

УДК 531.39:51-74

DOI: 10.30987/article\_5cb58f50b38371.23941436

Г.В. Михеев, Д.Ю. Погорелов, А.Н. Родиков

## МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ КОЛЕСНЫХ ПАР С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ

Предложены два подхода к моделированию динамики железнодорожных колесных пар с учетом упругости, в рамках которых рассмотрены конечноэлементные модели с вращающейся и невращающейся сеткой. Уравнения движения колесных пар выведены с применением присоединенной системы координат и результатов модального анализа. Кинематика профиля колеса описана с учетом уп-

ругих перемещений узлов. Оба подхода реализованы в программе «Универсальный механизм». Приведены первые результаты моделирования, подтверждающие корректность предложенных методов.

**Ключевые слова:** динамика систем тел, железнодорожные колесные пары, упругость, моделирование.

G.V. Mikheev, D.Yu. Pogorelov, A.N. Rodikov

## METHODS FOR WHEEL PAIR DYNAMICS MODELING TAKING INTO ACCOUNT ELASTICITY

The computer simulation of railway wheel pair (WP) dynamics taking into account elasticity allows analyzing WPs high-frequency oscillations and vibroaccelerations of crew part units connected with them, modeling strain gage wheel pairs, estimating the WP deformation impact upon force distributions in gears of locomotive drives, and also solving other urgent problems.

In the paper there are offered two approaches to the analysis of the dynamics of elastic WPs within the limits of which their finite element models with the rotating and nonrotating grid are under consideration. The WP kinematics is presented as a sum of its motion as an absolute solid together with the jointed co-

ordinates (C) and small elastic removals regarding coordinates given which are calculated on the basis of the results of WP modal analysis. A wheel profile kinematics is described taking into account unit elastic motions. There are presented algorithms for the calculation of generalized forces of moving loads in the wheel-rail contact taking into account WP elasticity.

Both approaches are realized in the “Universal mechanism” program. The first results of modeling confirming the correctness of the methods offered are shown.

**Key words:** dynamics of body system, railway wheel pairs, elasticity, modeling.

### Введение

Программы моделирования динамики систем тел предоставляют эффективный инструмент анализа механических систем, которые могут быть представлены абсолютно твердыми или упругими телами, соединенными шарнирами или силовыми элементами. Одной из основных задач, которая должна быть решена для применения данного подхода к исследованию динамики железнодорожных экипажей, является разработка моделей контакта между колесом и рельсом. Моделирование колесных пар абсолютно твердыми телами, взаимодействующими с невесомым рельсом, является вполне приемлемым подходом при анализе динамики экипажей в частотном диапазоне до 30 Герц. Однако многие исследования невозможны без уче-

та упругости колесных пар и без подробного моделирования пути с учетом его инерционных и упругих свойств. Примерами таких исследований являются анализ высокочастотных (вплоть до звуковых) вибраций колесных пар и рельсов, расчет упругодеформированного состояния и долговечности колесных пар, исследования износа колесных пар и рельсов и т.д.

В работе [1] представлена модель колесной пары, разработанная Морисом (Morys), для изучения процессов, приводящих к отклонениям от круглой формы колес высокоскоростного поезда ICE-1. Она включает несколько абсолютно твердых тел, соединенных пружинами с изгибной и крутильной жесткостью и демпферами. Основная проблема в применении

подобных подходов – идентификация параметров. Только несколько низших частот и соответствующих собственных форм могут учитываться корректно. В работе [2] представлена двухмерная модель, разработанная Штольцем (Szolc), для изучения совместных вибраций колесной пары и рельсов. Она включает ось, которая моделируется как сплошной стержень, имеющий изгибную и крутильную жесткость, но абсолютно твердый в продольном (осевом) направлении. Колеса и дисковые тормоза представляются жесткими кольцами, соединенными с осью невесомыми упругими изотропными мембранами.

В настоящее время модальный подход является наиболее распространенным и универсальным методом моделирования динамики упругих колесных пар. Модели создаются методом конечных элементов (МКЭ). Кинематика колесной пары представляется суммой её движения как абсолютно твердого тела вместе с присоединенной системой координат (СК) и малых упругих перемещений относительно данной СК. Подобный подход распространен в динамике систем тел в качестве общей методики моделирования упругих подсистем; он описан, например, в работе [11].

Основной трудностью его применения к моделированию динамики колесной пары является расчет подвижных контактных сил и обобщенных сил от них. Для решения данной проблемы предпринимаются попытки вывода уравнений движения с невращающейся конечноэлементной сеткой. Подобный подход обобщенно называется подходом Эйлера - в противоположность подходу Лагранжа, традиционно применяемому в динамике систем тел. Говоря простым языком, подход Лагранжа заключается в том, что исследователь наблюдает за точками объекта, движущегося в пространстве, а при подходе Эйлера внимание обращено на определенную область пространства, занятую сплошной средой. Основное преимущество подхода (координат) Эйлера заключается в малых смещениях точек контакта между колесом и рельсом относительно локальной системы координат колесной пары. Это позволяет прикладывать контактные силы к не-

скольким заранее выбранным узлам, или даже к одному узлу, и тем самым повысить эффективность моделирования.

Современные методы вывода уравнений движения упругой колесной пары, использующие подход Эйлера, предлагаются в недавних публикациях [3-9]. При этом принимают некоторые упрощения ввиду сложности получаемых выражений. В работах [3-6] уравнения описывают прямолинейное движение с постоянной угловой скоростью в инерциальной системе координат.

В работе [10] уравнения выводятся в неинерциальной системе отсчета, движущейся вместе с экипажем. Динамика упругой колесной пары изучается отдельно от экипажа в предположении, что её упругость не влияет на перемещения тележки. Для вычисления сил взаимодействия между колесной парой и тележкой выполняется предварительное моделирование в программе анализа динамики систем тел.

