ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 519.81

Ю.В. Бугаев, И. Ю. Шурупова, М.К. Бабаян

АНАЛИЗ КОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЯ В МЕТОДЕ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

Предложен подход к анализу профиля экспертных упорядочений на наличие бесконечных решений в методе экстраполяции экспертных оценок. Сформулировано и доказано необходимое и достаточное условие конечности оценок полезностей альтернатив в методе экстраполяции экспертных оценок при экспертном ранжировании обучающей выборки на порядковой и разностно-порядковой шкале.

Ключевые слова: альтернатива, профиль экспертных упорядочений, метод экстраполяции экспертных оценок, бесконечные оценки, коллективный выбор.

Сложные задачи выбора редко решаются одним человеком, обычно в процессе формирования выбора участвует целый коллектив. В качестве отдельных лиц, принимающих решения, могут выступать руководители и члены выборных органов, жюри, комитетов, производственных отделов, избиратели, эксперты и т.п. Совокупность таких действующих лиц называют группой, принимающей решение (ГПР). Если в результате работы ГПР не было выработано единого мнения, необходимо прибегнуть к какой-либо процедуре для принятия определенного решения. Наиболее распространенным способом принятия коллективного решения является голосование. Голосование характеризуется следующими особенностями:

1) каким-либо образом формируется набор вариантов (например, кандидатов на выборную должность, вариантов управленческого решения и т. д.), в отношении которых должно быть принято решение;

2) каждый из участников процедуры (избирателей) вырабатывает свое мнение об этих вариантах и отражает его в избирательном бюллетене в соответствии с инструкцией;

3) в соответствии с той или иной формальной процедурой по этой информации, поступившей от избирателей, определяется коллективное решение.

Поведение ЛПР существенно определяется ограниченным объемом кратковременной памяти, поэтому количество альтернатив, предъявляемых эксперту, а также число показателей качества, описывающих альтернативы, должны отвечать возможностям человека в данном аспекте [1]. Если число альтернативных решений достаточно велико (сотни и более), то задача поиска оптимального варианта не может быть решена прямым применением какого-либо известного механизма выбора, предполагающего привлечение экспертов, ввиду того что они ориентированы на осуществление экспертной оценки сразу всего имеющегося набора альтернативных решений, включаемого в предъявление X. Однако на практике при проектировании современных сложных производственных систем и планировании их деятельности такая ситуация возникает все чаще и чаще.

Одной из процедур, способных решить указанную проблему, является метод экстраполяции экспертных оценок (МЭЭО), позволяющий обработать спектр мнений экспертов средствами математической статистики. В результате получаются точечные оценки полезностей альтернатив, позволяющие выбрать лучшие варианты из имеющегося набора.

Пусть имеем обучающую выборку из m альтернатив $A_1, A_2, ..., A_m$.

Согласно МЭЭО, экспертам необходимо проранжировать выборку на порядковой шкале. Каждое упорядочение порождает некоторую систему неравенств, определяющую соотношения между полезностями альтернатив из выборки.

Рассмотрим систему непрерывных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ с совместной плотностью распределения $g(x,\theta)$, где θ - вектор параметров распределения. Значение ξ_i равно оцененной экспертом полезности альтернативы A_i, а ее математическое ожидание соответствует объективной полезности той же альтернативы. Тогда каждый r-й вариант индивидуального ранжирования соответствует системе линейных неравенств

$$C^{(r)}\xi \geq 0, \tag{1}$$

где $C^{(r)}$ – структурная матрица r-го экспертного упорядочения, число столбцов которой совпадает с числом альтернатив, а число строк зависит от вида ранжирования; $r = 1, \ldots, N$, N – число экспертов. При линейном упорядочении выборки $A_1 \succeq A_2 \succ ... \geq A_m$ матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & ..... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & .... & 0 & 0 \\ & & & .... & & \\ 0 & 0 & 0 & .... & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Система (1) соответствует наступлению определенного случайного события, вероятность которого определяется по формуле

$$P_r(\theta) = \int_{D_r} g(x,\theta)dx,$$
$$D_r = \left\{ x \in E^m \;\middle|\; C^{(r)}x \geq 0 \right\}. \tag{2}$$

