

УДК 531/534

Е.С. Цуканова

РАСЧЕТ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ДИНАМИЧЕСКОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Рассмотрен расчет вынужденных колебаний стержневых систем с помощью метода конечных элементов. Для дискретизации систем использован динамический конечный элемент, функции формы которого представляют собой точные колебательные формы элементов конструкции. Приведена оценка погрешностей расчета с применением классического конечного элемента. Показана эффективность использования динамического конечного элемента для расчета вынужденных колебаний и динамического напряженно-деформированного состояния конструкций.

Ключевые слова: метод конечных элементов, динамический конечный элемент, вынужденные колебания, стержневые системы, гармоническое возмущение, резонанс, амплитудно-частотная характеристика, напряженно-деформированное состояние.

В настоящее время наиболее распространенным методом исследования динамики систем с распределенными параметрами является метод конечных элементов (МКЭ), при использовании которого происходит дискретизация как жесткостных, так и инерционных параметров системы [1; 2]. Согласно МКЭ, конструкция разбивается на элементы, связанные между собой в узлах. Каждый узел может иметь несколько степеней свободы. Перемещения узлов принимаются за обобщенные координаты системы. Перемещение любой точки $u(x, t)$, лежащей внутри элемента, находится по перемещениям узлов g_i , с которыми связан этот элемент, т.е.

$$u(x, t) = \sum_i q_i(t) f_i(x),$$

где $f_i(x)$ – аппроксимирующие функции формы (например: базисные, координатные), выбранные таким образом, чтобы перемещения точек изменялись непрерывно как внутри элемента, так и на границах соседних элементов.

От выбора функций формы будет зависеть результат расчета. В случае динамического анализа конструкций предложено несколько подходов к назначению базисных функций [3 - 6].

Один из самых эффективных подходов описан в работе [6], где для дискретизации стержневых систем предлагается использовать динамический конечный элемент (ДКЭ), функции формы которого представляют собой точные колебательные формы элементов конструкций. Был выполнен расчет собственных частот ряда конструкций, работающих на растяжение и изгиб, а также сопоставлены по точности расчеты по методу ДКЭ и традиционному МКЭ.

В данной работе решается та же задача при вынужденных колебаниях с гармонической возмущающей силой.

Рассматривается гармоническое возмущение с единичной амплитудой:

$$P(\omega, t) = P_0 \sin \omega t, \quad (1)$$

где $P_0 = 1$ – амплитуда возмущения; ω – частота возмущения.

Матричное уравнение движения упругой системы при вынужденных колебаниях имеет вид [7]

$$[M] \{\ddot{Z}\} + [C] \{Z\} = \{P\}, \quad (2)$$

где $\{\ddot{Z}\}$ – вектор ускорений узлов системы; $\{P\}$ – вектор узловых сил.

Для гармонического возмущения (1) имеем:

$$\{P\} = P_0 \sin \omega t, \quad \{Z\} = Z_0 \sin \omega t. \quad (3)$$

Подставив выражения (3) в уравнение (2), получим систему уравнений задачи вынужденных колебаний:

$$\left([\tilde{N}] - \omega^2 [M] \right) \{Z\} = \{P\}. \quad (4)$$

Вектор $\{Z\}$ амплитудных значений узловых перемещений конструкции определяется решением системы уравнений задачи вынужденных колебаний (4):

$$\{Z\} = \left([\tilde{N}] - \omega^2 [M] \right)^{-1} \{P\}. \quad (5)$$

При решении уравнения (5) следует помнить, что матрица жесткости $[C]$ и матрица масс $[M]$ конструкции зависят от частоты ω .

С использованием динамического конечного элемента, описанного в работе [6], получены амплитудно-частотные характеристики нескольких стержневых конструкций. Определены значения резонансных частот $\omega_{рез}$, частот антирезонанса ω_0 , а также амплитудные перемещения узлов, к которым приложено гармоническое возмущение (1), при $\omega = 0,8\omega_{рез}$ и $\omega = 1,2\omega_{рез}$. Полученные значения полностью совпадают со значениями, полученными аналитическим путем.

Расчет вынужденных колебаний и указанных значений частот и амплитудных перемещений узлов был также проведен с использованием классического конечного элемента.

На рис. 1 представлена расчетная схема консольного стержня, работающего на растяжение.

