Задачи городской олимпиады школьников по математике

Tasks of the city olympiad in mathematics

Келдибекова А.О.
канд. пед. наук, доцент, Ошский государственный университет
e-mail: aidaoskk@gmail.com

Keldibekova A.O.
Candidate of pedagogical sciences, associate professor, Kyrgyzstan, Osh state university
e-mail: aidaoskk@gmail.com

Аннотация
Статья посвящена изучению содержания и разбору методов решения олимпиадных задач по математике, предложенных учащимся Кыргызской Республики на городском этапе республиканской олимпиады школьников г. Ош в 2017 г. Рассмотренные методы решения задач могут представлять интерес для руководителей методических секций, учителей математики, осуществляющих подготовку своих учеников к участию в математических олимпиадах; а также для студентов и школьников, заинтересованных в повышении своего уровня знаний, методов решения математических задач олимпиад.
Ключевые слова: городская олимпиада, математика, школьник, олимпиадная задача.

Abstract
The article is devoted to the study of the content and analysis of methods for solving olympiad problems in mathematics, proposed by students of the Kyrgyz Republic at the city stage of the 2017 Republican school olympiad. The considered methods for solving problems may be of interest to heads of methodological sections, teachers of mathematics who prepare their students for participation in mathematical competitions; as well as for students and schoolchildren interested in increasing their level of knowledge of methods for solving mathematical problems of olympiads.
Keywords: city olympiad, mathematics, schoolchild, olympiad problem.

Возможности олимпиады школьников в реализации компетентностного подхода к обучению очевидны, поскольку участие в математических олимпиадах формирует навыки научно-исследовательской деятельности учащихся, одновременно способствуя саморазвитию и самореализации их личности.

Городской этап республиканской олимпиады школьников X и XI классов Кыргызской Республики проходил в два тура для базового и профильного уровней 27–28 февраля 2017 г. [1]. В городском этапе республиканской олимпиады приняло участие 176 учеников г. Ош, 327 учеников г. Бишкек. Число победителей III этапа по республике составило 113 школьников.

Далее рассматриваются решения задач городской олимпиады 2017 г.

Задания олимпиады для X класса базового уровня

Задача 1. Найдите все тройки действительных чисел (x, y, z), удовлетворяющих системе уравнений: $\begin{cases} x^3y^3z^3 = 1; \\ xy^5z^3 = 2; \\ xy^3z^5 = 3 \end{cases}$ [2].

Решение: Рассмотрим любое из трех уравнений. Все три переменные в нем стоят в нечетных степенях. Это значит, что, либо все три числа x, y, z положительные, либо среди них два отрицательных и одно положительное. Причем при наличии отрицательных, если у них обоих сменить знак, мы получим положительное решение. Отсюда следует, что достаточно найти все положительные решения. Меняя их знаки, получим и все остальные. Итак, считаем, что x > 0, y > 0, z > 0. Делим второе уравнение на первое, получим: $y^2 = 2x^2$, т.е. y = $\sqrt{2}$x.Делим третье уравнение на первое, получим: $z^2 = 3x^2$, т.е. z = $\sqrt{3}$x. Подставляя все в первое уравнение, получим:

$6\sqrt{6}x^9=1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[6]{6}}, \ y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}}, \ z = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}$.

Итак, единственное положительное решение найдено. С учетом замечания про знаки получим еще три решения, т.е. всего четыре решения [2].

Ответ:

$(\frac{1}{\sqrt[6]{6}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}); (-\frac{1}{\sqrt[6]{6}}; -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}); (-\frac{1}{\sqrt[6]{6}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}}; -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}}); (\frac{1}{\sqrt[6]{6}}; -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{6}}; -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[6]{6}})$.

Задача 2. По неподвижному эскалатору человек спускается быстрее, чем поднимается. Что быстрее: спуститься и подняться по поднимающемуся эскалатору или спуститься и подняться по спускающемуся эскалатору? (Предполагается, что все скорости, о которых идет речь, постоянны, причем скорости эскалатора при движении вверх и вниз одинаковы, а скорость человека всегда больше скорости эскалатора) [3].