В данной работе рассматриваются методы моделирования упругих колесных пар, разработанные авторами и реализованные в программном комплексе «Универсальный механизм» (ПК «УМ») ([www.universalmechanism.com](http://www.universalmechanism.com)). Кинематика любой упругой подсистемы описывается в «УМ» с применением присоединенной системы координат и метода суперэлементов. Модальный анализ упругой подсистемы выполняется во внешних программах конечноэлементного анализа, таких как ANSYS, MSC.NASTRAN, NX NASTRAN, ABAQUS. Для вывода уравнений движения применяется подход Лагранжа. Для применения его к моделированию вращающегося железнодорожного колеса разработаны следующие алгоритмы: 1) расчет кинематики профиля колеса с использованием положения и скорости узлов обода, расположенных вблизи контактной площадки; 2) расчет обобщенных сил от сил взаимодействия колеса с рельсом в произвольных точках поверхности качения. Полученные уравнения включают выражения сил инерции без каких-либо упрощений. Таким образом, возможно моделирование динамики экипажа в кривых участках пути с ускорениями.

Другой подход, предлагаемый в данной работе, заключается в преобразовании уравнений движения, исключаящем вра-

**Математическая модель упругого тела**

В соответствии с подходом, лежащим в основе моделирования динамики упругих тел в ПК «УМ», колесная пара может произвольно перемещаться в пространстве как абсолютно твердое тело, при этом перемещения ее точек в результате деформаций полагаются малыми.

**Кинематика упругой колесной пары.** Положение произвольной точки  $K$  колесной пары относительно глобальной системы координат СК0 выражается суммой радиуса-вектора начала отсчета локальной СК1 и радиуса-вектора точки относительно СК1 (рис. 1):

$$r_k^{(0)} = r_1^{(0)} + A_{01} \rho_k^{(1)},$$

где  $A_{01}$  – матрица ориентации СК1 относительно СК0; векторы представлены в

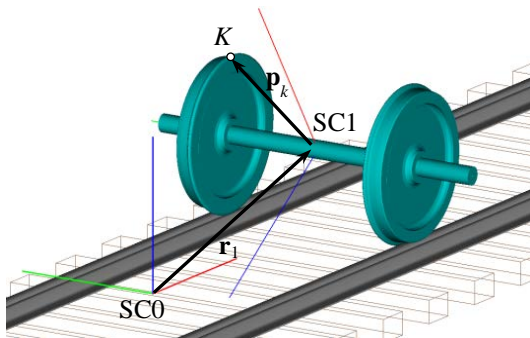


Рис. 1. Присоединенная система координат колесной пары

Если узел расположен в точке  $K$ , его упругие перемещения могут быть представлены произведением

$$d_k = H_k w,$$

где  $H_k$  – часть модальной матрицы, соответствующая узлу  $K$ . Тогда выражение радиуса-вектора точки  $K$  может быть записано следующим образом (рис. 2):

$$r_k^{(0)} = r_1^{(0)} + A_{01} (\rho_k^{(1)} + H_k w),$$

где  $\rho_k^{(1)}$  – постоянный в СК1 радиус-вектор точки  $K$  в недеформированном состоянии.

Упругие формы  $h_j$  рассчитываются в соответствии с методом Крэйга - Бэмптона

шение колесной пары на стадии интегрирования. Данное решение, по сути, является разновидностью подхода Эйлера.

системах координат, указанных верхним индексом в скобках.

Упругие перемещения точек колесной пары рассчитываются с применением метода конечных элементов и модального подхода. Перемещения узлов относительно локальной системы координат выражаются произведением модальной матрицы на матрицу-столбец модальных координат:

$$x = \sum_{j=1}^H h_j w_j = Hw,$$

где  $x$  –  $N \times 1$  матрица-столбец узловых координат;  $N$  – число степеней свободы конечноэлементной модели;  $h_j$  –  $j$ -я форма упругой колесной пары;  $w_j$  –  $j$ -я модальная координата;  $H$  – число используемых форм;  $H$  –  $N \times H$  модальная матрица.

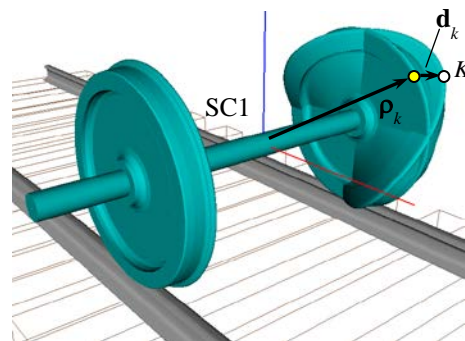


Рис. 2. Локальные координаты точки  $K$  колесной пары

[12; 13]. Вначале выбираются интерфейсные узлы в шарнирных точках и точках присоединения силовых элементов. Затем последовательно рассчитываются статические формы от единичных смещений и единичных поворотов по всем степеням свободы в интерфейсных узлах и собственные формы при закрепленных интерфейсных узлах. Число используемых собственных форм выбирается исследователем в зависимости от требуемого частотного диапазона.

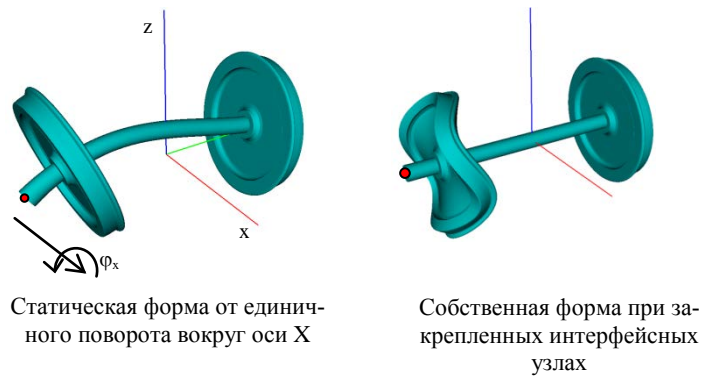


Рис. 3. Примеры статической и собственной форм колесной пары

Примеры статической и собственной форм представлены на рис. 3. Выбраны два интерфейсных узла на торцах оси.

Чтобы исключить твердотельное движение относительно локальной системы координат, набор статических и собственных форм преобразуется на основе решения обобщенной проблемы собственных значений с редуцированными матрицами масс и жесткости колесной пары [20].