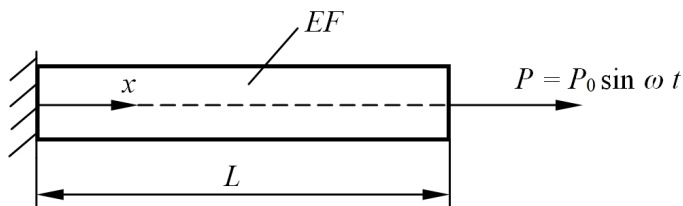


Рис. 1. Расчетная схема стержня, работающего на растяжение

На рис. 2 представлены амплитудно-частотные характеристики стержня, полученные с помощью МКЭ и ДКЭ, в координатах $A(\omega)/A_{ст} - \omega/k_1$, где $A_{ст}$ – статическое перемещение узла под действием единичной силы, k_1 – первая собственная частота конструкции.

В табл. 1 приведено сравнение результатов расчета вынужденных колебаний стержня различными методами: аналитическим, с использованием динамического конечного элемента, с использованием классического элемента при разном числе разбиений стержня. Для аналитического расчета и расчета с помощью ДКЭ показаны полученные значения параметров, а для классического элемента приведена только относительная погрешность.

Как видно из табл. 1, приемлемую точность расчета частот и амплитудных перемещений можно получить лишь на первых резонансах независимо от числа разбиений стержня.

Из табл. 1 также видно, что при втором и выше резонансах погрешность расчета резко возрастает. Это объясняется тем, что амплитудно-частотная характеристика при резонансных частотах резко уходит вверх (рис. 2). Поэтому даже при незначительном несовпадении резонансных частот, полученных с помощью метода ДКЭ и классического МКЭ, на графике наблюдаются практически параллельные участки характеристик, что приводит к значительным погрешностям при определении амплитудных перемещений узлов.

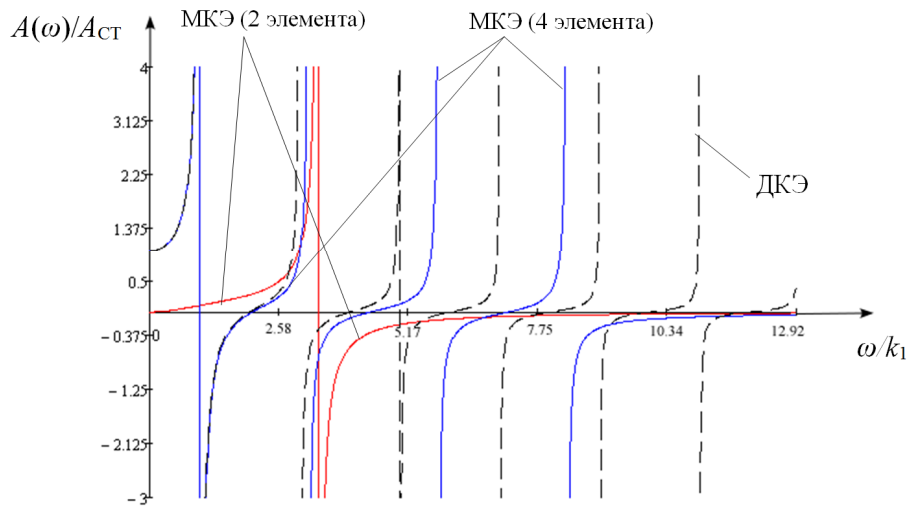


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики стержня, работающего на растяжение

Таблица 1

Частоты и перемещения стержня, работающего на растяжение

Параметр	Частота	Аналитика	ДКЭ (1 элемент)	МКЭ (2 элемента)	МКЭ (4 элемента)	МКЭ (10 элементов)
$\omega_{\text{рез}}/k_1$	1	0,997	0,997	+237,84%	+0,31%	+0,25%
	2	2,999	2,999	-	+5,67%	+0,86%
	3	5,000	5,000	-	+15,21%	+2,54%
	4	6,994	6,994	-	-	+5,09%
ω_0/k_1	1	2,000	2,000	-	+2,58%	+0,43%
	2	4,000	4,000	-	+10,25%	+1,63%
	3	6,001	6,001	-	+19,45%	+3,71%
	4	8,001	8,001	-	-	+6,63%
$A(0,8\omega_{\text{рез}})/A_{\text{СТ}}$	1	2,425	2,425	-76,277%	-0,35%	+0,61%
	2	0,192	0,192	-	+13,21%	+1,86%
	3	0,00006	0,00006	-	-100,00%	-100,00%
	4	0,084	0,084	-	-	-28,93%
$A(1,2\omega_{\text{рез}})/A_{\text{СТ}}$	1	1,670	1,670	-67,95%	+4,67%	-0,74%
	2	0,129	0,129	-	+34,66%	+6,04%
	3	0,00006	0,00006	-	-	-99,99%
	4	0,054	0,054	-	-	-42,01%

Такое объяснение справедливо не только для стержня, работающего на растяжение.

