательных аппаратов. В качестве апробации метода представлена модель вращения тонкостенной сферы вокруг неподвижной точки. Поверхность сферы разбита на равные квадраты, которые замещаются точечными массами, закрепленными на концах трех ортогональных стержней. Такая стержневая конструкция называется пространственным балансиром.

Балансир вращается в рамках двойного карданного подвеса. Вычисляются координаты и скорости точечных масс при собственном вращении, нутации, прецессии, определяется кинетическая энергия системы, составляются уравнения Лагранжа. Из уравнений следует, что: инерционные свойства сферы и балансира эквивалентны, поскольку формулы моментов инерции совпадают; движения системы масс определяются внешними воздействиями на рамки и силами инерции – переносными и Кориолиса; после прекращения воздействия суммарная кинетическая энергия балансира остается постоянной, происходит непрерывный обмен энергией между прецессией и нутацией в форме незатухающих механических колебаний; уравнения движений адекватно описывают большинство известных гироскопических эффектов, в том числе безынерционную остановку прецессионного движения и устойчивого сохранения балансира углового положения, заданного при его раскрутке. Полученные результаты могут быть использованы в аналитических исследованиях и инженерных расчетах летательных аппаратов и гироскопических приборов.

Ключевые слова: рассредоточенная масса, сосредоточенная масса, вращение вокруг неподвижной точки (сферическое), замещение, балансир, двойной карданный подвес, уравнения Лагранжа, инерционная эквивалентность, нутация, прецессия, безынерционная остановка, гироскопические эффекты.

Abstract

The article is devoted to the theoretical substantiation of the method of replacing distributed masses with concentrated masses, as applied to the calculations of a spherical rotation of the bodies of arbitrary shape, for example, aircraft. As the testing method presented model – rotation of a thin-walled sphere around a fixed point. The surface of sphere is divided into equal squares, that

replacing point masses and fixed to the ends of three orthogonal rods. Such a core structure is called a spatial balancer.

The balancer rotates within double gimbal suspension. The coordinates and velocities of point masses at own, nutation, precession rotate are calculated, the kinetic energy determined by the system, compiled of the Lagrangian equation. Of the equations it follows that: the inertial properties of the sphere and the balancer are equivalent, because formulas of the moments of inertia coincide; the movement of the masses system is determined by external actions on the frame and the forces of inertia - portable and Coriolis; after cessation of exposure the total kinetic energy balance remains constant, there is a continuous exchange of energy between the precession and nutation in the form of mechanical vibrations undamped; the equations movements adequately describe most of the known gyroscopic effects, including the inertialess stop of the precessional motion and the stable conservation by the balanceres angular position, given during its promotion. The results can be used in analytical studies and engineering calculations of aircraft and gyroscopic instruments.

Keywords: distributed mass, concentrated mass, rotation around a fixed point (spherical), substitution, balance weight, double gimbal, Lagrange equations, inertial equivalence, nutation, precession, inertialess stop, gyroscopic effects

Задачи, связанные с движением твердого тела вокруг неподвижной точки (сферического), относятся к классической механике и решаются уже не одно столетие. В эволюции данной проблемы можно условно выделить три составляющие:

- разработка и непрерывное совершенствование теоретических основ, заложенных, в свое время, Л. Эйлером и Ж. Лагранжем;
- практическое приложение результатов к техническому управлению – гироскопии и навигации;
- распространение классических методов на задачи современного этапа – изучения движения скоростных летательных аппаратов, спутников, космических кораблей [1].