Решение: Обозначим скорость эскалатора через v, скорости человека, поднимающегося и опускающегося по эскалатору, через v_1 и v_2 соответственно, тогда $v<v_1<v_2$. Длину эскалатора обозначим через l, тогда время движения по поднимающемуся эскалатору: $t_1 = l/(v_1 + v) - l/(v_2 - v)$. А по спускающемуся эскалатору $t_2 = l/(v_2 + v) - l/(v_1 - v)$. Вычислим разность

$t_1 - t_2 = l/(v_1 + v) + l/(v_2 - v) - l/(v_2 + v) - l/(v_1 - v) = 2lv(l/(v_2{}^2 - v^2) - l/v_1{}^2 - v^2))$.

По условию знаменатели обеих дробей положительны, причем первый больше второго, поэтому все выражение отрицательно. Вывод: $t_1 < t_2$ [3].

Ответ: Быстрее спуститься и подняться по поднимающемуся эскалатору.

Задача 3. Дан треугольник ABC, ∠B = 90°. На сторонах AC, BC выбраны точки E и D соответственно такие, что AE = EC, ∠ ADB = ∠ EDC (рис. к задаче 3). Найти отношение CD:BD [4].

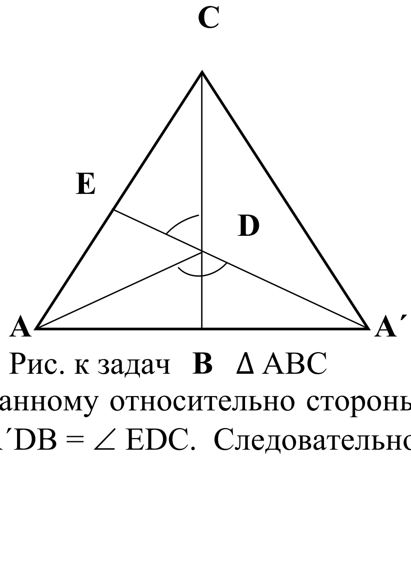

Рис. к задач **B** Δ ABC

Решение: Построим Δ A´BC, симметричный данному относительно стороны BC. Точки A´, D, E лежат на одной прямой, т.к. ∠ A´DB = ∠ EDC. Следовательно, D –

точка пересечения медиан A′ E и CB треугольника Δ AA′C, и делит их в отношении 2:1, считая от вершины [4].

Ответ: 2:1.

Задания олимпиады X класса углубленного уровня

Задача 1. На координатной плоскости нарисовано множество точек, заданное уравнением $x = y^2$. Окружность радиуса 5 с центром в точке (11; 1) пересекает это множество в точках A, B, C, D. Докажите, что все эти точки A, B, C, D лежат на одной параболе, т.е. на кривой, заданной уравнением $y = ax^2 + bx + c$, и найдите уравнение этой параболы [2].

Решение: Координаты точек A, B, C, D являются решениями системы $\begin{cases} y^2 = x; \\ (x-11)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{cases}$ (1).

Раскрывая скобки во втором уравнении, и подставляя y^2 из первого, получим

$x^2 - 22x + 121 + x - 2y + 1 = 25 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{97}{2}$ (2).

Поскольку уравнение (2) получено как следствие системы (1), любое решение системы (1) является решением уравнения (2). В частности, координаты точек A, B, C, D являются решениями уравнения (2), т.е. парабола, задаваемая уравнением (2), проходит через точки A, B, C, D [2].

Ответ: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{97}{2}$.

Задача 2. Доказать, что любое число 2^n, где n=3, 4, 5, … можно представить в виде $2^n = 7x^2 + y^2$, где x и y – нечетные числа [2].

Решение: Применим при решении метод математической индукции.

Для n = 3 утверждение верно;

пусть оно верно и для n = k: $2^k = 7x^2 + y^2$, где x и y нечетны. Рассмотрим две пары чисел: $\{\frac{1}{2}(x - y); \frac{1}{2}(7x + y)\}$ и $\{\frac{1}{2}(x + y); \frac{1}{2}(7x - y)\}$.

