

# ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

*Аверкова О.А., д-р техн. наук, доц.,  
Уваров В.А., д-р техн. наук, проф.,  
Горлов А.С., канд. техн. наук,  
Логачев А.К., аспирант,  
Толмачева Е.И., аспирант*

*Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТРЫВНОГО ТЕЧЕНИЯ НА ВХОДЕ В КРУГЛЫЙ ВСАСЫВАЮЩИЙ КАНАЛ ПРИ НАЛИЧИИ НАБЕГАЮЩЕГО ПОТОКА\*

[olga\\_19572004@mail.ru](mailto:olga_19572004@mail.ru)

*При помощи стационарных дискретных вихрей строится математическая модель отрыва потока на входе во всасывающий канал круглой формы с тонкими стенками при наличии набегающего потока. Определены: форма отрывной области, радиус эффективного всасывания и коэффициент сжатия струи во всасывающей трубке в зависимости от скорости набегающего потока. Построены предельные траектории пылевых частиц разных размеров и зависимость их коэффициентов аспирации от скорости низкоскоростного набегающего потока.*

*Ключевые слова: течения вблизи всасывающих отверстий, отрывные течения, метод дискретных вихрей, пылевые частицы, предельные траектории.*

### 1. Введение

Круглый всасывающий канал является элементом многих технологических устройств. В частности, это местный вентиляционный отсос для улавливания загрязняющих веществ либо элемент устройства для отбора проб аэрозолей в измерительные приборы.

Отрывное течение на входе в щелевидный всасывающий канал при наличии набегающего потока исследовалось в работе [1]. С использованием методов теории функций комплексного переменного была определена форма отрывной области, ширина эффективного всасывания и коэффициент сжатия струи.

Течение на входе в круглый тонкостенный патрубок при наличии набегающего потока исследовалось в работах [2, 3]. Использовался как метод граничных элементов без учета отрыва потока, так и метод расчета вязкой несжимаемой жидкости методом конечных объемов в среде программы FLUENT.

Отрывные течения на входе во всасывающие каналы, в том числе круглой формы, при помощи стационарных дискретных вихрей, исследованы в работах [4–6], при использовании нестационарных вихревых особенностей – в работах [7–12], с использованием теории функций комплексного переменного – в работах [13–15], но нигде не учитывался набегающий поток.

Целью настоящей статьи является разработка с использованием стационарных дискретных вихрей модели отрывного течения на входе во всасывающий круглый канал при наличии набегающего потока, определение радиуса эффективного всасывания, коэффициента сжатия струи, формы отрывной области. Представляет интерес изучение поведения пылевых частиц в данных условиях.

### 2. Разработка математической модели и вычислительного алгоритма

Для разработки математической модели отрывного течения на входе в круглый отсос-раструб воспользуемся дискретными бесконечно тонкими вихревыми кольцами. Границу отсоса-раструба дискретизируем набором присоединенных вихревых колец и контрольных точек (произвольных точек на окружности, охватывающей отсос-раструб). Свободная поверхность тока начинается на острой кромке раструба, для нее задается начальное приближение. Дискретная модель в меридиональной полуплоскости изображена на рис.1. Крестиками изображены контрольные точки, в них выполняется условие непроницаемости – скорость вдоль направления нормали равна нулю. Закрашенные кружочки – это присоединенные кольцевые вихри. Полые кружочки – свободные вихревые кольца.

Обозначим через  $N$  – количество присоединенных вихревых колец;  $N_s$  – количество сво-

бодных вихревых колец;  $x^p$  – контрольная точка,  $p=1,2,\dots,N$ .

Скорость в произвольной точке  $x$  вдоль направления  $\vec{n}$  вычисляется с помощью формулы:

$$v_n(x) = \sum_{q=1}^N \Gamma(\xi^q) G(x, \xi^q) + \gamma \sum_{q=1}^{N_s} G(x, \zeta^q) + n_1 v_\infty, \quad (1)$$