Для оценки нагрузок на несущие конструкции скоростного летательного аппарата при сложном маневрировании или в аварийных режимах требуется расчетная модель, учитывающая все виды силовых воздействий, которые могут возникнуть в сложном движении, общем случае – свободном. Исходя из того, что наиболее неблагоприятное сочетание силовых факторов (одновременное действие центробежных сил, гироскопических моментов, переносных сил инерции) характерно для отрезков времени, когда аппарат совершает сферические движения, целесообразно рассмотреть именно этот случай. В работах по динамике вращающихся тел с одной закрепленной точкой, в основу анализа положены динамические уравнения Эйлера [2], [3], оперирующие инерционными параметрами распределенной массы – осевыми и центробежными моментами инерции. Считается, что полученные из них решения исчерпывающим образом описывают изучаемые явления. Однако, кроме того, что они достаточно абстрактны и не адаптированы для инженерных расчетов, некоторые результаты, например, обоснование безынерционности остановки прецессионного движения, устойчивости гироскопа к резкому удару, сохранению пространственного положения, заданного при раскрутке, выглядят недостаточно детализированными. Теория волчков Ф.Ф. Лендера, разработанная для упрощения понимания их динамики, также представляется не вполне доступной альтернативой. В частности, в работе [4] им был использован метод замещения объемного тела с распределенной массой, системой эквивалентных сосредоточенных масс. Такой подход широко применяется в теоретической механике и позволяет описывать движение объемного

тела наглядными уравнениями Лагранжа второго рода, для системы замещающих точечных масс [5]. Члены уравнений дают полное представление о характере действующих сил и закономерностях движения тела. Применительно к летательному аппарату, такой метод предусматривает его разбиение на участки замещения и аналитическое определение координат и скоростей точечных масс, при его вращении вокруг неподвижной точки. Апробируем данный метод анализом гироскопических явлений, возникающих при вращении твердого тела, например, тонкостенной сферы.

Разобьем поверхность сферы радиусом R и массой M на шесть одинаковых сферических квадрата. Примем, что масса квадратов сосредоточена в точечных массах $m = M/6$, расположенных в точках пересечения поверхности сферы и координатных осей, на расстоянии R от центра (рис. 1а). Заместим сферу телом, состоящим из трех, скрепленных между собой, ортогональных стержней с точечными массами на концах (рис. 1б).

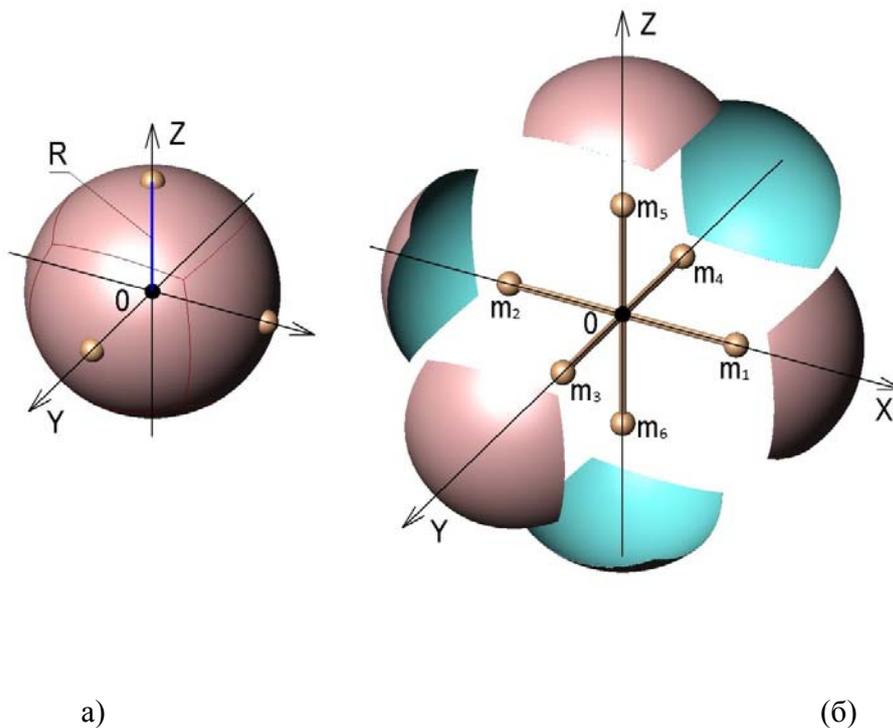


Рис. 1. Разбиение сферы на участки (а) и замещение их точечными массами (б)

