
**ПРАВИЛО ВАЛЬДМАЙЕРА ДЛЯ СОЛНЕЧНЫХ ЦИКЛОВ:
СТАТИСТИЧЕСКАЯ ДОСТОВЕРНОСТЬ И ЗНАЧЕНИЕ ДЛЯ ДИНАМО**

**WALDMEIER LAW FOR SUNSPOT CYCLES:
STATISTICAL SIGNIFICANCE AND IMPLICATIONS FOR DYNAMO**

Л.Л. Кичатинов

*Институт солнечно-земной физики СО РАН,
Иркутск, Россия, kit@iszf.irk.ru*

L.L. Kitchatinov

*Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS,
Irkutsk, Russia, kit@iszf.irk.ru*

Аннотация. Правило Вальдмайера для соотношения длительности фазы роста и амплитуды солнечных циклов является индикатором степени нелинейности механизма динамо. В работе проведено сравнение параметров правила Вальдмайера для чисел и площадей солнечных пятен в циклах активности с 12 по 25. Неоднозначность в датах минимумов и максимумов циклов устранена сглаживанием гауссовым фильтром. Показано, что соотношения чисел и площадей пятен существенно отличаются для фаз роста и спада активности. При этом высокая корреляция для правила Вальдмайера в числах пятен является артефактом определения чисел Вольфа и не означает высокой степени нелинейности механизма динамо. Относительно низкая корреляция и уровень достоверности $\sim 70\%$ для правила Вальдмайера, определяемого по площадям пятен, указывает на слабую нелинейность в солнечном динамо и согласуется со свидетельствами, следующими из наблюдений вращения звезд.

Ключевые слова: солнечная активность, числа пятен, площадь пятен, динамо, нелинейность.

Abstract. Waldmeier law for the relation between the rise phase duration and amplitude of solar cycles is an indicator for strength of nonlinearity in the solar dynamo. The paper compares the Waldmeier law parameters for sunspot number and area in solar cycles 12–25. Uncertainty in dates of cycles' maxima and minima is fixed by smoothing with the Gaussian filter. The ratio of sunspot number to area is shown to differ significantly between rise and decline phases of solar activity. The high correlation for Waldmeier law in sunspot number is an artifact of the Wolf number definition and does not imply any strong nonlinearity in the dynamo mechanism. The relative low correlation and significance level of about 70 % in Waldmeier law for sunspot area indicates a weak nonlinearity in the solar dynamo and agrees with evidences from observations of stellar rotation.

Keywords: solar activity, sunspot number, sunspot area, dynamo, nonlinearity.

ВВЕДЕНИЕ

Среди многих закономерностей, установленных для солнечных циклов, правило Вальдмайера, вероятно, является наиболее значимым для теории солнечного динамо. Правило утверждает обратную статистическую зависимость между амплитудой солнечных циклов и длительностью фазы роста от минимума до максимума цикла: чем выше амплитуда, тем короче фаза роста [Waldmeier, 1935]. Правило Вальдмайера, установленное по числам Вольфа солнечных пятен, имеет коэффициент корреляции ~ -0.7 и статистическую достоверность более 98 % [Nathaway, 2015]. Настолько существенная зависимость от амплитуды цикла указывает на присутствие сильной нелинейности в механизме солнечной активности. Имеются, однако, и противоположные свидетельства.

Генерация магнитного поля в моделях солнечного и звездного динамо появляется при превышении величиной динамо-числа определенной критической величины [Charbonneau, 2020; Charbonneau, Sokoloff, 2023]. Усиление поля останавливается в результате его обратного влияния на генерирующие поле тече-

ния, т. е. из-за нелинейных эффектов. Относительная величина превышения динамо-числом его критической для включения динамо величины — так называемая «закритичность» — может служить мерой нелинейности. Динамо-число можно понимать как соответствующим образом нормированную скорость вращения. Наблюдения звезд [van Saders et al., 2016] показывают падение магнитной активности по мере уменьшения скорости вращения. Замедленные вращения продолжается до достижения его скоростью некоторой минимальной величины, зависящей от массы звезды. Такую минимальную скорость вращения естественно считать критической для действия звездного динамо [Кичатинов, Непомнящих, 2017; Cameron, Schussler, 2017]. Скорость вращения Солнца превышает эту критическую величину на $\sim 10\%$ [Metcalfe et al., 2016]. Поэтому закритичность солнечного динамо можно оценить также величиной $\sim 10\%$ [Kitchatinov, Nepomnyashchikh, 2017]. Модели солнечного динамо воспроизводят правило Вальдмайера лишь при значительно большей закритичности [Karak, Choudhuri, 2011; Pipin, Kosovichev, 2011].

Важной характеристикой для физики солнечной активности является площадь пятен. Площадь связана с магнитным потоком активных областей [Platov, Pevtsov, 2014], и именно из данных о площадях пятен оцениваются важнейшие параметры моделей солнечного динамо [Dasi-Espuig et al., 2010; Кичатинов, Олемской, 2011; Jiang et al., 2013; Олемской и др., 2013; Sreedevi et al., 2024].