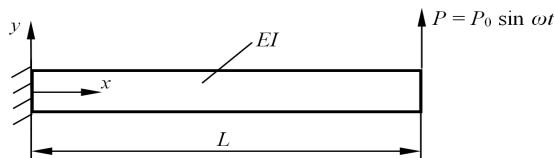


Рис. 3. Расчетная схема стержня, работающего на изгиб

В случае других видов нагружения, например изгиба, большую погрешность расчета будут иметь не только амплитудные перемещения узла приложения возмущения, но и его угловые деформации.

На рис. 3 представлена расчетная схема консольного стержня, работающего на изгиб.

В табл. 2 приведено сравнение результатов расчета вынужденных изгибных колебаний стержня различными методами: аналитическим, с использованием динамического конечного элемента, с использованием классического элемента при разном числе разбиений стержня. Для классического элемента показана относительная погрешность расчета (в %).

Таблица 2

Частоты и перемещения стержня, работающего на изгиб

Параметр	Частота	Аналитика	ДКЭ (1 элемент)	МКЭ (1 элемент)	МКЭ (2 элемента)	МКЭ (4 элемента)	МКЭ (10 элементов)
$\omega_{рез}/k_1$	1	0,971	0,971	+0,00%	0,00%	+0,00%	+0,00%
	2	6,229	6,229	+7,34%	0,00%	+1,83%	+1,83%
	3	17,544	17,544	-	-12,38%	-0,65%	+2,28%
	4	34,345	34,345	-	-	-4,83%	+3,49%
ω_0/k_1	1	4,385	4,385	+17,77%	-0,49%	+0,37%	+0,42%
	2	14,211	14,211	-	-2,92%	-1,02%	+1,27%
	3	29,659	29,659	-	-	-5,97%	+1,86%
	4	50,708	50,708	-	-	-15,66%	+1,54%
$A(0,8\omega_{рез})/A_{СТ}$	1	2,4808	2,4808	+2,518%	-0,78%	-1,06%	-0,57%
	2	0,0314	0,0314	-77,226%	8,08%	+10,29%	-10,71%
	3	-0,0007	-0,0007	-	+91,97%	-25,78%	-80,28%
	4	0,0018	0,0018	-	-	+12,31%	-22,38%
$A(1,2\omega_{рез})/A_{СТ}$	1	2,6730	2,6730	-2,04%	2,16%	+2,61%	+1,39%
	2	0,0708	0,0708	-27,46%	7,71%	-1,63%	-3,85%
	3	0,0098	0,0098	-	13,27%	+4,83%	-0,59%
	4	0,0027	0,0027	-	-	+54,42%	-6,13%

Из табл. 2 следует, что использование ДКЭ приводит к точному результату при одном разбиении стержня.

Результаты расчета амплитудного угла поворота незакрепленного конца стержня представлены в табл. 3. В табл. 3 использованы следующие обозначения: Φ – угол поворота; $\Phi_{СТ}$ – угол поворота при статическом нагружении единичной силой; ω_0 – частота антирезонанса, соответствующая нулевому углу поворота ($\Phi = 0$).

Таблица 3

Частоты и углы поворота стержня, работающего на изгиб

Параметр	Частота	Аналитика	ДКЭ (1 элемент)	МКЭ (1 элемент)	МКЭ (2 элемента)	МКЭ (4 элемента)	МКЭ (10 элементов)
$\omega_{рез}/k_1$	1	0,971	0,971	+0,00%	+0,00%	+0,00%	+0,00%
	2	6,229	6,229	+7,34%	+0,00%	+1,83%	+1,83%
	3	17,544	17,544	-	-12,38%	-0,65%	+2,28%
	4	34,345	34,345	-	-	-4,83%	+3,49%
ω_0/k_1	1	2,807	2,807	+8,44%	-1,23%	-0,22%	+0,06%
	2	11,228	11,228	-	-1,84%	-2,04%	+0,61%
	3	25,259	25,259	-	-	-8,30%	+0,98%
	4	44,917	44,917	-	-	-9,37%	+0,34%
$\Phi(0,8\omega_{рез})/\Phi_{СТ}$	1	2,360	2,360	+3,085%	-0,95%	-1,14%	-0,59%
	2	0,209	0,209	-1,843%	+8,06%	+2,03%	+2,85%
	3	0,037	0,037	-	-25,83%	+11,44%	+3,40%
	4	0,009	0,009	-	-	+122,58%	+23,80%
$\Phi(1,2\omega_{рез})/\Phi_{СТ}$	1	2,369	2,369	-0,61%	+1,73%	+2,42%	+1,34%
	2	0,168	0,168	+28,51%	+10,28%	-6,24%	-5,87%
	3	0,029	0,029	-	+95,71%	-22,66%	-5,98%
	4	0,008	0,008	-	-	+73,73%	-34,35%