Назовем эту конструкцию пространственным стержневым балансиром. Определим движение балансира при его вращении вокруг неподвижной точки O центра сферы. Для этого присоединим балансир к оси, вращающейся во внутренней рамке двойного карданного подвеса, как показано на рис. 2. Свяжем с внутренней рамкой подвижную систему координат x, y, z , а с точкой O – неподвижную X, Y, Z . Поворот внутренней рамки в шарнирах $b-b$ (нутация) обозначается углом θ . Поворот внешней рамки в шарнирах $c-c$ (прецессия)

обозначается углом ψ . Поворот оси балансира в шарнирах $a-a$ (собственное вращение) обозначается углом поворота φ .

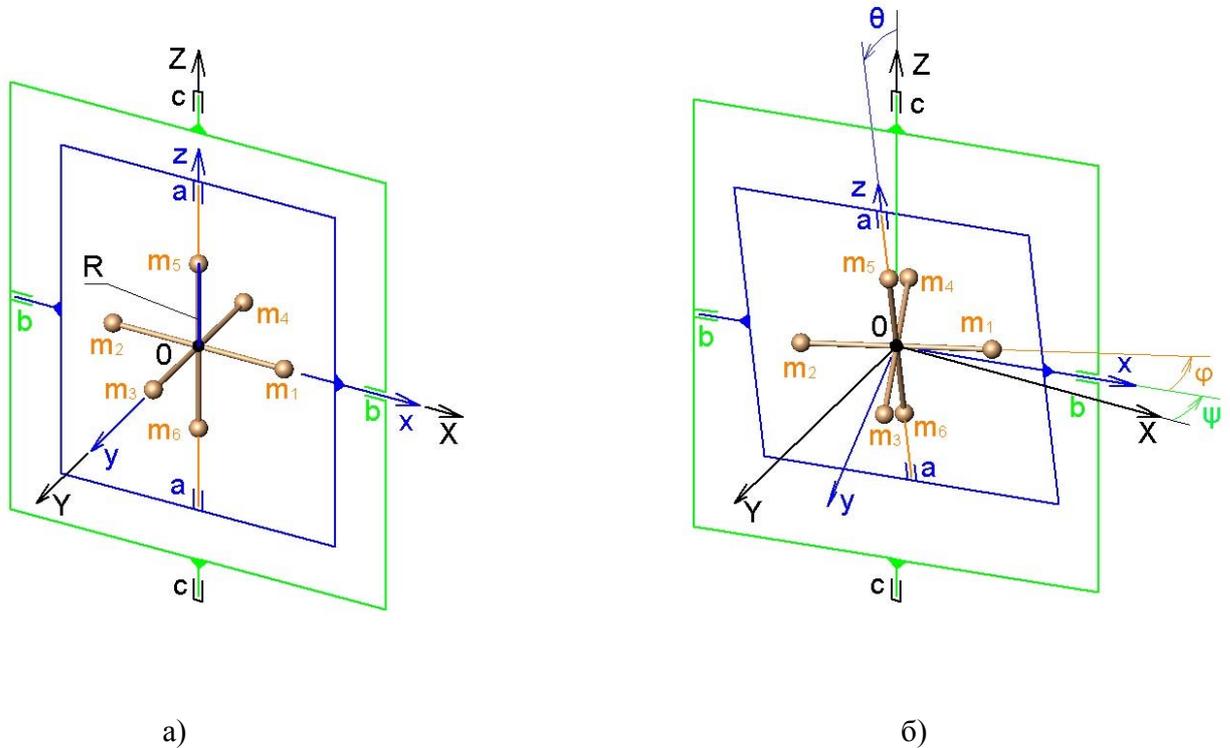


Рис. 2. Пространственный балансира в двойном карданном подвесе.