Для каждой пары усемеренный квадрат первого числа плюс квадрат второго дает 2^{k+1}.

Остается заметить, что в каждой паре стоят числа одной четности, а в разных – разной четности, поэтому числа одной из пар – нечетны.

Задача 3. Пусть, a, b, c – стороны треугольника. Докажите неравенство: $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$ [2].

Решение: Используя неравенство треугольника a+b>c и что$a^2 - ab + b^2 \geq 0$, получим цепочку неравенств:

$a^3 + b^3 + 3abc = (a\text{-}b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc > a(a^2 - ab + b^2) + 3abc = c(a^2 - ab + b^2) > c \cdot c^2 = c^3$

тем самым доказали, что $a^3 + b^3 + 3abc > c \cdot c^2 = c^3$ [2].

Задания олимпиады XI класса базового уровня

Задача 1. Решить уравнение $x + \frac{1}{y+\frac{1}{z}} = \frac{10}{7}$ в целых положительных числах [5].

Решение: любое число единственным образом представляется в виде суммы двух чисел, одно из которых – целое, а другое – неотрицательное и меньше единицы. Это сумма его целой и дробной части. Для $\frac{10}{7}$ таким представлением будет $\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$. Поэтому x = 1, $y + \frac{1}{z} = \frac{7}{3}$.

Аналогично разложим $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ в сумму целой и дробной части. Получим y = 2, z = 3.

Ответ: x = 1, y = 2, z = 3.

Задача 2. Айбеку на 23 февраля подарили 777 конфет. Айбек хочет съесть все конфеты за n дней, причем так, чтобы за каждый из этих дней, кроме первого, но включая последний, съедать на одну конфету больше, чем в предыдущий. Для какого наибольшего числа n это возможно? [2].

Решение: Если в первый день Айбек съест *a* конфет, то за *n* дней он съест $a + (a + 1) + ... + (a + n + 1) = \frac{n(2a-1+n)}{2}$ конфет. Значит, $\frac{n(2a-1+n)}{2} = 777$.

Следовательно, *n* делит 2·777 = 1554.

Так как $1554 = n\ (2a - 1 + n) > n^2$, *то* $n < 40$.

Но максимальное число n меньшее 40 и делящее 1554 = 2·3· 3 · 7 · 37, равняется 37.

Случай *n* = 37 действительно возможен при *a = 3*.

Ответ: *n = 37*.

Задания олимпиады XI класса углубленного уровня

Задание 1. Пусть *a, b, c* такие целые неотрицательные числа, что $28a + 30b + 31c = 365$. Докажите, что $a + b + c = 12$[6].

Решение: пусть $a + b + c \leq 11$. Тогда
$28a + 30b + 31c \leq 31(a + b + c) \leq 11 \cdot 31 = 341 < 365$ получили противоречие.

Пусть $a + b + c \geq 14$, тогда
$28a + 30b + 31c \geq 28(a + b + c) \geq 28 \cdot 14 = 392 > 365$, и этого быть не может.

Осталось доказать, что: $a + b + c$ не может равняться 13.

Пусть $a + b + c = 13$. Вариант $a = 13,\ b = c = 0$ не удовлетворяет условию: $28 \cdot 13 + 30 \cdot 0 + 31 \cdot 0 = 364 \neq 365$.

Остается вариант $a + b + c = 13,\ a < 13$. В этом случае:
$b + c = 13 - a > 0$ и $28a + 30b + 31c = 28(a + b + c) + 2b + 3c \geq 28 \cdot 13 + 2(b + c)$.

Первое слагаемое равно 364, второе – не меньше 2. Значит, сумма не меньше 366 и не может равняться 365.Следовательно, $a + b + c = 12$.