Однако первая оценка эффекта Вальдмайера по данным о площадях пятен [Dikpati et al., 2008] показала его отсутствие. Позднее Karak, Choudhuri [2011] обратили внимание на то, что такой результат может быть связан с неоднозначностью дат минимумов и максимумов солнечных циклов для примененного в [Dikpati et al., 2008] сглаживания данных гауссовым фильтром с полушириной один год и, если для устранения этой неопределенности изменить определение длительности фазы роста солнечных циклов, эффект Вальдмайера обнаруживается и в площадях пятен, хотя и на меньшем, чем для чисел пятен, уровне достоверности (~67%). В данной статье будет показано, что неоднозначность дат устраняется и с увеличением полуширины фильтра. При этом эффект Вальдмайера обнаруживается в согласии с результатами [Karak, Choudhuri, 2011; Osipova, Nagovitsyn, 2017] и при стандартном определении фазы роста. Однако основной целью работы является выяснение причин различия параметров правила Вальдмайера для чисел и площадей солнечных пятен. Эти причины, по всей вероятности, кроются в нелинейной связи чисел и площадей (магнитного потока) пятен [Carrasco et al., 2016; Nagovitsyn, Osipova, 2021], заложенной в самом определении чисел Вольфа. При этом относительно низкие коэффициент корреляции и статистическая значимость правила Вальдмайера для площадей пятен уже не подразумевают сильной нелинейности для физики солнечного динамо.

МЕТОД

В качестве исходных данных использовался ряд среднемесячных значений площадей пятен с мая 1874 по декабрь 2025 г., известный как продолженный ряд данных Гринвичской обсерватории [http://solarcyclescience.com/AR_Database/sunspot_area.txt]. Для чисел солнечных пятен (версия 2.0) бралась часть данных Мирового центра по солнечно-земной физике [http://www.wdcb.ru/stp/data/solar.act/sunspot/SILSO/ver2/SN_m/SN_m_tot_V2.0.txt] за тот же период времени.

Для устранения нерегулярных флуктуаций обряда были сглажены гауссовым фильтром

$$W(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right) - \left(3 - \frac{t^2}{2a^2}\right)e^{-2}, \quad (1)$$

$$-2a + 1 \leq t \leq 2a - 1,$$

где t — время, мес; $2a$ — полуширина фильтра. Сглаживание гауссовым фильтром выгодно отличается от традиционного 13-месячного усреднения отсутствием привнесенных самим сглаживанием искусственных короткопериодических вариаций (см. рис. 23

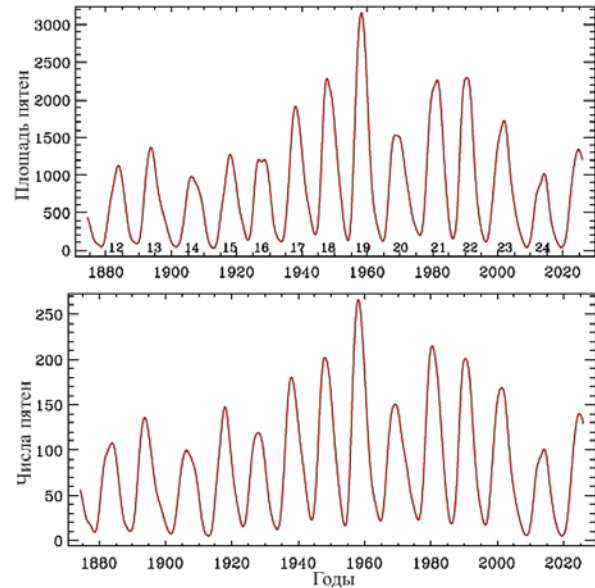


Рис. 1. Площадь пятен в миллионных долях солнечной полусферы (вверху) и числа пятен (внизу) для солнечных циклов с 12 по 25. Номера циклов показаны на верхней панели

в [Nathaway, 2015]). При величине $a = 12$ мес исчезает неопределенность в положении максимумов и минимумов циклов, что важно для анализа правила Вальдмайера. Сглаженные площади и числа солнечных пятен показаны на рис. 1. Только 16-й цикл по данным о площадях является двухвершинным. Дата максимума для этого цикла принята соответствующей первому, более раннему и более высокому пику.

Два обстоятельства, касающихся примененной процедуры сглаживания с фильтром (1), требуют пояснения. Результат сглаживания для некоторой даты получается в результате суммирования данных, отстоящих на целое число месяцев от данной даты с весом формулы (1) с последующей нормировкой на сумму весов по интервалу сглаживания. Строго говоря, такая процедура применима для дат, отстоящих от граничных дат ряда данных не менее чем на $2a - 1$ мес. Сглаживание данных вблизи границ проводилось лишь по той части фильтра (1), которая приходилась на присутствующие в данных даты (с нормировкой на сумму весов по такому «укороченному» интервалу сглаживания). Поэтому рис. 1 охватывает и максимум текущего 25-го цикла, который приходится на октябрь 2024 г. Заметим также, что, чем шире интервал сглаживания, тем выше значения минимумов и ниже амплитуды максимумов. Поэтому амплитуды циклов рис. 1 несколько ниже получающихся в результате традиционного 13-месячного скользящего усреднения.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Сравнение параметров правила Вальдмайера для площадей и чисел пятен показано на рис. 2. Видно, что в обоих случаях имеется значительный разброс положений циклов относительно линии корреляции. К нерегулярным изменениям амплитуд и продолжительностей циклов активности приводят как флуктуации параметров динамо [Moss et al., 2008;