В начальном положении (а) при повороте на произвольные углы: собственного вращения $-\varphi$, нутации $-\theta$ и прецессии $-\psi$ (б)

Найдем координаты и скорости точечных масс в одновременных движениях собственного вращения, нутации и прецессии. Проекции положений точечных масс $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ в плоскостях OXY и OXZ абсолютной системы координат:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 = R \cos \varphi \cos \psi - R \sin \varphi \cos \theta \sin \psi ; \\ y_1 &= -y_2 = -R \cos \varphi \sin \psi - R \sin \varphi \cos \theta \cos \psi ; \\ z_1 &= -z_2 = R \sin \varphi \sin \theta ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= -x_4 = -R \sin \varphi \cos \psi - R \cos \varphi \cos \theta \sin \psi ; \\ y_3 &= -y_4 = R \sin \varphi \sin \psi - R \cos \varphi \cos \theta \cos \psi ; \\ z_3 &= -z_4 = R \cos \varphi \sin \theta ; \end{aligned}$$

$$x_5 = -x_6 = R \sin \theta \sin \psi ;$$

$$y_5 = -y_6 = R \sin \theta \cos \psi;$$

$$z_5 = -z_6 = R \cos \theta.$$

Из этих уравнений определяются проекции скоростей грузов на координатные оси и квадраты скоростей в абсолютном движении.

$$v_{1,2}^2 = R^2 \left[\dot{\varphi}^2 + 2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \theta + (\dot{\theta} \sin \varphi)^2 - 2 \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta + (\dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta)^2 + (\dot{\psi} \cos \varphi)^2 \right];$$

$$v_{3,4}^2 = R^2 \left[\dot{\varphi}^2 + 2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \theta + (\dot{\theta} \cos \varphi)^2 + 2 \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta + (\dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta)^2 + (\dot{\psi} \sin \varphi)^2 \right];$$

$$v_{5,6}^2 = R^2 \left[\dot{\theta}^2 + (\dot{\psi} \sin \theta)^2 \right].$$

После несложных, но громоздких преобразований, выполненных с помощью ресурса Wolfram|Alpha, найдем сумму квадратов скоростей всех точечных масс:

$$2v_{1,2}^2 + 2v_{3,4}^2 + 2v_{5,6}^2 = 4\dot{\varphi}^2 + 8\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta + 4\dot{\theta}^2 + 4\dot{\psi}^2.$$

По условию, масса каждого груза равна $M/6$, массой рамок пренебрегаем, тогда кинетическая энергия балансира, при вращении вокруг точки O :

$$T = \frac{2}{3}MR^2 \left(\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 \right) / 2,$$

где $\frac{2}{3}MR^2 = J_0$ – момент инерции сферы [6].

После дифференцирования выражения для кинетической энергии в порядке, предусмотренном составлением уравнений Лагранжа второго рода, при отсутствии внешних воздействий и трения, получим следующие уравнения:

$$J_0 \left(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta \right) = 0 \quad (1);$$

$$J_0 \left(\ddot{\theta} + \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \theta \right) = 0 \quad (2);$$

$$J_0 \left(\ddot{\psi} + \ddot{\varphi} \cos \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta \right) = 0 \quad (3).$$

Произведение момента инерции сферы на произведения угловых скоростей определяют моменты сил Кориолиса [7], которые наряду с переносными силами инерции принимаются в качестве движущих в данной механической системе. Однако, по сути, переносная сила инерции не является движущей, но определяет степень вовлеченности ускоряемого тела в движение ускоряющего. В уравнении (1) момент переносной силы инерции $J_0 \ddot{\psi} \cos \theta$, в уравнении (3) $J_0 \ddot{\varphi} \cos \theta$.

Рассмотрим некоторые из характерных движений балансира при следующих предварительных условиях:

- в исходном положении внутренняя рамка повернута на угол θ , равный минус $\pi/2$;
- в таком положении балансир раскручен до угловой скорости ω_0 и, затем, вращается по инерции.