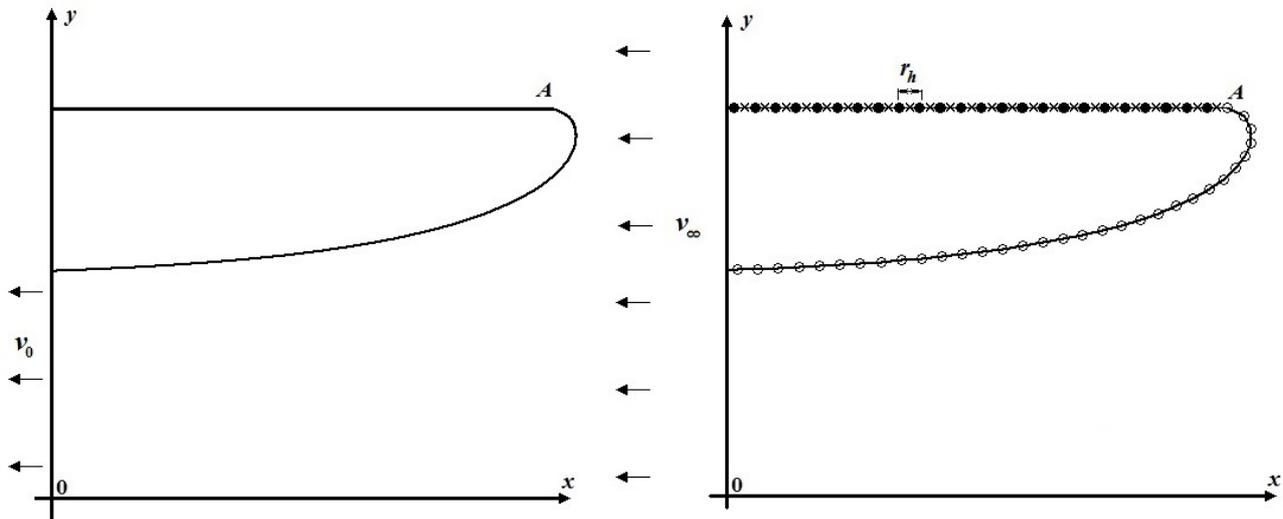


Рис.1. Отрывное течение на входе в круглый всасывающий канал:  
а) к постановке задачи; б) дискретизация границы области

Функция  $G(x, \xi)$  выражает собой влияние на точку  $x$  вихревого кольца с единичной циркуляцией, расположенного в точке  $\xi$ .

$$G(x, \xi) = \frac{4(A_1 b + A_2 a) E(t)}{b(a-b)\sqrt{a+b}} - \frac{4A_2 F(t)}{b\sqrt{a+b}} \text{ при } b \neq 0, \quad G(x, \xi) = \frac{\xi_2^2 n_1}{2a\sqrt{a}} \text{ при } b = 0, 2x_2 \xi_2 = b > 0,$$

$$a = (x_1 - \xi_1)^2 + \xi_2^2 + x_2^2 > 0, \quad A_1 = \frac{\xi_2^2 n_1}{4\pi}, \quad A_2 = \frac{\xi_2}{4\pi} [(x_1 - \xi_1)n_2 - x_2 n_1] \quad F(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-t^2 \sin^2 \theta}}, \quad t = 2b / (a+b)$$

$$E(t) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-t^2 \sin^2 \theta} d\theta; \quad F(t) = \sum_{i=0}^4 c_i (1-t)^i + \sum_{i=0}^4 d_i (1-t)^i \ln \frac{1}{1-t}; \quad E(t) = 1 + \sum_{i=1}^4 c_i (1-t)^i + \sum_{i=1}^4 d_i (1-t)^i \ln \frac{1}{1-t};$$

$c_i, d_i$  взяты из таблиц [16].

Если расстояние от точки  $x$  до точки  $\xi$  меньше шага дискретности  $r_h$ , то данная функция вычисляется по формуле:  $G(x, \xi) = ((x_1 - \xi_1)n_2 - (x_2 - \xi_2)n_1) / (2\pi r_h^2)$ , где  $r_h$  – шаг дискретности (расстояние между соседними вихревыми кольцами). В случае  $x = \xi$  функция  $G(x, \xi) = 0$ .

Вычислительный алгоритм строится следующим образом. После задания точек расположения присоединенных вихрей и начального приближения для свободных вихрей формируется матрица

$$G^{pq} = G(x^p, \xi^q); \quad p=1,2,\dots,N; \quad q=1,2,\dots,N.$$

Начинается первая итерация. Формируется

где  $\xi^q$  – точка расположения  $q$ -го присоединенного вихревого кольца с циркуляцией  $\Gamma(\xi^q)$ ,  $\gamma = \text{const}$  – заданная циркуляция свободного вихревого кольца,  $\zeta^q$  – точка расположения  $q$ -го свободного вихревого кольца.