Задача 2. На координатной плоскости нарисовано множество точек, заданное уравнением $x = y^2$. Окружность радиуса 5 с центром в точке (11; 1) пересекает это множество в точках A, B, C, D. Докажите, что все эти точки A, B, C, D лежат на одной параболе, т.е. на кривой, заданной уравнением $y = ax^2 + bx + c$, и найдите уравнение этой параболы [2].

Решение: Координаты точек A, B, C, D являются решениями системы $\begin{cases} y^2 = x; \\ (x-11)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{cases}$ (1).

Раскрывая скобки во втором уравнении, и подставляя y^2 из первого, получим $x^2 - 22x + 121 + x - 2y + 1 = 25 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{97}{2}$ (2).

Поскольку уравнение (2) получено как следствие системы (1), любое решение системы (1) является решением уравнения (2). В частности, координаты точек A, B, C, D являются решениями уравнения (2), т.е. парабола, задаваемая уравнением (2), проходит через точки A, B, C, D.

Ответ: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{97}{2}$.

Задача 3. Рассмотрим все рациональные числа между нулем и единицей, знаменатели которых не превосходят n. Расположим их в порядке возрастания. Пусть $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ – какие-то два соседних числа (дроби несократимы) [7].

Доказать, что $|bc - ad| = 1$.

Решение: можно считать, что $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Неравенство $\frac{a}{b} < \frac{a}{b-1} \leq \frac{a+1}{d}$, которое выполняется при $a + 1 \leq b$, показывает, что $b \neq d$, т.е. знаменатели двух соседних дробей не могут быть одинаковыми.

Докажем требуемое утверждение индукцией по n.

При $n = 3$ получим числа $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$, для них утверждение легко проверяется.

Предположим, что утверждение доказано для *n-1*.

При переходе от n-1 к n к старому набору чисел добавляются некоторые числа вида $\frac{k}{n}$. Согласно сделанному выше замечанию, два новых числа не могут быть соседними, поэтому $\frac{a}{b} < \frac{k}{n} < \frac{c}{d}$, где $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ – соседние числа из старого списка. Нужно доказать, что оба числа $A = kb - an$ и $B = cn - kd$ равны 1 (ясно, что эти числа положительны).

Предположим, что одно из них больше 1. Тогда $b + d < dB + dA = (bc - ad)\ n = n$, поскольку $bc - ad = 1$ по предположению индукции.

Неравенство $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{b}$ показывает, что числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ не могут быть соседними. Приходим к противоречию, доказывающему, что $|bc - ad| = 1$[7].

Олимпиадная задача выступает как инструмент определения уровня сформированности ключевых: умений учиться, взаимодействовать в группе, работать с разными источниками информации и предметных компетентностей.

При подготовке школьников к математическим олимпиадам необходимо систематически и последовательно осуществлять обучение школьников способам решения и диагностике ошибок.

Литература

1. *Байсалов Дж.У., Келдибекова А.О.* Опыт работы школы олимпийского резерва по математике: учебно-методическое пособие. – Ош: Билим, 2017. – 103 с.
2. *Келдибекова А.О.* Компетентностный подход к содержанию школьных олимпиадных задач по математике // Международный журнал экспериментального образования. – 2017. – № 8. – С. 39–45. URL: http://expeducation.ru/ru/article/view?id=11740.
3. Задачная база Самарского государственного университета [Электронный ресурс]. – URL: http://www.ssu.samara.ru/~nauka/math/olimp/turgor/tgarhiv.zip
4. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии: учеб. пособие. – Москва:МЦНМО, 2007. – 640 с.
5. Задачная база: Московские соревнования, турниримени Ломоносова, 1989 [Электронный ресурс]. URL: http://www.zaba.ru/cgi-bin/tasks.cgi?tour=moskva. lomtur.1989&solution=1
6. Московские математические олимпиады1993–2005 гг./ Р.М. Федоров и др. под ред. В.М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, 2006. – 456 с.
7. *Прасолов В.В.* Задачи по алгебре, арифметикеи анализу [Текст] / В.В. Прасолов. – М.: МЦНМО,2007. – 608 с.