Тогда результат экспертного ранжирования можно интерпретировать как реализацию дискретной векторной случайной величины $(k_1, k_2, ..., k_s)^T$, где k_r – количество экспертов, выбравших r-й вариант упорядочения, $r = 1, 2, ..., s$; $k_r \in \{0, 1, ..., N\}$; $\sum k_r = N$, N – число экспертов. В этом случае для поиска точечных оценок полезностей можно применить метод максимального правдоподобия (ММП). Функция правдоподобия (ФП) в соответствии с формулой полиномиального распределения будет иметь вид

$$L(k_1, k_2, \cdots, k_s, \theta) = K \cdot P_1^{k1}(\theta) \ldots P_s^{ks}(\theta), \tag{3}$$

где K – константа нормировки, которую при максимизации можно отбросить.

Чтобы реализовать ММП, надо дополнить целевую функцию (3) уравнениями, связывающими вектор параметров θ с оценками полезностей альтернатив, и решить полученную задачу математического программирования.

Следуя [2], случайные величины ξ_i будем считать независимыми, нормально распределенными и, ввиду однородности выборки, имеющими одинаковую дисперсию σ^2. Тогда имеем вектор параметров распределения $\theta = (w_1, w_2, ..., w_m, \sigma)^T$, где математические ожидания w_i – истинные полезности альтернатив выборки, а совместная плотность распределения ξ_i имеет вид

$$g(x,\ w_1, ...,\ w_m, \sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}\sigma^m} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-w)^T(x-w)\right].$$

Поскольку полезности определяются с точностью до масштабного множителя, то можно положить $\sigma = 1$. Тем самым мы избавимся от неоднозначности оценок полезности.

Опыт нахождения ММП-оценок в МЭЭО [3] убеждает в том, что решение этой задачи не всегда конечно.

Пример 1. Пусть имеем следующие варианты экспертного упорядочения выборки их трёх альтернатив A_1, A_2, A_3:

$$A_1 \succeq A_2 \succeq A_3;\ A_1 \succeq A_2 \succeq A_3;\ A_1 \succeq A_3 \succeq A_2,$$

где символ $\succeq$ означает «не хуже по предпочтению». Этому набору упорядочений соответствует ФП

$$L = P(A_1 \succeq A_2 \succeq A_3)^2 \cdot P(A_1 \succeq A_3 \succeq A_2), \tag{4}$$

максимум которой равен 0,148148 и достигается при следующих соотношениях полезностей альтернатив: $w_1 - w_2 = +\infty$; $w_2 - w_3$=0,60914. Численная же оптимизация функции (4) в системе MathCad даёт следующие оценки полезностей: w_1= 6,96689; w_2= –3,18503; w_3= –3,79417. При этих w_i оптимальное значение L совпадает с 0,148148. Условие $w_2 - w_3$ = 0,60914, как видно, выполняется, а $w_1 - w_2$ = 10,151916. В соответствии со значением функции нормального распределения полученное решение аппроксимирует бесконечно удалённую точку.

Однако очевидно, что такой аппроксимацией будет любое решение, удовлетворяющее условиям $w_1 - w_2 \geq 8$; $w_2 - w_3$ = 0,60914, т.е. численное решение не единственно.

Проведённые исследования [3] показали, что помимо неоднозначности наличие бесконечных решений приводит к значительному смещению полученных оценок полезности. Поэтому вопрос о существовании или отсутствии бесконечных решений в МЭЭО весьма важен.

Пусть N экспертов проранжировали элементы выборки из m альтернатив на порядковой шкале по убыванию полезностей в соответствии со своими индивидуальными предпочтениями. Для каждой пары (A_i, A_j) альтернатив $(i, j = \overline{1, m},\ i \neq j)$ вычислим величины

$$p_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{N}, \tag{5}$$

где α_{ij} – число случаев, когда эксперты указали $A_i \succeq A_j$, подобно тому, как это делается в процедуре Терстоуна-Мостеллера [2].

Далее на множестве альтернатив введём следующее бинарное отношение R:

$$(A_i, A_j) \in R \Leftrightarrow 0 < p_{ij} < 1. \tag{6}$$

Очевидно, отношение (6) симметрично, так как $(A_i, A_j) \in R \Leftrightarrow (A_j, A_i) \in R$, хотя $p_{ij} = 1 - p_{ji}$, т.е. в общем случае $p_{ij} \neq p_{ji}$. Геометрическим образом данного отношения будет неориентированный граф $G = (A,\ R)$.