столбец свободных членов:

$$v^p = -n_1 v_\infty - \gamma \sum_{q=1}^{N_s} G(x^p, \zeta^q), \quad p=1,2,\dots,N.$$

Решается система линейных алгебраических уравнений:  $\sum_{q=1}^N \Gamma^q G^{pq} = v^p, \quad p=1,2,3,\dots,N$ , откуда определяются неизвестные  $\Gamma^q = \Gamma(\xi^q)$ .

Строится свободная линия тока, начиная с острой кромки  $A$ . С использованием формулы (1), при  $\vec{n} = \{1, 0\}$  вычисляется составляющая скорости  $v_x$ , при  $\vec{n} = \{0, 1\}$  – составляющая скорости  $v_y$ . Последующая точка  $(x', y')$  определяется из предыдущей  $(x, y)$  с использованием формул:

$$x' = x + \Delta t v_x / \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad y' = y + \Delta t v_y / \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

где  $\Delta t$  - шаг, который выбирается достаточно малым.

В случае достижения свободной поверхностью тока стенки патрубка, она отодвигается от стенки на расстояние шага дискретности.

Свободная поверхность тока будет состоять из свободных вихревых колец, удаленных друг от друга на расстояние шага дискретности  $r_h$ . То есть, в процессе вычислений, на каждом этапе проверяется расстояние до предыдущего свободного вихревого кольца. Как только в некоторой точке это расстояние становится равным, с точностью до малой погрешности, шагу дискретности, то в эту точку помещается следующее вихревое кольцо. Построение продолжается до сечения, в котором дискретная модель стенок патрубка прерывается.

На этом первая итерация заканчивается. Заметим, что значение  $N_s$  при этом может измениться. Также задаются новые значения элементов массива расположения свободных вихревых колец, которые будут использоваться на следующей итерации.

Итерационный процесс заканчивается, если

$$\frac{\pi d_e^3}{6} \rho_p \frac{d\bar{v}_p}{dt} = \frac{\pi d_e^3}{6} \rho_p \bar{g} - \psi \chi S_m \rho_a \frac{|\bar{v}_p - \bar{v}_a| \cdot (\bar{v}_p - \bar{v}_a)}{2}, \quad (3)$$

где  $\bar{v}_a$  - скорость воздуха;  $\rho_a$  - плотность воздуха;  $\bar{v}_p$  - скорость частицы;  $\rho_p$  - плотность частицы;  $d_e$  - эквивалентный диаметр частицы;  $\bar{g}$  - ускорение свободного падения;  $S_m = \pi d_e^2 / 4$  - площадь миделевого сечения частицы;  $\chi$  - коэффициент ее динамической формы;  $\psi$  - коэффициент сопротивления воздуха, вычисляемый по формулам Стокса, Клячко, Адамова:  $\psi = 24 / Re$ , если  $Re < 1$ ;  $\psi = 24(1 + 1/6 \cdot Re^{2/3}) / Re$ , если  $1 \leq Re < 10^3$ ;  $\psi = 24 / Re \cdot (1 + 0,065 Re^{2/3})^{1,5}$ , если  $Re \geq 10^3$ , где  $Re = \rho_a |\bar{v}_p - \bar{v}_a| d_e / \mu$ ,  $\mu$  - коэффициент динамической вязкости воздуха.

Уравнение (3) преобразуется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности.

Определение предельной траектории осуществлялось следующим с использованием метода половинного деления. Задавался диаметр пылевой частицы, начальное ее положение  $y_1 = R$ ,  $y_2 = R$ . Начальные скорости полагались равными нулю. В переменную  $U_l$  помещалась ордината частицы, улавливаемой патрубком, а в

положение свободной поверхности тока в заданной внутри патрубка точки перестает изменяться с точностью до заданной погрешности. Либо можно задать фиксированное количество итераций, уточняющих положение свободной поверхности тока.

После находятся параметры отрывной области течения.

Средняя скорость внутри трубы определялась из выражения

$$v_0 = \frac{\pi \sum_{i=1}^N v_{xi} (y_i^2 - y_{i-1}^2)}{\pi R^2}, \quad (2)$$

где  $v_{xi}$  - скорость в точке  $x = -5R$ ;  $y_i = y_{i-1} + h$ , где  $y_0 = 0$ ;  $y_N = R$ ,  $r_h = 0,0001$ . Суммирование в числителе (2) производилось до тех пор пока  $|y_i - R| > 0,0001$ .