**Уравнения движения.** Упругая колесная пара представляется в ПК «УМ» упругой подсистемой, уравнения движения которой выводятся на основе единого подхода, независимо от области использования моделируемого объекта. В рамках данного подхода применяются уравнения Лагранжа второго рода с упрощенным выражением кинетической энергии, которое записывается с учетом допущения, что масса тела распределена по узлам конечноэлементной сетки. Полный вывод уравнений приводится в работе [20].

**Модель контактных сил.** Моделирование железнодорожных экипажей требует точного вычисления контактных сил

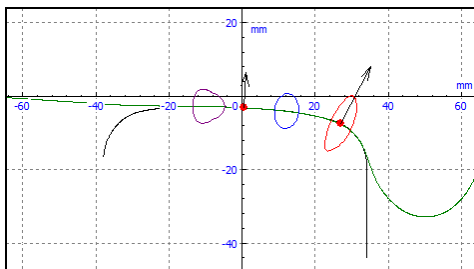


Рис. 4. Пример результата расчета многоточечной контактной модели

между колесом и рельсом. Многоточечная

модель неэллиптического контакта применяется для расчета контактных сил в ПК «УМ» (рис. 4). Для решения нормальной задачи используется так называемая полугерцевская контактная модель Пиотровского и Кика (J. Piotrowski, W. Kik) [14]. Расчет касательных сил крива выполняется на основе алгоритма FASTSIM, разработанного Калкером (Kalker) [15].

**Кинематика профиля колеса.** Одной из основных проблем моделирования динамики упругой колесной пары является расчет контактных сил, которые следует рассматривать как подвижную нагрузку. То есть точки их приложения изменяются относительно локальной системы координат и в общем случае не совпадают ни с одним узлом. Кроме того, необходимо предложить способ описания кинематики профиля колеса с учетом упругости колесной пары.

Профиль колеса абсолютно твердой колесной пары в ПК «УМ» задается в системе координат СКР0  $Y_0Z_0$  с началом отсчета в центральной точке на поверхности рельса (рис. 5). Ось  $Z_0$  параллельна оси  $Z$  СК пути с учетом возвышения рельса. Система координат профиля рельса  $Y_rZ_r$  повернута на угол  $\alpha_{r0}$  относительно СКР0 в соответствии с подуклонкой рельса. Положение и ориентация системы координат профиля колеса СКК  $Y_wZ_w$  относительно СКР0 задаются сдвигами  $\Delta Z$  и  $\Delta Y$  начала отсчета и углом  $\Delta\alpha$ . Углы  $\alpha_{r0}$  и  $\Delta\alpha$  полагаются малыми.

Профиль колеса недеформируемый; положение любой точки профиля относи-

тельно глобальной СК0 определяется положением и ориентацией локальной системы координат колесной пары СК1 и положением начала отсчета СКК относительно СК1.

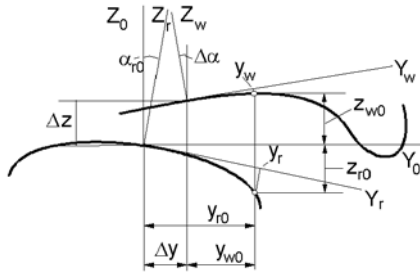


Рис. 5. Относительное положение и ориентация профилей колеса и рельса

Профиль упругой колесной пары, так же как и для абсолютно твердой пары, полагается недеформируемым. Однако его положение и ориентация рассчитываются методом наименьших квадратов с учетом упругих перемещений узлов на поверхности качения колеса.

Рассмотрим кратко данный подход. Трехмерная конечноэлементная модель колесной пары создается вращением половины её сечения, разбитого на плоские элементы, вокруг оси с некоторым угловым шагом  $\Delta\alpha$ . Эта плоская сетка должна содержать узлы, расположенные точно на профиле колеса. Таким образом, КЭ модель включает узлы, принадлежащие профилю колеса, в каждом  $j$ -м сечении, по-

вернутом на угол  $j\Delta\alpha$ . Положение и ориентация профиля колеса, находящегося в контакте с рельсом, рассчитываются с учетом упругих перемещений точек пересечения профиля с линиями КЭ сетки между двумя сечениями (рис. 6). Перемещения точек вычисляются путем интерполяции соответствующих значений в соседних узлах.

Введем следующие обозначения:  $\rho_{i0}$  – положение  $i$ -й точки недеформированного профиля (рис. 7);  $\Delta r_i$  – упругие перемещения точки;  $\Delta X$ ,  $\Delta Z$  ( $\Delta R$ ),  $\Delta\alpha$  – неизвестные смещение и поворот профиля в результате деформаций.

Положения точек с учетом их упругих перемещений могут быть записаны как сумма:

$$\rho_i = \rho_{i0} + \Delta r_i.$$

С другой стороны, они могут быть выражены через положение и ориентацию профиля следующим образом:

$$R_i = \rho_{i0} + \Delta R - \tilde{\rho}_{i0} e_x \Delta\alpha,$$

где  $e_x$  – единичный вектор вдоль оси X, ортогональной плоскости рисунка (направление движения экипажа). Тогда неизвестные значения  $\Delta R$  и  $\Delta\alpha$  могут быть найдены из условия минимизации невязки:

$$\varepsilon(\delta R, \delta\alpha) = \sum (R_i^T - \rho_i^T)(R_i - \rho_i).$$

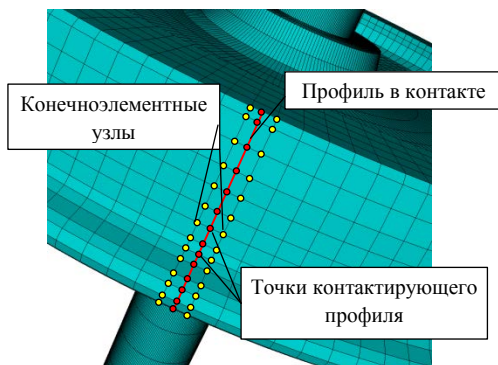


Рис. 6. Точки пересечения профиля, контактирующего с рельсом, с линиями КЭ сетки

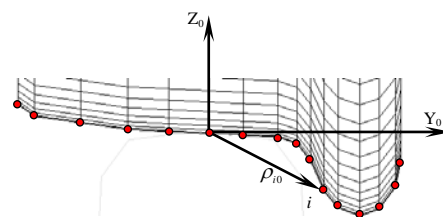


Рис. 7. Положение  $i$ -й точки профиля в СКК

**Расчет контактных сил.** Конечноэлементная модель колесной пары состоит из восьмиузловых шестигранников (кубиков). Рассмотрим основные идеи для вы-