1. Вынужденная прецессия под действием, приложенная к внутренней рамке, вращающего момента $M_0 = const$.

В этом случае уравнения (1), (2), (3) будут иметь следующий вид:

$$J_0 (\ddot{\phi} + \ddot{\psi} \sin \theta + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta) = 0 \quad (4);$$

$$J_0 (\ddot{\theta} - \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \theta) = M_0 \quad (5);$$

$$J_0 (\ddot{\psi} + \ddot{\phi} \sin \theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta) = 0 \quad (6).$$

Из (4), (5), (6), путем соответствующих подстановок и преобразований, можно прийти к дифференциальному уравнению:

$$\frac{1}{2} \frac{d(\dot{\psi} \cos \theta)^2}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} - \frac{M_0}{J_0} \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

$$\text{После интегрирования: } (\dot{\psi} \cos \theta)^2 + \dot{\theta}^2 - 2M_0 \theta / J_0 = C_1 \quad (7);$$

$$\text{После интегрирования (4): } \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta = C_2 \quad (8);$$

$$\text{После интегрирования (6): } \dot{\psi} + \dot{\phi} \sin \theta = C_3 \quad (9);$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

В момент начала движения: $\dot{\phi} = \omega_0, \dot{\psi} = 0, \dot{\theta} = 0, \psi = 0, \theta = 0$, тогда из (8) и (9), с учетом начальных условий, скорость прецессии:

$$\dot{\psi} = -\omega_0 \sin \theta / (\cos \theta)^2 \quad (10).$$

Из (7), (10) скорость нутации:

$$\dot{\theta}^2 = 2M_0 \theta / J_0 - (\omega_0 \operatorname{tg} \theta)^2 \text{ или}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{2M_0 \theta / J_0 - (\omega_0 \operatorname{tg} \theta)^2},$$

при $\omega_0^2 \gg 2M_0 / J_0$, подкоренное выражение будет положительным только при достаточно малых θ , в этом случае полагают $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$ и:

$$\dot{\theta} = \sqrt{2M_0 \theta / J_0 - (\omega_0 \theta)^2}, \text{ откуда } dt = d\theta / \sqrt{2M_0 \theta / J_0 - (\omega_0 \theta)^2}.$$

После интегрирования и последующих преобразований:

$$\omega_0 t = \arcsin[(J_0 \omega_0^2 \theta / M_0) - 1] + C_4,$$

где C_4 – произвольная постоянная.

При заданных начальных условиях $C_4 = \pi/2$, тогда связь угла нутации с текущим временем примет вид:

$$\theta = (M_0/J_0 \omega_0^2)(1 - \cos \omega_0 t), \quad \dot{\theta} = (M_0/J_0 \omega_0) \sin \omega_0 t.$$

Для малых углов $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$, а значит скорость прецессии из (10):

$$\dot{\psi} = -(M_0/J_0 \omega_0)(1 - \cos \omega_0 t), \text{ а угол прецессии:}$$

$$\psi = (M_0/J_0 \omega_0^2)(\omega_0 t - \sin \omega_0 t)$$

По виду и структуре уравнение имеет сходство с зависимостью угла прецессии от времени, приведенной в работе [8]. Балансир будет совершать высокочастотные отнулевые нутационные колебания θ и вращаться вместе с наружной рамкой с, пульсирующей скоростью постоянного направления, то есть находиться в состоянии вынужденной нерегулярной прецессии [9].