Траектории пылевых частиц строились с использованием дифференциального уравнения ее динамики [7]:

переменную  $U_p$  - осаждающейся. В начальном приближении полагалось  $U_l = R$ ,  $U_p = 30R$ . Переменная  $S_r = (U_p + U_l) / 2$ . Далее организовывался цикл, который выполняется до тех пор пока истинно условие  $|U_p - U_l| > 0,00000001$ . Внутри организовывался цикл, где строились траектории частиц. Он выполнялся до тех пор, пока  $y_1 > -R/2$  и  $y_1 < 30R$ . При выходе из внутреннего цикла проверялось условие  $y_3 < 0$ . Если оно истинно, то переменная  $U_l = S_r$ , в противном случае  $U_p = S_r$ . Далее величины получают следующие значения:  $S_r = (U_p + U_l) / 2$ ,  $y_1 = R$ ,  $y_2 = S_r$ ,  $y_3 = 0$ ,  $y_4 = 0$ . На этом внешний цикл заканчивается. Описанный алгоритм верен, когда скорость набегающего восходящего потока выше скорости витания пылевых частиц. Пылевые частицы не будут улавливаться отсосом, если скорость их витания больше скорости восходящего воздушного потока. Только некоторые такие частицы с точкой вылета выше всасывающего отверстия улавливаются в результате совокупного действия спектра всасывания и набегающего потока.