Согласно процедуре Терстоуна-Мостеллера, оценки $\widehat{w}_i$ полезности каждой альтернативы подбираются из условия примерного равенства

$$\Phi\left(\frac{\widehat{w}_i - \widehat{w}_j}{\sqrt{2}}\right) \approx p_{ij}, \tag{7}$$

где $\Phi(x)$ – функция стандартного нормального распределения. Соотношение (7) справедливо и для МЭЭО-оценок. Следовательно, бесконечные оценки могут появиться только у альтернатив, входящих в пары, для которых p_{ij} = 1 (или 0). В этом случае в силу (7) $\widehat{w}_i - \widehat{w}_j = +\infty$ (или $\widehat{w}_i - \widehat{w}_j = -\infty$). Для таких пар отношение (6) не выполняется.

Поэтому, в частности, альтернатива выборки, если она единственная имеет бесконечную оценку полезности, соответствует изолированной вершине графа G.

Возможна ситуация, когда некоторое подмножество альтернатив имеет бесконечно лучшие (или бесконечно худшие) оценки по сравнению с прочими альтернативами, но внутри этой группы разности $\hat{w}_i - \hat{w}_j$ конечны. Это означает, что между парами альтернатив этой группы имеет место отношение (6), а с прочими альтернативами они никак не связаны. Иными словами, альтернативы этой группы образуют отдельную компоненту связности графа G. Внутри этой компоненты все вершины взаимно достижимы.

Теорема 1. Пусть в графе $G = (A, R)$ вершины A_i и A_j достижимы одна из другой. Тогда $\left|\hat{w}_i - \hat{w}_j\right| < +\infty$, где оценки $\hat{w}_i$ и $\hat{w}_j$ являются координатами точки теоретического максимума ФП в МЭЭО.

Доказательство:

1. Докажем, что из $(A_i, A_j) \in R$ следует $\left|\hat{w}_i - \hat{w}_j\right| < +\infty$. Тот факт, что $(A_i, A_j) \in R$ означает, что в данном профиле альтернативы A_i и A_j по-разному упорядочены у различных экспертов.

Известна следующая теорема (теорема 2.6 [3]). Пусть в заданном профиле некоторые две альтернативы A_i и A_j по-разному упорядочены у различных экспертов. Тогда разность $\hat{w}_i - \hat{w}_j$ в оптимальной точке ФП не может равняться бесконечности.

Утверждение теоремы 2.6 полностью совпадает с требуемым выводом.

2. Докажем основное утверждение теоремы. Пусть в графе $G = (A, R)$ вершины A_i и A_j взаимно достижимы. Возможны два случая:

- В G имеется ребро (A_i, A_j). Тогда $(A_i, A_j) \in R$ и требуемое следствие получается согласно п. 1.
- В G нет ребра (A_i, A_j), но существует конечный маршрут из A_i в A_j: $A_i = B^1, B^2, \ldots, B^n = A_j$. Тогда для каждого ребра маршрута справедлив п. 1 данной теоремы и $\left|w(B^u) - w(B^{u+1})\right| < +\infty$. Отсюда

$$\hat{w}_i - \hat{w}_j = \hat{w}_i - w(B^2) + w(B^2) - \ldots - w(B^n) + w(B^n) - \hat{w}_j =$$
$$= [\hat{w}_i - w(B^2)] + [w(B^2) - w(B^3)] + \ldots + [w(B^{n-1}) - \hat{w}_j].$$

Следовательно,

$$\left|\hat{w}_i - \hat{w}_j\right| \le \left|\hat{w}_i - w(B^2)\right| + \left|w(B^2) - w(B^3)\right| + \ldots + \left|w(B^{n-1}) - \hat{w}_j\right| < +\infty,$$

что и требовалось доказать.

Из доказанного следует, что если граф G связный, то точка теоретического максимума ФП конечна. Предлагается следующий метод анализа профиля упорядочений на наличие бесконечных решений:

1. На основании профиля предпочтений вычисляем p_{ij} по формуле (5) для всех пар альтернатив.
2. Строим отношение R и на его основе граф G.
3. Проверяем связность G. Если он связный, то ММП-оценки всех альтернатив будут конечны.