Предположим, что в какой-то момент времени момент прекратил свое действие ($M_0 = 0$). Уравнение (5) изменит свой вид:

$$J_0 (\ddot{\theta} - \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \theta) = 0 \quad (11).$$

А вместе с ним изменится уравнение (7):

$$(\dot{\psi} \cos \theta)^2 + \dot{\theta}^2 = C_1 \quad (12).$$

Примем, что в момент снятия нагрузки: $\dot{\phi} = \omega_0$, $\dot{\psi} = -\omega_2$, $\psi = -\psi_2$, $\dot{\theta} = \omega_1$, $\theta = \theta_1$, тогда из (8) и (9), с учетом начальных условий, скорость прецессии:

$$\dot{\psi} = [\omega_0(\sin \theta_1 - \sin \theta) + \omega_2(\sin \theta_1 \sin \theta - 1)]/(\cos \theta)^2 \quad (13)$$

Из (12) и (13) скорость нутации:

$$\dot{\theta}^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 - [\omega_0(\sin \theta_1 - \sin \theta) + \omega_2(\sin \theta_1 \sin \theta - 1)]^2/(\cos \theta)^2 \quad (14)$$

Скорость собственного вращения роторов гироскопов несопоставимо выше скоростей нутации и прецессии $\omega_0 \gg \omega_1, \omega_2$. Это обстоятельство, а также ограничение на углы нутации: $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$, позволяют упростить выражение (14).

$$\dot{\theta}^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_0^2(\theta_1 - \theta)^2, \text{ откуда:} \quad (15)$$

$$dt = -d(\theta_1 - \theta) / \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_0^2(\theta_1 - \theta)^2}.$$

После интегрирования и последующих преобразований:

$$\omega_0 t = -\arcsin \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} (\theta_1 - \theta) + C_4,$$

где C_4 – произвольная постоянная.

При заданных начальных условиях $C_4 = 0$, тогда связь угла нутации с текущим временем примет вид:

$$\theta = \theta_1 + \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\omega_0} \sin \omega_0 t,$$

скорость нутации:

$$\dot{\theta} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \cos \omega_0 t.$$

Из (12), с учетом начальных условий и допущения $\cos \theta \approx 1$, скорость прецессии:

$$\dot{\psi} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \sin \omega_0 t.$$

Угол прецессии:

$$\psi = -\left(\psi_2 + \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{\omega_0} \cos \omega_0 t \right).$$

Таким образом, в момент снятия нагрузки с внутренней рамки балансира, находящегося в состоянии вынужденной прецессии, наружная рамка в тот же миг останавливается, обе рамки переходят в режим гармонических высокочастотных микроколебаний, со средним положением в углах, которые они занимали в момент снятия. При этом создается впечатление о так называемой безынерционной остановке подвеса балансира [10]. Этот динамический эффект можно понимать как гашение инерции прецессионного движения внутренними силами в момент смены закона движения.

Из (15) также следует, что раскрученный в повернутых на определенный угол и неподвижных внутренней и внешней рамках, балансир будет устойчиво сохранять свое положение, так как существование (возникновение) нутации невозможно в силу отрицательной величины ее квадрата.

2. Устойчивость балансира при ударе по внутренней рамке. После удара рамка приобретает мгновенную угловую скорость ω_1 . Тогда из (4), (11), (6) по аналогии с п. 1, можно определить закономерности движений:

$$\begin{aligned} \text{нутации} \quad \theta &= (\omega_1/\omega_0) \sin \omega_0 t, \dot{\theta} = \omega_1 \cos \omega_0 t, \\ \text{и прецессии} \quad \psi &= -(\omega_1/\omega_0)(1 - \cos \omega_0 t), \dot{\psi} = -\omega_1 \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

Как было отмечено ранее, при достаточно высокой угловой скорости собственного вращения, движения рамок представляют собой высокочастотные колебания очень малой амплитуды, что полностью согласуется с описанием соответствующих опытов с гироскопами [11].

3. Устойчивость балансира при ударе по внешней рамке. После удара рамка приобретает мгновенную угловую скорость ω_2 . Из (4), (11), (6) по аналогии с п. 1 найдем, что:

$$\theta = (\omega_2/\omega_0)(1 - \cos \omega_0 t), \dot{\theta} = \omega_2 \sin \omega_0 t, \\ \psi = (\omega_2/\omega_0) \sin \omega_0 t, \dot{\psi} = \omega_2 \cos \omega_0 t.$$

Таким образом, в случае вращения динамически уравновешенной сферы, при ударе по внешней рамке, прецессия по инерции (под действием внутренней пары центробежных сил от неравномерно распределенных масс) не возникает [12].