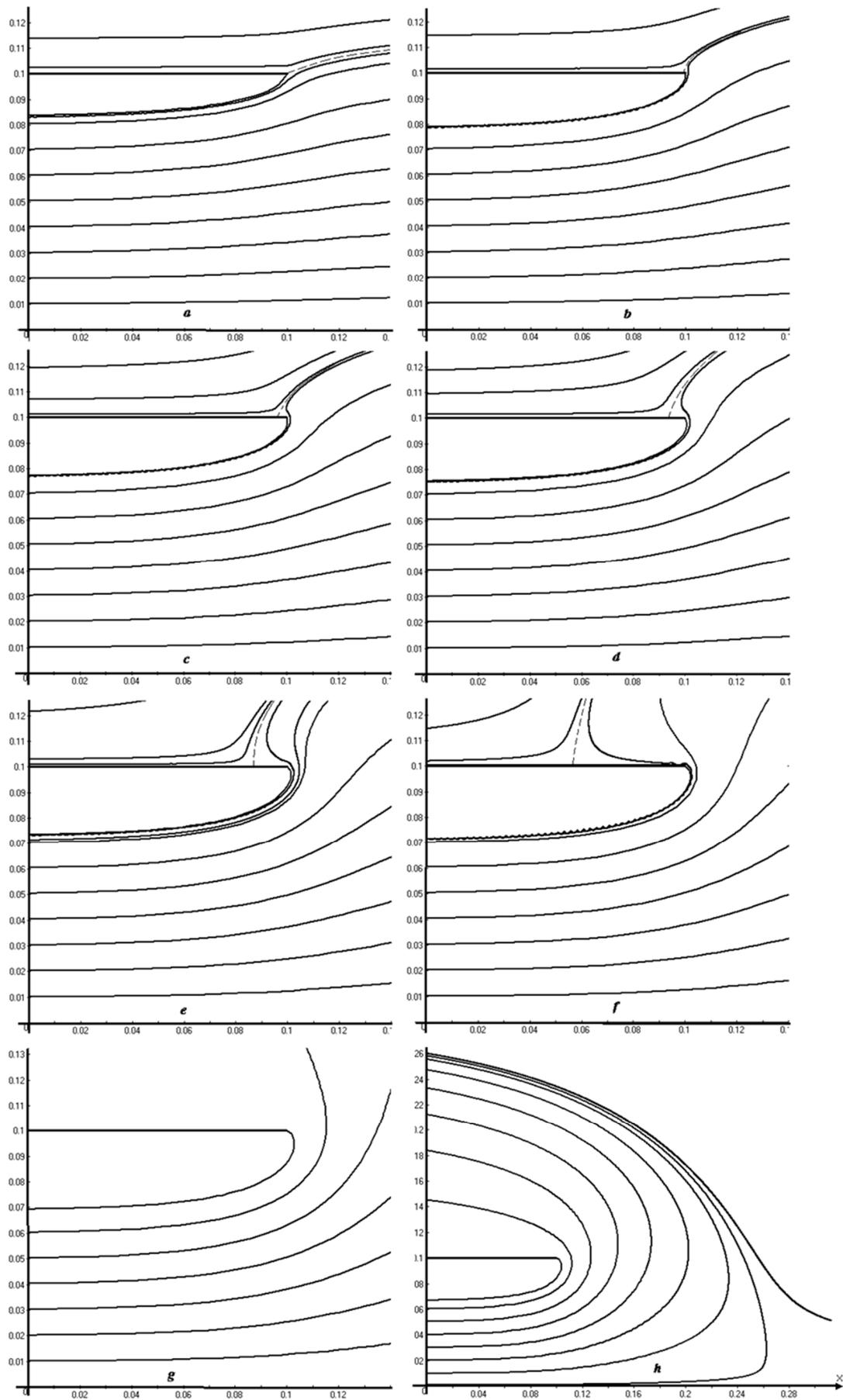


Рис. 2. Линии тока на входе в патрубок при разных скоростях набегающего потока:  
 а)  $v_\infty = 4$ ;  $\bar{v} = 0,737$ ; б)  $v_\infty = 2,5$ ;  $\bar{v} = 0,518$ ; в)  $v_\infty = 2$ ;  $\bar{v} = 0,425$ ; д)  $v_\infty = 1,5$ ;  $\bar{v} = 0,518$ ; е)  $v_\infty = 1$ ;  $\bar{v} = 0,334$ ; ф)  $v_\infty = 0,5$ ;  $\bar{v} = 0,0629$ ; г)  $v_\infty = 0$ ; з)  $v_\infty = -0,5$ ;  $\bar{v} = -0,062$

### 3. Результаты расчета и их обсуждение

Картины течения при разных скоростях набегающего потока изображены на рис.2. Пунктиром изображено примерное положение разделительной линии тока. Как видно, при увеличении скорости набегающего потока (рис. 2.a-f) и стремлении отношения скоростей  $\bar{v} = v_\infty / v_0 \rightarrow 1$ , точка деления линий тока

$$\bar{R}_{ef} = 0,218173\bar{v} + 0,8745998, \text{ при } -0,2 < \bar{v} \leq 0,574 \text{ и } \bar{R}_{ef} = 1 \text{ при } 0,574 < \bar{v} \leq 1, \quad (4)$$

$$\bar{\delta}_\infty = 0,1823056\bar{v} + 0,6899966 \text{ при } -0,2 < \bar{v} \leq 1. \quad (5)$$

Угол между прямыми (4) и (5) порядка 5 градусов. На рис.3 приведена для сравнения ши-

стремится к острой кромке  $A$ . При отсутствии набегающего потока, либо в случае нисходящего потока, такой разделительной линии тока нет (рис. 2.g-h).

Зависимости радиуса эффективного всасывания и коэффициента сжатия струи практически линейны относительно  $\bar{v}$ :

рина эффективного всасывания для щелевидного всасывающего отверстия [1].

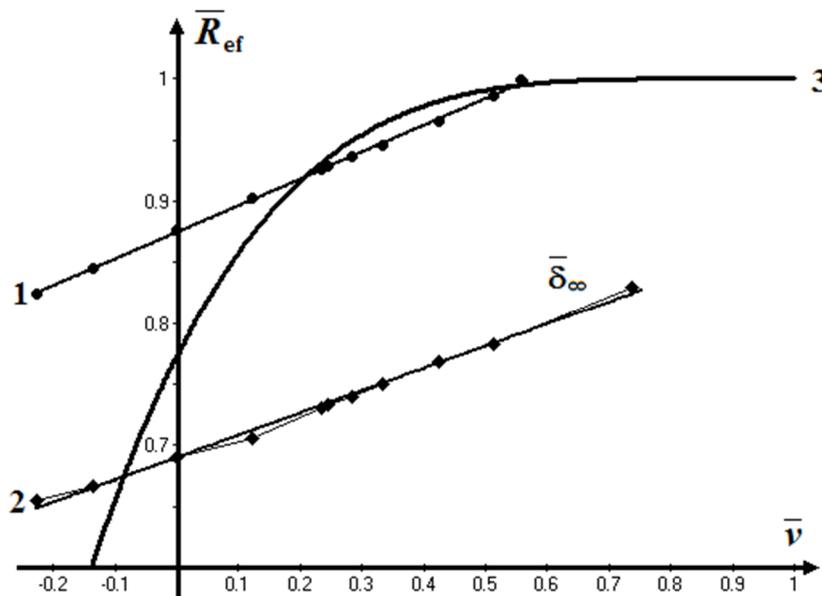


Рис. 3. Зависимость эффективного радиуса патрубка от величины  $\bar{v} = v_\infty / v_0$ :