числения обобщенных сил, соответствующих силе, приложенной в произвольной точке грани конечного элемента. Другими словами, сила, действующая в произволь-

ной точке поверхности, должна быть преобразована к узловым силам, а затем обобщенные силы рассчитываются с применением общего алгоритма для упругих тел.

В «УМ» реализованы два алгоритма расчета узловых сил: 1) упрощенный алгоритм, рассматривающий только геометрию полигона, к которому приложена сила; 2) распределение приложенной силы с использованием функций форм конечного элемента.

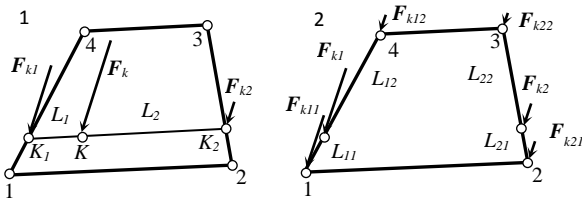


Рис. 8. Алгоритм упрощенного расчета узловых сил

Значения безразмерных координат в узлах элемента равны  $\pm 1$ . Перемещения точек элемента вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  обозна-

$$u(\xi, \eta, \zeta) = N(\xi, \eta, \zeta) u_e, \quad v(\xi, \eta, \zeta) = N(\xi, \eta, \zeta) v_e, \quad w(\xi, \eta, \zeta) = N(\xi, \eta, \zeta) w_e,$$

где  $u_e = [u_1, \dots, u_8]^T$ ,  $v_e = [v_1, \dots, v_8]^T$ ,  $w_e = [w_1, \dots, w_8]^T$ ,  $N = [N_1, \dots, N_8]$ ,

$$N_i = 1/8(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i), \quad i=1..8, \quad \text{например } N_3 = 1/8(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta).$$

Узловые силы от силы, приложенной в точке  $K$ , рассчитываются по следующим формулам:

$$F_{ex} = N^T(\xi_K, \eta_K, \zeta_K) F_{kx}, \quad F_{ey} = N^T(\xi_K, \eta_K, \zeta_K) F_{ky}, \quad F_{ez} = N^T(\xi_K, \eta_K, \zeta_K) F_{kz},$$

где  $F_{ex} = [F_{x1}, \dots, F_{x8}]^T$ ,  $F_{ey} = [F_{y1}, \dots, F_{y8}]^T$ ,  $F_{ez} = [F_{z1}, \dots, F_{z8}]^T$ ;  $\xi_K, \eta_K, \zeta_K$  – безразмерные координаты точки  $K$ ;  $F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}$  – проекции  $F_k$ . Координаты  $\xi_K, \eta_K, \zeta_K$  рассчитываются по известным значениям декартовых координат точки  $K$  с использованием итерационного алгоритма типа метода Ньютона.

**Моделирование динамики колесной пары без вращения конечноэлементной сетки.** Уравнения движения интегрируются неявным многошаговым методом типа метода Парка [17; 18]. Этот метод реализует алгоритм прогноза-коррекции.

Согласно упрощенному алгоритму, внешняя сила распределяется между узлами полигона в два этапа обратно пропорционально расстояниям от точки приложения до узлов (рис. 8).

Для описания алгоритма распределения силы с использованием функций форм введем систему безразмерных координат  $\xi, \eta, \zeta$  с началом отсчета в центре шестигранника (рис. 9) [16].

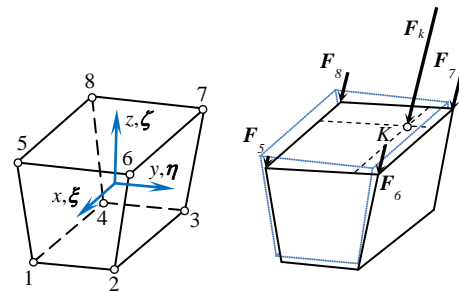


Рис. 9. Распределение приложенной силы с использованием функций форм конечного элемента

чим соответственно  $u$ ,  $v$  и  $w$ . Тогда поля перемещений определяются следующими выражениями:

Рассмотрим моделирование упругой колесной пары с невращающейся конечноэлементной сеткой. Данный прием имитирует подход Эйлера на этапе интегрирования уравнений движения.

Перед расчетом прогнозных значений обобщенных координат на новом шаге интегрирования узловые координаты поворачиваются на угол  $da$ . Используется прогнозное приращение угла поворота колесной пары вокруг оси вращения.

Пусть  $da = \varepsilon \Delta\alpha$ , где  $\Delta\alpha$  - угловой шаг конечноэлементной сетки колесной пары (рис. 10),  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_{\max}]$ ,  $\varepsilon_{\max} = 1$  для линейной интерполяции, которая рассматривается ниже.