Рассмотрим два иллюстрирующих примера. Сначала вернёмся к примеру 1. Согласно формуле (5), имеем:

$$p_{12} = 1;\ p_{13} = 1;\ p_{23} = \frac{2}{3}.$$

Следовательно, граф G содержит только одно ребро (A_2, A_3) и имеет две компоненты связности: $\{A_1\}$ и $\{A_2, A_3\}$. Оценка $\widehat{w}_1$ бесконечна.

Пример 2. Пусть имеем следующие варианты упорядочения выборки их трёх альтернатив A_1, A_2, A_3:

$$A_1 \succeq A_2 \succeq A_3;\; A_2 \succeq A_1 \succeq A_3;\; A_2 \succeq A_3 \succeq A_1.$$

Имеем: $p_{12} = \frac{1}{3}$; $p_{13} = \frac{2}{3}$; $p_{23} = 1$. Граф G содержит два ребра, (A_1, A_2) и (A_1, A_3), а значит, является связным. Бесконечных оценок нет. Численное решение даёт следующие значения оценок полезности: $\widehat{w}_1 = 0$; $\widehat{w}_2 = 0{,}923$; $\widehat{w}_3 = -0{,}923$. Расчётные значения вероятностей превосходства, согласно (7), составляют: $\widehat{p}_{12} = 0{,}257$; $\widehat{p}_{13} = 0{,}743$; $\widehat{p}_{23} = 0{,}904$ (все отличны от 0 и 1).

Теорема 1 определяет достаточные условия конечности решения. Выясним, каковы необходимые условия. Для этого нам понадобятся вычислительные формулы для вероятностей (2).

Сделаем замену переменных $y = C^{(r)}x$. В соответствии с правилами преобразования нормального распределения [4] данная замена преобразует плотность нормального распределения к виду

$$g(y,h) = \sqrt{\frac{(\det(CC^T)^{-1}}{(2\pi)^{m-1}}} e^{-\frac{1}{2}(y-h)^T(CC^T)^{-1}(y-h)},$$

где $h = Cw$ (верхний индекс матрицы $C^{(r)}$ опущен). Тогда вероятность (2) определяется по формуле

$$P(y,h) = \sqrt{\frac{(\det(CC^T)^{-1}}{(2\pi)^{m-1}}} \int_0^{+\infty} dy_{m-1} \int_0^{+\infty} dy_{m-2} \cdots \int_0^{+\infty} dy_1 \exp\left[-\frac{1}{2}(y-h)^T \left(CC^T\right)^{-1}(y-h)\right].$$

Данное выражение можно преобразовать к виду

$$P(z) = \sqrt{\frac{(\det(CC^T)^{-1}}{(2\pi)^{m-1}}} \int_{-h_{m-1}}^{+\infty} dz_{m-1} \int_{-h_{m-2}}^{+\infty} dz_{m-2} \cdots \int_{-h_1}^{+\infty} dz_1 \exp\left[-\frac{1}{2} z^T \left(CC^T\right)^{-1} z\right], \tag{8}$$

где $z = y - h$, h – вектор искомых параметров ФП. Как видим, формула вычисления вероятностей индивидуальна для каждого варианта упорядочения.

Теорема 2. Пусть граф G несвязный и A_i и A_j принадлежат разным компонентам связности. Тогда в точке теоретического максимума функции правдоподобия $|d_{ij}| = \left|\widehat{w}_i - \widehat{w}_j\right| = +\infty$.

Доказательство. Пусть K1 и K2 – компоненты связности, содержащие A_i и A_j, соответственно. Поскольку A_i и A_j принадлежат разным компонентам, то все эксперты считают их одинаково упорядоченными. Пусть, для определённости, $A_i \succeq A_j$. Возможны два случая:

1. Во всех структурных матрицах $C^{(r)}$ присутствует строка, соответствующая разности полезностей $w(A_i) - w(A_j)$. Тогда среди нижних пределов интегрирования в каждом интеграле (8) имеется $-h = w(A_j) - w(A_i)$. Пусть найдена точка максимума ФП и в ней $w(A_j) - w(A_i) > -\infty$. Очевидно, что если положить $-h = -\infty$, то от этого все интегралы увеличатся, ФП возрастёт, т.е. в оптимальном решении $w(A_j) - w(A_i) = -\infty$.