1 – изменение безразмерной величины эффективного радиуса  $\bar{R}_{ef} = R_{ef} / R$ ; 2 – изменение коэффициента сжатия струи  $\bar{\delta}_\infty = \delta_\infty / R$ ; 3 – изменение безразмерной величины эффективного всасывания для щелевидного отверстия [1]

Предельные траектории (рис.4) имеют параболическую форму, но ветви параболы могут быть направлены в разные стороны. При малых скоростях набегающего потока (рис.4 а) ветви предельных траекторий частиц диаметрами 40мкм, 50мкм, 80 мкм направлены вдоль стенок патрубка, т.е. по направлению потока. При увеличении скорости набегающего потока до 0,25м/с, такая траектория остается только для частиц диаметром 80 мкм (рис.4 б). В остальных представленных расчетах ветви направлены в противоположную сторону.

Как видно из рис.5 коэффициент аспирации  $A = (R_p / R)^2 \bar{v}$  имеет разный характер поведения в зависимости от диаметров пылевых частиц и скорости набегающего потока. Он может возрастать (кривые 1-2), иметь немотонный харак-

тер (кривая 3) и убывать (кривая 4) при возрастании диаметра пылевых частиц.

#### Заключение

Найденные зависимости радиуса эффективного всасывания, коэффициента сжатия струи и формы отрывной области, а также некоторые полученные сведения о поведении пылевых частиц на входе в круглый всасывающий канал, могут быть полезны при решении задач аэродинамики обеспыливающей вентиляции.

В данной работе не удалось рассмотреть случай, когда набегающий поток имеет скорость выше, чем скорость во всасывающем канале. Для этого случая необходимо изменение математической модели. При задании величины скорости во всасывающем канале, а не циркуляции на свободной линии тока, данную задачу возможно решить.