Из табл. 2 и 3 следует, что погрешности при определении амплитудных перемещений незакрепленного узла сопоставимы с погрешностями расчета амплитуд углов поворота.

На рис. 4 представлены амплитудно-частотные характеристики изгибаемого стержня, полученные с помощью метода ДКЭ, а также МКЭ при десяти элементах. На графиках видна хорошая сходимость обоих методов на первых двух резонансных частотах, а начиная с третьего резонанса наблюдаются серьезные расхождения результатов расчета не только резонансных частот, но и перемещений и углов поворота.

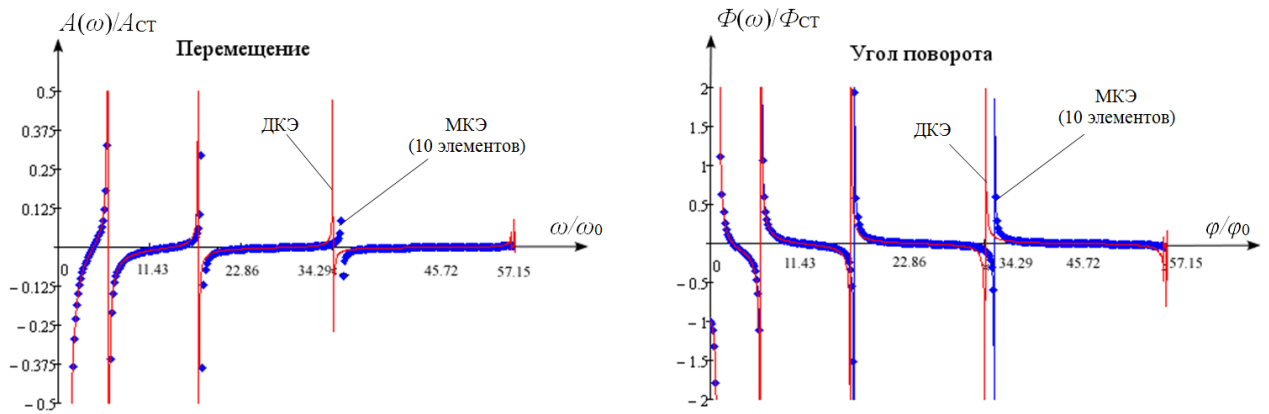


Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики стержня, работающего на изгиб

Таким образом, на примере простейшей стержневой системы, а также путем сравнения результатов расчета с результатами, полученными аналитическими методами, показано, что динамический конечный элемент позволяет абсолютно точно определять динамику системы.

В случае сложных систем, когда аналитическими методами выполнить расчет невозможно или слишком трудоемко, динамический конечный элемент является универсальным средством анализа. В качестве примера такой системы рассмотрим плоскую ферму, стержни которой работают на растяжение. Расчетная схема плоской фермы представлена на рис. 5. Стержни фермы имеют одинаковое сечение и выполнены из одного материала.

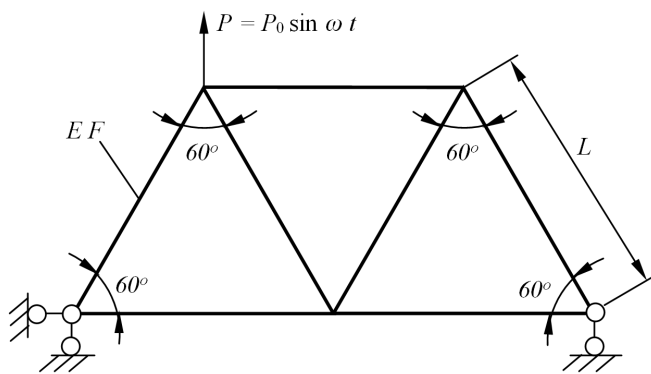


Рис. 5. Расчетная схема плоской фермы

В табл. 4 приведены частоты резонанса конструкции $\omega_{рез}$, частоты антирезонанса ω_0 (при нулевых перемещениях), а также амплитудные перемещения при частотах $0,8\omega_{рез}$ и $1,2\omega_{рез}$ для узла, к которому приложено возмущение. В случае расчета по методу ДКЭ каждый стержень фермы моделируется одним элементом. В случае классического конечного элемента расчет выполнен при разбиении каждого стержня фермы на 1 элемент, а в скобках приведены относительные погрешности (в %).