2. Строка, соответствующая разности $w(A_i) - w(A_j)$, в явном виде присутствует не во всех структурных матрицах $C^{(r)}$.

Очевидно, что для получения несвязного графа необходимо, чтобы все разности вида $w(A_u) - w(A_q)$, где $A_u \in K1$, а $A_q \in K2$ (для краткости назовём их межкомпонентными разностями, а разности оценок альтернатив из одинаковых компонент – внутрикомпонентными), явно присутствующие в структурных матрицах, были положительными во всех упорядочениях. Пусть найдено оптимальное решение, в котором $w(A_i) - w(A_j) < \infty$. Добавим ко всем полученным оценкам из $K1$ произвольную положительную константу T. Тогда все внутирикомпонентые разности не изменятся, а межкомпонентные увеличатся на T. От этого значение ФП возрастёт, хотя, по предположению, мы уже имеем максимум. Следовательно, в точке точного максимума все межкомпонентые разности, в том числе и $w(A_i) - w(A_j)$, равны $+\infty$. Теорема доказана.

Вывод. Связность графа G является необходимым и достаточным условием конечности точных ММП-оценок полезностей альтернатив в МЭЭО при экспертном ранжировании обучающей выборки на порядковой шкале. Для решения задачи проверки связности имеется несколько простых методов [5]: метод поиска связывающих маршрутов посредством поиска в глубину или в ширину, метод определения номеров компонент связности, являющийся составной частью алгоритма Краскала, и др.

Данный результат означает, что добавление новых данных на разностно-порядковой шкале не сделает решения конечными, просто внесёт некоторое отношение в величину бесконечно больших разностей.

Пример 3. Имеем 6 одинаковых упорядочений выборки их трёх альтернатив: $A_1 \succeq A_2 \succeq A_3$. Численное решение, найденное при ограничении $\sum_i \hat{w}_i = 0$, имеет вид (8,2160; 0,0012; –8,2172). Целевая функция в этой точке равна 1. Оценки $\hat{w}_1$ и $\hat{w}_3$ расположились почти симметрично относительно $\hat{w}_2$. Однако, например, точка (10,2160; 3,0012; –13,2172) даёт такое же значение L и удовлетворяет ограничению. Таким образом, численное решение задачи не определено, а точное решение должно удовлетворять соотношению

$$\hat{w}_1 - \hat{w}_2 \to +\infty; \quad \hat{w}_2 - \hat{w}_3 \to +\infty .$$

Добавим к исходным данным задачи результат ранжирования на разностно-порядковой шкале: пусть три эксперта считают, что $w(A_1) - w(A_2) > w(A_2) - w(A_3)$, а три остальных – что $w(A_1) - w(A_2) < w(A_2) - w(A_3)$. Получим следующий численный результат: (7,714; 1,755·10^{-7}; –7,714). Следовательно $\dfrac{\hat{w}_1 - \hat{w}_2}{\hat{w}_2 - \hat{w}_3} = 1$, поскольку, согласно ранжированию, вероятность превосходства первой разности над второй равна 0,5. Изменение результатов ранжирования повлечёт иное соотношение между значениями данных разностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ларичев, О. И. Объективные модели и субъективные решения / О. И. Ларичев. – М.: Наука, 1987. – 144 с.
2. Thurstone, L. L. A law of comparative judgment / L. L. Thurstone // Psychol. Rev. – 1927. – V. 34. – P. 273 – 286.
3. Миронова, М. С. Моделирование процедур коллективного выбора на основе экстраполяции экспертных оценок: дис. … канд. физ.-мат. наук / М.С. Миронова. – Воронеж: ВГУИТ, 2011. – 138 с.
4. Андерсон, Т. Введение в многомерный статистический анализ: [пер. с англ.] / Т. Андерсон. – М.: Физматгиз, 1963. – 500 с.
5. Липский, В. Комбинаторика для программистов: [пер. с пол.] / В. Липский. – М.: Мир, 1988. – 213 с.

Материал поступил в редколлегию 31.10.13.