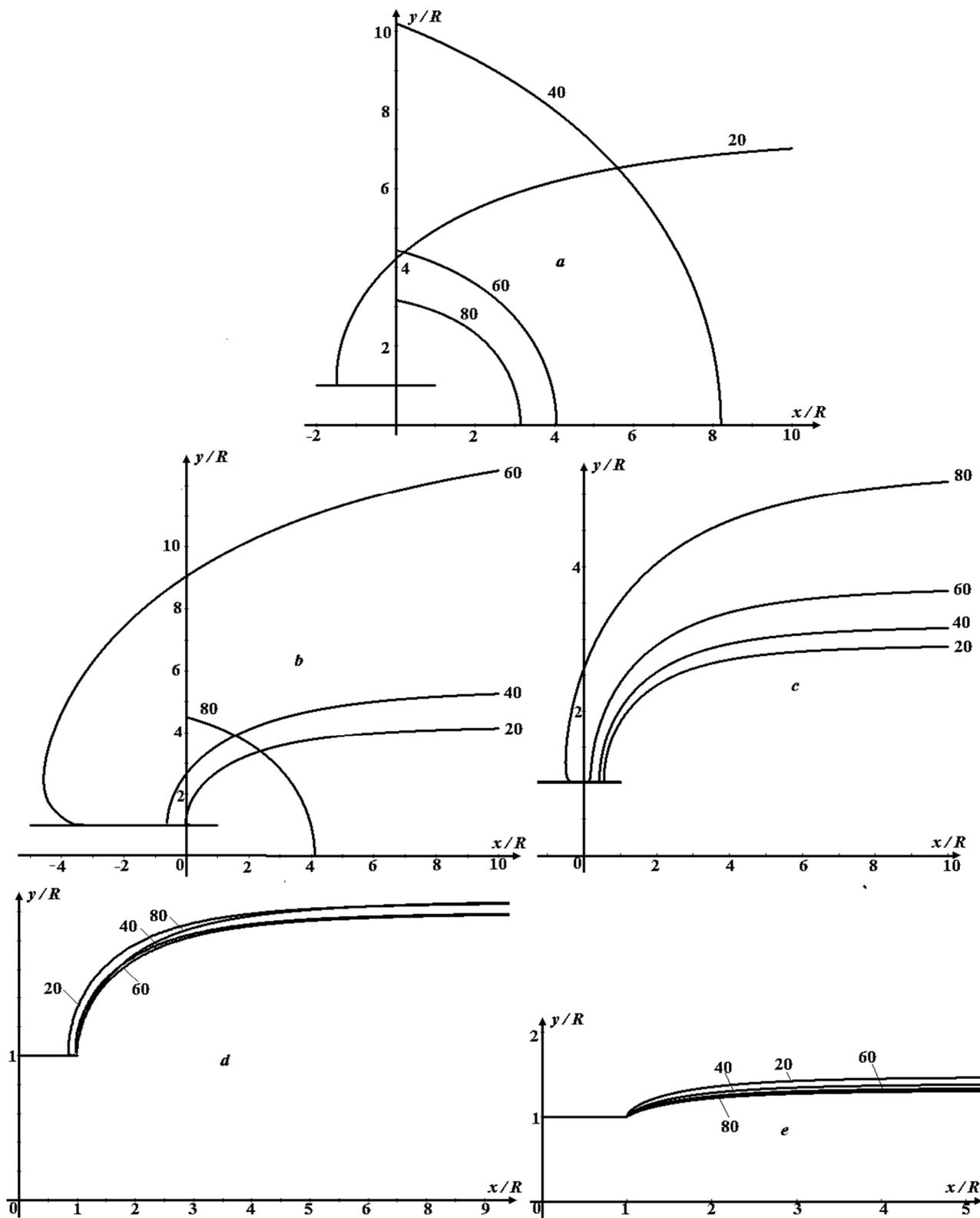


Рис. 4. Предельные траектории пылевых частиц: а)  $v_\infty = 0,1$ ;  $\bar{v} = 0,0257$ ; б)  $v_\infty = 0,25$ ;  $\bar{v} = 0,0632$ ; в)  $v_\infty = 0,5$ ;  $\bar{v} = 0,0629$ ; д)  $v_\infty = 1$ ;  $\bar{v} = 0,127$ ; е)  $v_\infty = 2$ ;  $\bar{v} = 0,425$

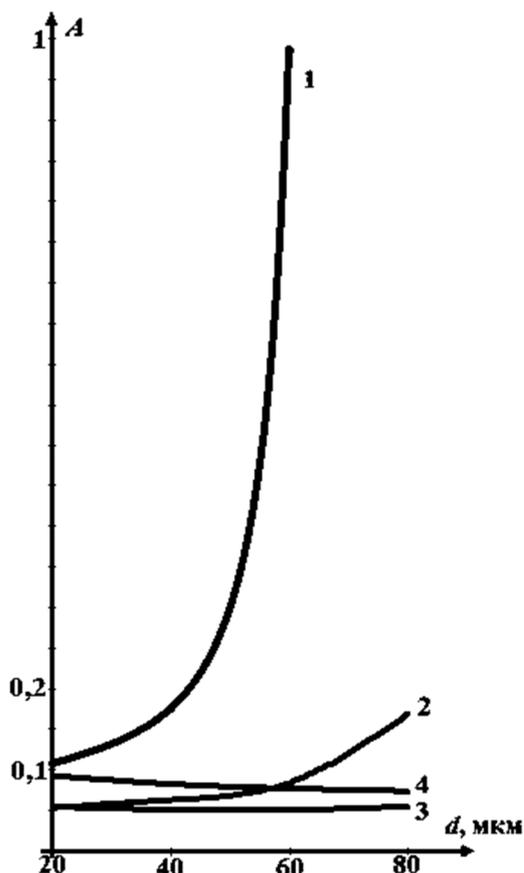


Рис. 5. Зависимость коэффициента аспирации от диаметра пылевых частиц при разных скоростях набегающего потока: 1 –  $\bar{v} = 0,0632$ ; 2 –  $\bar{v} = 0,0629$ ; 3 –  $\bar{v} = 0,127$ ; 4 –  $\bar{v} = 0,425$

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-08-00074\_a).