элемент, а в скобках приведены относительные погрешности (в %).

Таблица 4

Частоты и перемещения узла плоской фермы

Параметр	Частота	ДКЭ (1 элемент)	МКЭ (1 элемент)	
$\omega_{рез}/k_1$	1	0,991	1,00	(+1,11%)
	2	1,440	1,46	(+1,75%)
	3	2,785	3,02	(+8,36%)
	4	4,060	4,71	(+16,12%)
	5	6,373	7,04	(+10,44%)
ω_0/k_1	1	1,142	1,16	(+1,31%)
	2	1,835	1,90	(+3,43%)
	3	3,455	3,87	(+11,89%)
	4	5,625	6,70	(+19,02%)
	5	7,156	-	-
$A(0,8 \omega_{рез})/A_{СТ}$	1	1,717	1,73	(+0,95%)
	2	0,102	0,14	(+42,46%)
	3	0,532	0,68	(+27,28%)
	4	0,275	0,09	(-67,65%)
	5	0,038	0,35	(+823,67%)
$A(1,2 \omega_{рез})/A_{СТ}$	1	0,424	0,40	(-6,63%)
	2	0,241	0,30	(+26,35%)
	3	0,137	0,25	(+83,03%)
	4	0,176	0,34	(+90,32%)
	5	0,222	0,16	(-29,46%)

Сходимость расчета плоской фермы с использованием классического конечного элемента выше сходимости расчета стержня (рис.1). Это объясняется тем, что ферма имеет большее число степеней свободы, чем стержень. Однако в обоих случаях погрешность расчета перемещений с использованием классического элемента остается высокой даже при относительно небольшом несовпадении частот. Так, при отличии второй резонансной частоты от точного значения на 1,75% амплитудные перемещения узла отличаются от точных значений почти в полтора раза.

В качестве примера стержневой системы, работающей на изгиб, рассмотрим раму, расчетная схема которой представлена на рис. 6.

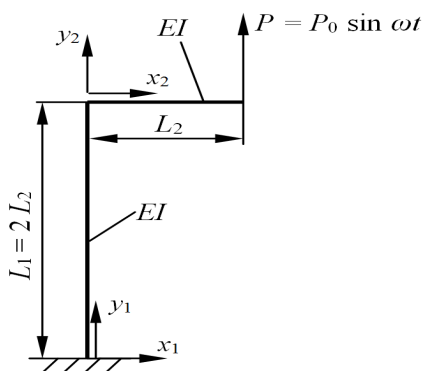


Рис. 6. Расчетная схема рамы, работающей на изгиб

Стержни рамы имеют одинаковое сечение и выполнены из одного материала.

В табл. 5 приведено сравнение результатов расчета вынужденных изгибных колебаний рамы. Определены резонансные частоты $\omega_{рез}$, частоты антирезонанса ω_0 (при нулевых перемещениях), амплитудные перемещения при частотах $0,8\omega_{рез}$ и $1,2\omega_{рез}$ для узла, к которому приложено возмущение. В случае расчета по методу ДКЭ каждый стержень рамы моделируется одним элементом. В случае классического конечного элемента расчет выполнен при разбиении каждого стержня рамы на 1, 2 и 3 элемента. В табл. 5 приведены относительные погрешности (%) для классического элемента.

Таблица 5

Частоты и перемещения рамы, работающей на изгиб

Параметр	Частота	Аналитика	ДКЭ	МКЭ (1 элемент)	МКЭ (2 элемента)	МКЭ (3 элемента)
$\omega_{рез}/k_1$	1	0,847	0,847	+33,33%	+16,67%	+16,67%
	2	4,304	4,304	+11,48%	+18,03%	+21,31%
	3	12,137	12,137	+110,00%	+21,40%	+22,79%
	4	28,366	28,366	-	+10,75%	+2,49%
ω_0/k_1	1	2,242	2,242	+48,03%	+58,33%	+63,13%
	2	10,852	10,852	+69,04%	+13,84%	+12,85%
	3	23,726	23,726	-	+6,77%	+3,68%
	4	34,687	34,687	-	+44,57%	+20,13%
$A(0,8 \omega_{рез})/A_{СТ}$	1	41,606	41,606	+0,946%	-30,60%	-22,08%
	2	4,200	4,200	-62,50%	-81,53%	-85,25%
	3	0,310	0,310	-124,65%	-81,90%	-91,29%
	4	0,025	0,025	-	-86,46%	-6,57%
$A(1,2 \omega_{рез})/A_{СТ}$	1	39,375	39,375	+13,33%	+29,33%	-22,67%
	2	4,856	4,856	-29,73%	-64,86%	-73,05%
	3	0,367	0,367	-47,93%	-49,14%	-56,90%
	4	0,014	0,014	-	+402,38%	+242,53%