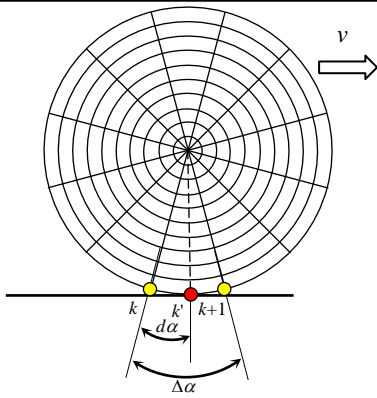


Рис. 10. К описанию подхода Эйлера

Интерполяция применяется к упругим перемещениям узлов сетки. Пусть  $\Delta r_k$  - упругое перемещение узла с номером  $k$  на предыдущем шаге интегрирования,  $\Delta \bar{r}_k$  - перемещение точки  $k'$  после вращения колеса на  $d\alpha$  (рис. 10). Тогда можно записать следующее выражение для интерполяции:

$$\Delta \bar{r}_k = a\Delta r_k + b\Delta A \Delta r_{p(k)}. \quad (1)$$

Здесь  $p(k)$  - предыдущий узел для узла с номером  $k$ , то есть узел, который займет место узла  $k$  после поворота колеса на  $\Delta\alpha$ ;  $\Delta A = A_y(\Delta\alpha)$  - матрица поворота вокруг оси колесной пары  $\Delta\alpha$ . Для линейной интерполяции значения коэффициентов:  $a = 1 - \varepsilon$ ,  $b = \varepsilon$ .

Упругие перемещения зависят от модальных координат следующим образом:

$$\min_{\bar{q}} (\bar{w}^T H^T - w^T \bar{H}^T) M (H\bar{w} - \bar{H}w) = \min_{\bar{q}} (f(\bar{w})).$$

Чтобы найти решение, необходимо рассчитать экстремум функции  $f(\bar{w})$ :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{q}} = 2 H^T M (H\bar{w} - \bar{H}w) = 2(\bar{w} - H^T M \bar{H}w) = 0.$$

Окончательно выражение преобразованных модальных координат принимает следующий вид:

$$\bar{w} = H^T M \bar{H}w = H^T M (a H + b H_p) w = a w + b X_p w.$$

Матрица  $X_p$  должна быть рассчитана перед началом моделирования:

$$X_p = H^T M H_p = \sum_{k=1}^N m_k H_k^T \Delta A H_{p(k)}.$$

**Модели пути.** В ПК УМ реализованы три модели пути, которые отличаются уровнем детализации путевой структуры:

- невесомый рельс;
- инерционный рельс, моделируемый абсолютно твердым телом;

$$\Delta r = \begin{pmatrix} \Delta r_1 \\ \dots \\ \Delta r_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 \\ \dots \\ H_N \end{pmatrix} w = H w. \quad (2)$$

По столбцам матрицы  $H$  располагаются преобразованные статические и собственные формы, рассчитанные в соответствии с методом Крэйга - Бэмптона. Они взаимно ортогональны и нормализованы в  $M$ -норме, то есть  $H^T M H = E$ , где  $M$  - матрица масс конечноэлементной модели колесной пары. Тогда выражения (1) и (2) принимают следующий вид:

$$\Delta \bar{r}_k = \left( a H_k + b \Delta A H_{p(k)} \right) w,$$

$$\Delta \bar{r} = \left( a H + b H_p \right) w = \bar{H} w.$$

Поскольку модальные координаты колесной пары являются частью набора обобщенных координат всего экипажа, их значения  $\bar{w}$  должны быть рассчитаны после поворота на  $d\alpha$  при условии минимизации невязки

$$\min_{\bar{q}} \| H\bar{w} - \bar{H}w \|^2$$

в некоторой норме. Выбор  $M$ -нормы в данном случае кажется разумным, то есть

- подробная (упругая) модель пути.

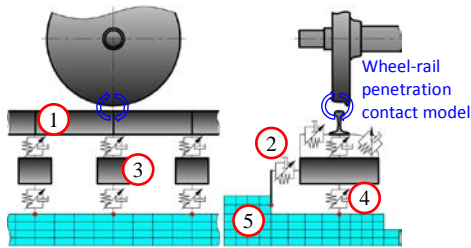


Рис. 11. Модель упругого пути: 1 - рельс; 2 - крепление рельса; 3 - твердая шпала; 4 - прокладка под шпалой; 5 - абсолютно твердое или упругое основание

Невесомый рельс применяется для исследований в частотном диапазоне 0...30 Гц. Инерционный рельс обеспечивает достоверное моделирование в диапазоне до 100 Гц, упругий путь – до 1000 Гц.

Упругая колесная пара может взаимодействовать с любой из упомянутых моделей; в данной работе приведены результаты, полученные при движении по упругому пути.

Подробная трехмерная модель пути включает упругие рельсы, прокладки, крепления, шпалы и подшпальное основание (рис. 11). Рельсы моделируются балками Тимошенко. Шпалы могут представляться абсолютно твердыми телами. Скре-

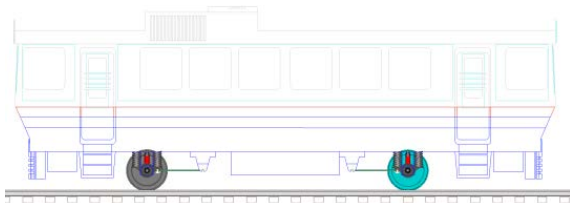


Рис. 12. Общий вид модели автомотрисы

пления и подшпальное основание моделируются с помощью нелинейных силовых элементов. Верификация упругой модели пути представлена в работе [19].

### Результаты моделирования

В этом разделе рассмотрен тестовый пример. Представлены результаты моделирования автомотрисы АС4 с постоянной скоростью 80 км/ч в криволинейном участке пути.

Модель автомотрисы включает следующие элементы (рис. 12, 13):

- упругую переднюю колесную пару;
- абсолютно твердую заднюю колесную пару;
- кузов и четыре тела, моделирующие буксы;
- один шарнир, задающий шесть координат кузова, и четыре вращательных шарнира, соединяющих буксы с колесными парами;
- 12 биполярных силовых элементов: четыре наклонных и четыре поперечных гасителя колебаний, четыре продольные тяги;
- восемь силовых элементов, моделирующих пружины подвески.