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Варсегова Е.В., Посохин В.Н. О форме отрывных зон на входе в щелевой всасывающий патрубок // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. 2015. № 3. С. 98–102.
2. Гильфанов А.К., Зарипов Ш.Х. Математические модели аспирации аэрозолей в тонкостенные пробоотборники. Казань: Казан. ун-т, 2012. 120 с.
3. Гильфанов А.К., Зарипов Ш.Х., Маклаков Д.В. Расчет концентраций частиц в задаче аспирации аэрозоля в тонкостенную трубку // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2009. №6. С.89–99.
4. Логачев К.И., Посохин В.Н. Расчет течения вблизи круглого всасывающего патрубка // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2004. № 1. С. 29-32.
5. Аверкова О.А., Логачев И.Н., Логачев К.И. Моделирование отрыва потока на входе во всасывающие каналы в областях с разрезами //

Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2012. Т. 13. № 1 (25). С. 298–306.

6. Аверкова О.А., Логачев И.Н., Логачев К.И., Логачев А.К. Закономерности отрывного течения при входе в выступающий канал с экранами // Ученые записки ЦАГИ. 2013. Т. XLIV. № 2. С. 33–49.

7. Логачев К.И., Пузанок А.И. Численное моделирование пылевоздушных течений вблизи вращающегося цилиндра-отсоса // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2005. № 2. С. 63–70.

8. Аверкова О.А., Зоря В.Ю., Логачев К.И. Особенности поведения аэрозольных частиц в аспирационном укрытии стандартной конструкции // Химическое и нефтегазовое машиностроение. 2007. № 11. С. 34-36.

9. Логачев К.И., Пузанок А.И., Посохин В.Н. Расчет вихревого течения у щелевидного бокового отсоса // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2004. № 6. С. 64–69.

10. Логачев К.И., Логачев И.Н., Пузанок А.И. Численное исследование поведения пылевой аэрозоли в аспирационном укрытии // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2006. № 5. С. 65–71.

11. Логачев К.И., Пузанок А.И., Посохин В.Н. Расчет течений на входе в отсосы-раструбы методом дискретных вихрей // Известия вузов. Проблемы энергетики. 2004. № 7–8. С.61–69.

12. Логачев К.И., Посохин В.Н., Пузанок А.И. Геометрические характеристики течений на входе в отсосы, выполненные в виде зонтов // Инженерные системы. АВОК Северо-Запад. 2005. № 1. С.12–14.

13. Посохин В.Н., Салимов Н.Б., Логачев К.И., Живов А.М. К расчету течения вблизи щелевидного отсоса-раструба // Известия вузов. Строительство. 2002. Сообщение 1. № 8. С.70–76.

14. Посохин В.Н., Салимов Н.Б., Логачев К.И., Живов А.М. К расчету течения вблизи щелевидного отсоса-раструба // Известия вузов. Строительство. 2002. Сообщение 2. № 9. С. 80–85.

15. Посохин В.Н., Салимов Н.Б., Логачев К.И., Живов А.М. К расчету течения вблизи щелевидного отсоса-раструба // Известия вузов. Строительство. 2002. Сообщение 3. № 10. С.81–85.

16. Абрамовица М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.

---

**Averkova O.A., Uvarov V.A., Gorlov A.S., Logachev A.K., Tolmacheva E.I.**  
**THE MATHEMATICAL MODELLING OF SEPARATION FLOW AT THE ENTRANCE  
TO A ROUND SUCTION DUCT AT THE PRESENCE OF APPROACH FLOW**

*By means of stationary discrete vortices a mathematical model of flow separation at the entrance to a round thin-walled suction duct at the presence of approach flow was constructed. There were determined: the shape of separation area, the efficient suction radius and the jet contraction coefficient in a suction inlet depending on the approach flow speed. The extreme trajectories of dust particles of various sizes and the dependence of their aspiration coefficients on the velocity of low-speed approach flow were constructed.*

**Key words:** flows near suction inlets, separation flows, discrete vortex methods, dust particles, extreme trajectories.

---

**Аверкова Ольга Александровна**, доктор технических наук, доцент кафедры теплогазоснабжения и вентиляции.

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.

Адрес: Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46.

E-mail:olga\_19572004@mail.ru

**Уваров Валерий Анатольевич**, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой теплогазоснабжения и вентиляции.

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.

Адрес: Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46.

**Горлов Александр Семенович**, кандидат технических наук, кафедры высшей математики.

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.

Адрес: Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46.

**Логачев Артур Константинович**, аспирант кафедры теплогазоснабжения и вентиляции.

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.

Адрес: Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46.

**Толмачева Елена Игоревна**, аспирант кафедры теплогазоснабжения и вентиляции.

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.

Адрес: Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46.