Результаты расчета амплитудного угла поворота для узла, к которому приложено возмущение, представлены в табл. 6. Как и в случае с консольным стержнем (рис. 3), погрешности при определении амплитудных перемещений узла, к которому приложено возмущение, сопоставимы с погрешностями расчета амплитуд углов поворота.

На основе приведенных примеров можно сделать вывод, что погрешности расчета по МКЭ присутствуют при любом числе разбиений участков конструкции. При этом для расчета по методу ДКЭ достаточно лишь одного элемента для получения аналитически точных значений.

Однако значения перемещений и углов поворота не позволяют в полной мере оценить конструкцию с точки зрения прочности. На практике основное значение при анализе конструкций имеет оценка напряжений. Высокая погрешность при определении амплитудных перемещений может привести к неверному определению динамических напряжений. Динамические напряжения при растяжении, как и в статике, определяются только продольной силой и поперечным сечением стержня. Амплитудное значение продольной силы определяется следующим образом [8]:

$$P(x) = EF u'(x), \quad (6)$$

где $u(x)$ – амплитудная функция, определяемая из волнового уравнения продольных колебаний стержня. В общем случае амплитудная функция выражается следующим образом [3]:

$$u(x) = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x, \quad (7)$$

где $\alpha = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}$; C_1, C_2 – неизвестные константы, определяемые из граничных условий.

Таблица 6

Частоты и углы поворота рамы, работающей на изгиб

Параметр	Частота	Аналитика	ДКЭ	МКЭ (1 элемент)	МКЭ (2 элемента)	МКЭ (3 элемента)
$\omega_{рез}/k_1$	1	0,847	0,847	+33,33%	+16,67%	+16,67%
	2	4,304	4,304	+11,48%	+18,03%	+21,31%
	3	12,137	12,137	+110,00%	+21,40%	+22,79%
	4	28,366	28,366	-	+10,75%	+2,49%
ω_0/k_1	1	1,763	1,763	+49,42%	+48,51%	+47,37%
	2	9,439	9,439	+25,12%	+4,29%	+2,60%
	3	17,519	17,519	+149,14%	+17,83%	+18,44%
	4	32,015	32,015	-	+40,54%	+17,26%
$\Phi(0,8\omega_{рез})/\Phi_{СТ}$	1	16,975	16,975	+2,062%	-20,62%	-9,28%
	2	3,500	3,500	-40,00%	-54,80%	-58,33%
	3	0,053	0,053	+640,21%	+307,43%	+344,59%
	4	0,165	0,165	-	-12,92%	-46,73%
$\Phi(1,2\omega_{рез})/\Phi_{СТ}$	1	14,350	14,350	+18,29%	+54,88%	-7,32%
	2	3,150	3,150	-27,78%	-51,39%	-60,88%
	3	0,210	0,210	+33,72%	-15,11%	-18,89%
	4	0,110	0,110	-	-210,29%	-153,09%

Для схемы, представленной на рис. 1, граничные условия имеют вид

$$u(0) = 0, \quad P(L) = P_0. \quad (8)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в уравнения граничных условий (8), определяем константы C_1 и C_2 :

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{P_0}{EF\alpha \cos \alpha L}. \quad (9)$$

С учетом подстановки констант (9) и функции (7) в (6) окончательное выражение для амплитудных значений продольной силы принимает вид

$$P(x) = \frac{P_0}{\cos \alpha L} \cos \alpha x. \quad (10)$$

Как видно из выражения (10), погрешность определения напряжений в случае растяжения будет совпадать с погрешностью при определении частот и перемещений.