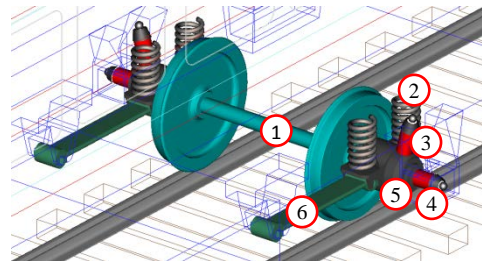


Рис. 13. Модель подвески автомотрисы: 1 - колесная пара; 2 - пружина подвески; 3 - наклонные фрикционные гасители; 4 - поперечный демпфер; 5 - букса; 6 - продольная тяга

Основные параметры модели упругой колесной пары представлены в таблице.

Таблица

Основные параметры модели упругой колесной пары

Параметр	Значение	Параметр	Значение
Число конечных элементов	46 442	Число упругих форм	35
Число узлов	56 561	Низшая частота	29,6 Hz
Число степеней свободы	339 366	Высшая частота	5456,6 Hz
Угловой шаг конечноэлементной сетки	2°	Коэффициент критического демпфирования для каждой формы	0,01



Модель упругого пути включает 1070 балочных конечных элементов, моделирующих рельсы, и 1072 тела, моделирующих шпалы. Длина каждого балочного элемента 0,6 м соответствует межшпальному расстоянию. Модель упругого пути имеет 9648 степеней свободы. Крепления представлены линейными силовыми элементами.

Геометрия пути показана на рис. 14. Он включает начальный прямой участок, первую переходную кривую, кривую постоянного радиуса, вторую переходную

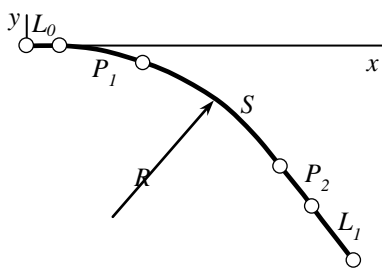


Рис. 14. Горизонтальный профиль пути для тестового примера

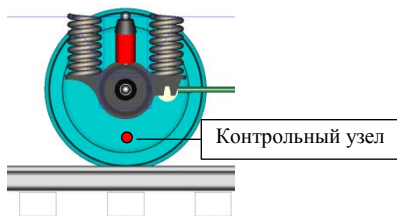


Рис. 16. Контрольный узел

Динамические параметры рассчитываются в точках, положение которых может быть задано двумя способами. Первый способ: координаты точки задаются относительно локальной СК колесной пары и, как правило, совпадают с координатами выбранного контрольного узла в недеформированном состоянии. Таким образом, точка вращается вместе с локальной СК.

кривую и конечный прямой участок. Параметры, указанные на рисунке, имеют следующие значения:  $L_0 = 10$  м,  $P_1 = 50$  м,  $S = 200$  м,  $R = 300$  м,  $P_2 = 50$  м,  $L_1 = 1000$  м.

Движение автотриссы исследуется с учетом неровностей пути. Они сгенерированы по спектральным плотностям мощности и соответствуют плохому состоянию пути согласно нормам UIC (Международное объединение железных дорог) (рис. 15).

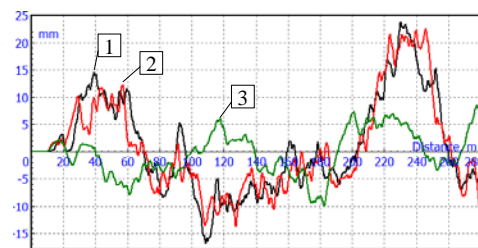


Рис. 15. Неровности пути: 1 - левый рельс, вертикальные; 2 - правый рельс, вертикальные; 3 - оба рельса, горизонтальные

Согласно второму способу, параметры вычисляются в заданной точке пространства, связанного с колесной парой. Ее координаты не зависят от угла поворота колесной пары вокруг поперечной оси Y. Например, если выбран контрольный узел, расположенный в начальный момент времени на вертикальном радиусе (рис. 16), то в соответствии со вторым способом параметры вычисляются в точке колеса, находящейся на вертикальном радиусе в данный момент времени. Первый способ будем называть «вращающаяся сетка», второй – «невращающаяся сетка».

Результаты моделирования представлены на рис. 17, 18, 19.

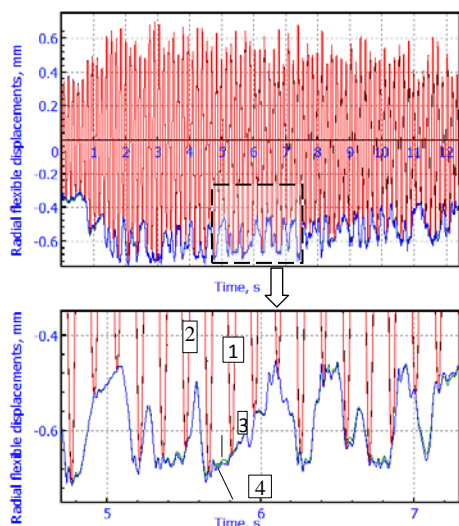


Рис. 17. Радиальные упругие перемещения в контрольном узле: 1 - вращающаяся сетка, подход Лагранжа; 2 - вращающаяся сетка, подход Эйлера; 3 - невращающаяся сетка, подход Лагранжа; 4 - невращающаяся сетка, подход Эйлера

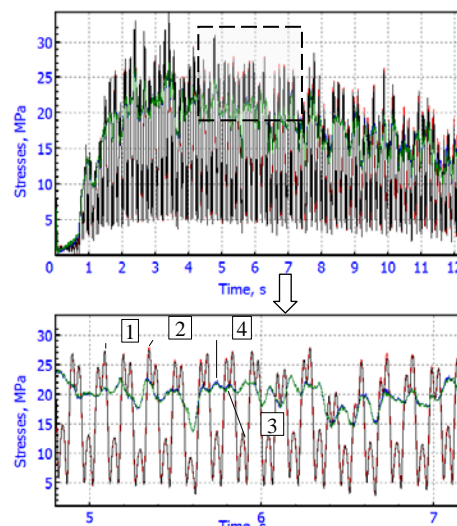


Рис. 18. Эквивалентные напряжения фон Мизеса в контрольном узле: 1 - вращающаяся сетка, подход Лагранжа; 2 - вращающаяся сетка, подход Эйлера; 3 - невращающаяся сетка, подход Лагранжа; 4 - невращающаяся сетка, подход Эйлера

## Заключение

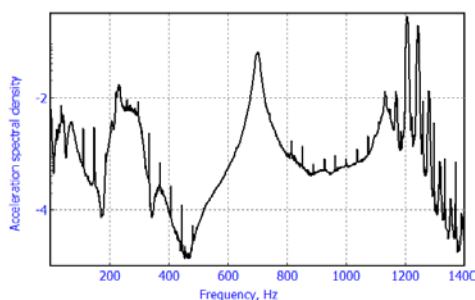


Рис. 19. Спектральная плотность мощности ускорения в контрольном узле

Применение двух предложенных в работе методов моделирования динамики упругих колесных пар приводит практически к одинаковым результатам расчета упругих перемещений и напряжений в контрольном узле.