4. Из уравнения (12) следует, что при отсутствии воздействий на рамки в условиях малых колебаний:

$$(J_0/2)\dot{\psi}^2 + (J_0/2)\dot{\theta}^2 = C_1.$$

После прекращения воздействия суммарная кинетическая энергия балансира остается постоянной. Происходит непрерывный обмен энергией между прецессией и нутацией в форме незатухающих механических колебаний.

Разобранный пример динамики стержневой системы с точечными массами, в инерционном отношении эквивалентной тонкостенной сфере, указывает на принципиальную возможность использования метода замещения в других, гораздо более сложных, случаях. Представляется, что использование методов компьютерной динамики [13] в исследованиях закономерностей движения замещаемых тел позволит существенно углубить и расширить анализ, обеспечить механиков – математиков и инженеров – механиков удобным инструментом аналитического исследования динамики и предварительных расчетов элементов летательных аппаратов:

- полученные решения свидетельствуют о том, что инерционные свойства балансира и тонкостенного тела вращения – сферы эквивалентны, поскольку величины их моментов инерции совпадают;
- движения системы определяются внешними воздействиями на рамки и внутренними силами инерции – переносными и Кориолиса;
- после прекращения воздействия суммарная кинетическая энергия балансира остается постоянной, происходит непрерывный обмен энергией между прецессией и нутацией в форме незатухающих механических колебаний;
- приведенные уравнения нутации и прецессии адекватно описывают большинство известных гироскопических эффектов, в том числе, безынерционную остановку прецессионного движения и устойчивого сохранения балансиrom углового положения, заданного при его раскрутке;
- полученные результаты могут быть использованы в аналитических исследованиях и инженерных расчетах летательных аппаратов.

Литература

1. Черноусько Ф.Л. Эволюция движения твердого тела относительно центра масс/ Ф.Л.Черноусько, Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко – Москва–Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015. – 308 с.
2. Магнус К. Гироскоп. Теория и практика / К.Магнус— Москва: Издательство «Мир», 1974. – 516 с.

3. Курс теоретической механики: Учебник для вузов / В.И. Дронг [и др.]; под общ.ред. К.С. Колесникова – Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 736 с.
4. Лендер Ф.Ф. Теория волчка: Общая теория волчка в элементарном изложении/ Ф.Ф. Лендер. – Москва: ЛЕНАНД, 2017. – 136 с.
5. Яблонский А.А. Курс теоретической механики: Ч.2. Динамика / А.А.Яблонский. – Москва: Высшая школа, 1977. – 430 с.
6. Прядко Ю.Г. Теоретическая механика. Геометрия масс / Ю.Г.Прядко, В.Г.Караваяев– Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2006. – 105 с.
7. Почему, и как, прецессирует гироскоп [Электронный ресурс] / ИАТЭ НИЯУ МИФИ, кафедра О и СФ.— режим доступа: iatephysics.narod.ru/gyroscope/gyros_r.htm. Дата доступа 17.05.2018.
8. Леви–Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики: Т.2. Динамика систем с конечным числом степеней свободы. Ч.2 / Т. Леви–Чивита, У.Амальди—Москва: Изд-во Иностранная литература, 1959. – 543 с.
9. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики: Ч.2. Динамика системы материальных точек / Н.Н. Бухгольц— Москва: Наука, 1966. – 332 с.
10. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Учебное пособие: Т.1. Механика / Д.В. Сивухин— Москва: Изд-во МФТИ, 2005. – 560 с.
11. Перри Дж. Вращающийся волчок / Дж. Перри— Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 112 с.
12. Добронравов В.В. Курс теоретической механики / В.В. Добронравов, Никитин Н.Н.— Москва: Высшая школа, 1974. – 528 с.
13. Борисов А.В. Динамика твердого тела / А.В.Борисов, И.С.Мамаев— Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.