В случае изгиба напряжения определяются изгибающим моментом и перерезывающей силой, действующими в сечении стержня. Амплитудное значение изгибающего момента определяется следующим образом [8]:

$$M(x) = EI y''(x), \quad (11)$$

где $y(x)$ – амплитудная функция, определяемая из волнового уравнения изгибных колебаний стержня. В общем случае амплитудная функция выражается следующим образом [3]:

$$y(x) = C_1 \cosh \alpha x + C_2 \sinh \alpha x + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x, \quad (12)$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{m_0 \omega^2}{EI}}$; m_0 - масса единицы длины стержня; C_1, C_2, C_3, C_4 - неизвестные константы, определяемые из граничных условий. Для схемы, представленной на рис. 3, граничные условия имеют вид

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad M(L) = 0, \quad Q(L) = P_0, \quad (13)$$

где $Q(x)$ - перерезывающая сила;

$$Q(x) = EI y'''(x). \quad (14)$$

Подставляя в граничные условия (13) выражения (11), (12) и (14) и решая систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов, получим окончательные выражения для внутренних силовых факторов:

$$M(x) = \frac{P_0}{EI\alpha \left(\cosh^2 \alpha L - \sinh \alpha L \sin \alpha L \right)} (-\sinh \alpha L \cosh \alpha x + \cosh \alpha L \sinh \alpha x),$$

$$Q(x) = \frac{P_0}{EI \left(\cosh^2 \alpha L - \sinh \alpha L \sin \alpha L \right)} (-\sinh \alpha L \sin \alpha x + \cosh \alpha L \cosh \alpha x).$$

Для стержня, представленного на рис. 3, изгибающий момент принимает максимальное значение в заделке ($x = 0$). В табл. 7 приведены амплитудные значения изгибающего момента в заделке и поперечной силы в изгибаемом стержне на резонансных частотах.

Таблица 7

Внутренние силовые факторы в изгибаемом стержне при резонансных частотах

Число элементов	Частота	Момент (ДКЭ)	Момент (МКЭ)	Сила (ДКЭ)	Сила (МКЭ)
1	1	-0,115	-0,115 (0,00%)	27,268	27,268 (0,00%)
	2	0,086	-0,007662 (-108,91%)	-71,51	6,618 (-109,25%)
2	1	-0,115	-0,115 (0,00%)	27,268	27,268 (0,00%)
	2	0,086	0,086 (0,00%)	-71,51	-71,51 (0,00%)
	3	-0,893	-0,001612 (-99,82%)	1226	2,073 (-99,83%)
4	1	-0,115	-0,115 (0,00%)	27,268	27,268 (0,00%)
	2	0,086	-0,042 (-148,84%)	-71,51	35,745 (-149,99%)
	3	-0,893	-0,028 (-96,86%)	1226	37,797 (-96,92%)
	4	0,079	0,001963 (-97,52%)	-151,483	-3,683 (-97,57%)
10	1	-0,115	-0,115 (0,00%)	27,268	27,268 (0,00%)
	2	0,086	-0,042 (-148,84%)	-71,51	35,745 (-149,99%)
	3	-0,893	0,008165 (-100,91%)	1226	-11,341 (-100,93%)
	4	0,079	-0,002798 (-103,54%)	-151,483	5,474 (-103,61%)

Как видно из табл. 7, классический конечный элемент достаточно точно описывает динамическое напряженное состояние на первой резонансной частоте. Однако при более высоких резонансах классический элемент дает значительную погрешность при определении внутренних силовых факторов даже при большом числе разбиений.

Для рамы, расчетная схема которой представлена на рис. 6, амплитудная функция каждого из участков имеет вид (12). Граничные условия в таком случае будут следующими:

- отсутствие перемещения и угла поворота в заделке: $y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0$;

- равенство перемещений, углов поворота и изгибающих моментов в точке соединения участков: $y_1(L_1) = y_2(0)$, $y_1'(L_1) = y_2'(0)$, $EI y_1''(L_1) = EI y_2''(0)$;
- равенство нулю изгибающего момента на свободном конце: $EI y_2''(L_2) = 0$;
- амплитудное значение перерезывающей силы на свободном конце равно P_0 : $EI y_2''(L_2) = P_0$;
- равенство перерезывающей силы на конце первого участка инерционной силе второго участка: $EI y_1'''(L_1) = -m_0 L_2 \frac{\partial^2 Y_1(L_1, t)}{\partial t^2}$, где $Y_1(x, t)$ – решение уравнения движения изгибаемого стержня [8]; $Y_1(x, t) = y_1(x)T(t)$.

С учетом амплитудных функций (12) для каждого участка рамы и граничных условий можно определить неизвестные константы и записать уравнения движения участков, а также на основе выражений (11) и (14) получить зависимости для внутренних силовых факторов. Эти зависимости не приводятся в данной статье из-за их громоздкости.