Спектр ускорений, рассчитанных в контрольном узле, лежит в частотном диапазоне от 0 до 1300 Гц (рис. 19). Подобные результаты не могут быть получены с использованием твердотельной колесной пары.

Один численный эксперимент продолжается от 72 до 75 минут при использовании параллельных вычислений на компьютере с процессором Intel Core i7 3,5 ГГц. Моделирование с применением подхода Лагранжа выполняется быстрее по сравнению с подходом Эйлера на 8...10 %. Повышение эффективности расчетов с использованием подхода Эйлера является предметом будущих работ.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант 17-01-00815.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Morys, B. Enlargement of Out-of-Round Wheel Profiles on High Speed Trains / B. Morys // Journal of Sound and Vibration. – 1999. – Vol. 227 (5). – P. 965-978.
2. Szolc, T. Medium Frequency Dynamic Investigation of the Railway Wheelset-Track System Using a Discrete-Continuous Model / T. Szolc // Vehicle System Dynamics. – 1998. – Vol. 30. – P. 473-508.
3. Fayos, J. An Eulerian coordinate-based method for analyzing the structural vibrations of a solid of revolution rotating about its main axis / J. Fayos, L. Baeza, F.D. Denia, J.E. Tarancón // Journal of Sound and Vibration. – 2007. – Vol. 306. – P. 618-635.
4. Baeza, L. High frequency railway vehicle-track dynamics through flexible rotating wheelsets /

- L. Baeza, J. Fayos, A. Roda, R. Insa // *Vehicle System Dynamics*. – 2008. – Vol. 46 (7). – P. 647-659.
5. Vila, P. Simulation of the evolution of rail corrugation using a rotating flexible wheelset model / P. Vila, J. Fayos, L. Baeza // *Vehicle System Dynamics*. – 2001. – Vol. 49 (11). – P. 1749-1769.
6. Frigerio, M. Flexible wheelset-track model for numerical estimation of stresses in railway axles: PhD Thesis / M. Frigerio. – Politecnico di Milano, 2010.
7. Kaiser, I. Interaction of elastic wheelsets and elastic rails: modelling and simulation / I. Kaiser, K. Popp // *Vehicle System Dynamic*. – 2006. – Vol. 44. – P. 932-939.
8. Kaiser, I. On an ALE-approach for rotating elastic structures / I. Kaiser, A. Heckmann, F.v.d. Linden // *Multibody dynamics: ECCOMAS Thematic Conference*. – 2007.
9. Kaiser, I. Refining the modelling of vehicle-track interaction / I. Kaiser // *Vehicle System Dynamics*. – 2012. – Vol. 50. – P. 229-243.
10. Guiral, A. Vehicle-track interaction at high frequencies - Modelling of a flexible rotating wheelset in non-inertial reference frames / A. Guiral, A. Alonso, J.G. Giménez // *Journal of Sound and Vibration*. – 2015. – Vol. 355. – P. 284-304.
11. Shabana, A. Flexible Multibody Dynamics: Review of Past and Recent Developments / A. Shabana // *Multibody System Dynamics*. – 1997. – Vol. 1. – P. 189-222.
12. Craig, R.R.Jr. Coupling of substructures for dynamic analysis / R.R.Jr. Craig, M.C.C. Bampton // *AIAA Journal*. – 1997. – Vol. 6. - № 7. – P. 1313-1319.
13. Craig, R.R.Jr. Coupling of substructures for dynamic analysis: an overview / R.R.Jr. Craig // *AIAA Paper*, No 2000-1573. – AIAA Dynamics Specialists Conference, Atlanta.
14. Piotrowski, J. A simplified model of wheel/rail contact mechanics for non-Hertzian problems and its application in rail vehicle dynamic simulations / J. Piotrowski, W. Kik // *Vehicle System Dynamics*. – 2008. – Vol. 45. - Is. 1-2. - P. 27-48.
15. Kalker, J.J. A Fast Algorithm for the Simplified Theory of Rolling Contact / J.J. Kalker // *Vehicle System Dynamics*. – 1982. – Vol. 11. - Is. 1. – P. 1-13.
16. Zienkiewicz, O.C. The Finite Element Method. Vol. I. Basic Formulations and Linear Problems / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. - 4th ed. – London: McGraw-Hill, 1989.
17. Park, K.C. An improved stiffly stable method for direct integration of nonlinear structural dynamic equations / K.C. Park // *Journal of Applied Mechanics*. – 1975. – Vol. 42 (2). – P. 464-470.
18. Pogorelov, D. Differential-algebraic equations in multibody system modeling / D. Pogorelov // *Numerical Algorithms*. – 1998. – Vol. 19. – P. 183-194.
19. Rodikov, A. Computer simulation of train-track-bridge interaction / A. Rodikov, D. Pogorelov, G. Mikheev, R. Kovalev, Q. Lei, Y. Wang // *CORE 2016: Proceedings of International Conference on Railway Excellence (May 16-18, 2016, Melbourne, Australia)*.
20. Михеев, Г.В. Компьютерное моделирование динамики систем абсолютно твердых и упругих тел, подверженных малым деформациям: дис. ... канд. техн. наук / Г.В. Михеев. – Брянск, 2004. – 153 с.
1. Morys, B. Enlargement of Out-of-Round Wheel Profiles on High Speed Trains / B. Morys // *Journal of Sound and Vibration*. – 1999. – Vol. 227 (5). – P. 965-978.
2. Szolc, T. Medium Frequency Dynamic Investigation of the Railway Wheelset-Track System Using a Discrete-Continuous Model / T. Szolc // *Vehicle System Dynamics*. – 1998. – Vol. 30. – P. 473-508.
3. Fayos, J. An Eulerian coordinate-based method for analyzing the structural vibrations of a solid of revolution rotating about its main axis / J. Fayos, L. Baeza, F.D. Denia, J.E. Tarancón // *Journal of Sound and Vibration*. – 2007. – Vol. 306. – P. 618-635.
4. Baeza, L. High frequency railway vehicle-track dynamics through flexible rotating wheelsets / L. Baeza, J. Fayos, A. Roda, R. Insa // *Vehicle System Dynamics*. – 2008. – Vol. 46 (7). – P. 647-659.
5. Vila, P. Simulation of the evolution of rail corrugation using a rotating flexible wheelset model / P. Vila, J. Fayos, L. Baeza // *Vehicle System Dynamics*. – 2001. – Vol. 49 (11). – P. 1749-1769.
6. Frigerio, M. Flexible wheelset-track model for numerical estimation of stresses in railway axles: PhD Thesis / M. Frigerio. – Politecnico di Milano, 2010.
7. Kaiser, I. Interaction of elastic wheelsets and elastic rails: modelling and simulation / I. Kaiser, K. Popp // *Vehicle System Dynamic*. – 2006. – Vol. 44. – P. 932-939.
8. Kaiser, I. On an ALE-approach for rotating elastic structures / I. Kaiser, A. Heckmann, F.v.d. Linden // *Multibody dynamics: ECCOMAS Thematic Conference*. – 2007.
9. Kaiser, I. Refining the modelling of vehicle-track interaction / I. Kaiser // *Vehicle System Dynamics*. – 2012. – Vol. 50. – P. 229-243.
10. Guiral, A. Vehicle-track interaction at high frequencies - Modelling of a flexible rotating wheelset in non-inertial reference frames / A. Guiral, A. Alonso, J.G. Giménez // *Journal of Sound and Vibration*. – 2015. – Vol. 355. – P. 284-304.
11. Shabana, A. Flexible Multibody Dynamics: Review of Past and Recent Developments / A. Shabana // *Multibody System Dynamics*. – 1997. – Vol. 1. – P. 189-222.
12. Craig, R.R.Jr. Coupling of substructures for dynamic analysis / R.R.Jr. Craig, M.C.C. Bampton // *AIAA Journal*. – 1997. – Vol. 6. - № 7. – P. 1313-1319.