В табл. 8 приведены внутренние силовые факторы рамы, полученные с помощью метода ДКЭ (одно разбиение на каждом участке) и МКЭ (при одном и трех разбиениях каждого участка). Решение по методу ДКЭ полностью совпадает с аналитическим решением.

Таблица 8

Внутренние силовые факторы рамы

Число элементов	Частота	Момент (ДКЭ)	Момент (МКЭ)	Сила (ДКЭ)	Сила (МКЭ)
1 участок ($x_1 = L_1$)					
1	1	-1,318	-1,366 (3,64%)	-0,717	-0,806 (12,41%)
	2	-2,035	-2,084 (2,41%)	-1,733	-1,765 (1,85%)
	3	-0,480	0,023 (-104,79%)	-0,098	0,165 (-268,37%)
	4	0,031	0,01 (-67,74%)	0,149	0,02 (-86,58%)
3	1	-1,318	-1,32 (0,15%)	-0,717	-0,72 (0,42%)
	2	-2,035	-2,073 (1,87%)	-1,733	-1,737 (0,23%)
	3	-0,480	-0,183 (-61,88%)	-0,098	0,116 (-218,37%)
	4	0,031	0,031 (0,00%)	0,149	0,147 (-1,34%)
	5	0,032	0,028 (-12,50%)	0,099	0,079 (-20,20%)
2 участок ($x_2 = 0,5 L_2$)					
1	1	-0,626	-0,65 (3,83%)	1,307	1,342 (2,68%)
	2	-1,227	-1,393 (13,53%)	1,299	1,014 (-21,94%)
	3	-1,182	-0,593 (-49,83%)	-1,613	-1,27 (-21,26%)
	4	-0,553	-0,43 (-22,24%)	-1,200	-0,947 (-21,08%)
3	1	-0,626	-0,627 (0,16%)	1,307	1,308 (0,08%)
	2	-1,227	-1,471 (19,89%)	1,299	0,816 (-37,18%)
	3	-1,182	-0,927 (-21,57%)	-1,613	-1,612 (-0,06%)
	4	-0,553	-0,55 (-0,54%)	-1,200	-1,194 (-0,50%)
	5	-0,480	-0,46 (-4,17%)	-1,051	-1,004 (-4,47%)

Из табл. 8 видно: несмотря на то что при использовании МКЭ сходимость решений повышается с увеличением числа элементов, на некоторых резонансных частотах наблюдаются значительные расхождения (решения могут отличаться от точных более чем в два раза).

В работе [6] показано, что использование в качестве реальных базисных функций точных динамических решений, описывающих форму объекта при колебаниях, обеспечивает высокую точность оценки собственных частот и форм системы, несмотря на усложненность матриц жесткости и масс. В данной работе показана значительная

эффективность динамического конечного элемента при анализе вынужденных колебаний стержневых систем при гармоническом возмущении, а также при оценке динамического напряженно-деформированного состояния конструкций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике/ О. Зенкевич. – М., 1975. – 539 с.
2. Постнов, В.А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций / В.А. Постнов, И.Я. Хархурим. – Л., 1974.
3. Соболев, В.И. Дискретно-континуальные динамические системы и виброизоляция промышленных грохотов / В.И. Соболев. – Иркутск: ИрГТУ, 2002. – 202 с.
4. Соболев, В.И. Построение прямоугольного гармонического элемента для моделирования колебаний плоской пластины / В.И. Соболев, Т.Н. Черниговская // Современные технологии. Моделирование. – 2007. - № 4(16). – С. 28 – 32.
5. Юлдашев, О.И. Конечноэлементные векторные узловые базисные функции из специальных гильбертовых пространств / О.И. Юлдашев, М.Б. Юлдашева // JINR LIT Scientific Report 2008-2009. - Dubna, 2009. - С. 105-108.
6. Цуканова, Е.С. Динамический конечный элемент / Е.С. Цуканова, Б.Г. Кеглин // Вестник Брянского государственного технического университета. - 2013. – №3(39). – С. 69 – 78.
7. Дьяков, И.Ф. Метод конечных элементов в расчётах стержневых систем / И.Ф. Дьяков, С.А. Чернов, А.Н. Черный. – Ульяновск: УлГТУ, 2010. – 133 с.
8. Бидерман, В.Л. Теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. – М.: Высш. шк., 1980. – 408 с.

Материал поступил в редколлегию 23.03.15.