13. Craig, R.R.Jr. Coupling of substructures for dynamic analysis: an overview / R.R.Jr. Craig // AIAA Paper, No 2000-1573. – AIAA Dynamics Specialists Conference, Atlanta.
14. Piotrowski, J. A simplified model of wheel/rail contact mechanics for non-Hertzian problems and its application in rail vehicle dynamic simulations / J. Piotrowski, W. Kik // Vehicle System Dynamics. – 2008. – Vol. 45. – Is. 1-2. – P. 27-48.
15. Kalker, J.J. A Fast Algorithm for the Simplified Theory of Rolling Contact / J.J. Kalker // Vehicle System Dynamics. – 1982. – Vol. 11. – Is. 1. – P. 1-13.
16. Zienkiewicz, O.C. The Finite Element Method. Vol. I. Basic Formulations and Linear Problems / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. - 4th ed. – London: McGraw-Hill, 1989.
17. Park, K.C. An improved stiffly stable method for direct integration of nonlinear structural dynamic equations / K.C. Park // Journal of Applied Mechanics. – 1975. – Vol. 42 (2). – P. 464-470.
18. Pogorelov, D. Differential-algebraic equations in multibody system modeling / D. Pogorelov // Numerical Algorithms. – 1998. – Vol. 19. – P. 183-194.
19. Rodikov, A. Computer simulation of train-track-bridge interaction / A. Rodikov, D. Pogorelov, G. Mikheev, R. Kovalev, Q. Lei, Y. Wang // CORE 2016: Proceedings of International Conference on Railway Excellence (May 16-18, 2016, Melbourne, Australia).
20. Mikheev, G.V. Computer simulation of the dynamics of systems of absolutely solid and elastic bodies subject to small deformations: dis. ... Cand. tech. Sciences / G.V. Mikheev. - Bryansk, 2004. - 153 p.

*Статья поступила в редакцию 21.11.18*

*Рецензент: д.т.н., профессор Брянского государственного  
технического университета*

*Сакало В.И.*

*Статья принята к публикации 22. 03. 19.*

#### Сведения об авторах:

**Михеев Геннадий Викторович**, к.т.н., директор ООО «Вычислительная механика», e-mail: [mikheev@umlab.ru](mailto:mikheev@umlab.ru).

**Погорелов Дмитрий Юрьевич**, д.физ.-мат.н., профессор кафедры «Прикладная механика»

**Mikheev Gennady Victorovich**, Can. Sc. Tech., Director of PC “Computer Mechanics”, e-mail: [mikheev@umlab.ru](mailto:mikheev@umlab.ru).

**Pogorelov Dmitry Yurievich**, Dr. Phys-Math., Prof. of the Dep. “Applied Mechanics”, Bryansk State Technical University, e-mail: [pogorelov@umlab.ru](mailto:pogorelov@umlab.ru).

Брянского государственного технического университета, e-mail: [pogorelov@umlab.ru](mailto:pogorelov@umlab.ru).

**Родиков Александр Николаевич**, инженер-программист ООО «Вычислительная механика», e-mail: [rodikov@umlab.ru](mailto:rodikov@umlab.ru).

**Rodikov Alexander Nikolaevich**, Engineer-Programmer of PC “Computer Mechanics”, e-mail: [rodikov@umlab.ru](mailto:rodikov@umlab.ru).