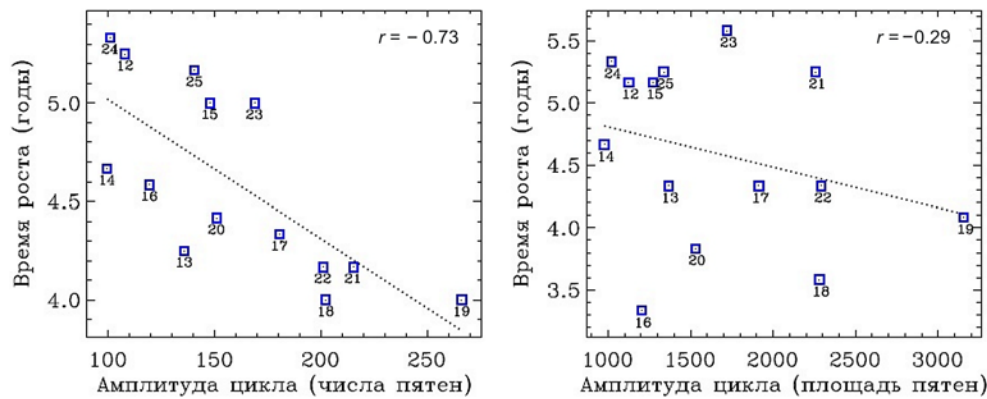


Рис. 2. Положение солнечных циклов на диаграмме время роста — амплитуда цикла для чисел (слева) и площадей (справа) солнечных пятен. Пунктиром показаны линии линейной регрессии. В поле рисунка приведены значения коэффициентов корреляции r

Олемской и др., 2013], так и ограничения в наблюдениях [Витинский и др., 1986].

Корреляция времени роста циклов и их амплитуды для чисел пятен гораздо выше, чем для их площадей. Существенно отличаются и уровни статистической значимости по оценке вероятности ложной корреляции

$$P_{\text{false}} = 1 - A\left(r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}; n-2\right), \quad (2)$$

где $A(t|v)$ — распределение Стьюдента; r — коэффициент корреляции; n — число событий (14 циклов в нашем случае). Получаем $P_{\text{false}}=0.003$ для чисел и $P_{\text{false}}=0.315$ для площадей пятен. Тот факт, что правило Вальдмайера с вероятностью 0.997 справедливо для чисел солнечных пятен, но с вероятностью 32 % отсутствует для их площадей, мало добавляет к пониманию солнечной активности. Желательно выяснить причины такого различия.

Числа Вольфа представляют комбинацию чисел пятен с числом их групп (подробнее см. [Витинский и др., 1986; Hathaway, 2015]), в которой, вообще говоря, размер пятен не учитывается. Однако в работах [Nagovitsyn, Pevtsov, 2016; Наговицын и др., 2016] были выявлены две популяции пятен, отличающиеся по размеру и времени жизни. Имеет место антикорреляция чисел относительно мелких короткоживущих и крупных долгоживущих пятен [Nagovitsyn et al., 2012]. Эти результаты приводят к следующему объяснению различия правил Вальдмайера для чисел и площадей пятен рис. 2. В начале циклов вклад мелких пятен относительно велик и числа Вольфа растут относительно быстро по сравнению с площадью пятен. По мере приближения к максимуму цикла возрастает вклад крупных пятен. Поэтому числа Вольфа достигают максимума раньше площади (магнитного потока) пятен. Пример такого поведения дают траектории циклов 21 и 23 на диаграммах число — площадь пятен, показанных на рис. 3 (см. также [Badalyan, Obridko, 2011]). Траектории имеют вид петель, на которых рост проходит выше траектории спада. Примечательно, что на фазе спада вклад крупных пятен остается относительно высоким. Поэтому траектории спада на рис. 2 проходят ниже траекторий

роста. Возможно, это связано с миграцией активности к экватору: неустойчивость, вызывающая концентрацию магнитного потока для образования солнечных пятен, усиливается с уменьшением широты [Kitchatinov, 2020].

Такое поведение, однако, характерно лишь для относительно мощных циклов. Среди семи циклов с 17 по 23 с амплитудой выше средней из показанных на рис. 1 средняя длительность фазы роста по данным о площадях (4.42 года) заметно больше, чем для чисел пятен (4.30 года). Однако средние длительности для всех четырнадцати циклов — 4.59 года для площадей и 4.60 года для чисел — отличаются незначительно. Поэтому петельная форма траекторий циклов на рис. 3 не является общим правилом. Примеры наиболее существенных отклонений показаны на рис. 4.

Тем не менее, большая величина отношения чисел пятен к их площадям для фаз роста циклов по сравнению с фазами спада имеет место в статистике солнечных пятен. Соотношение площадей и чисел пятен принято аппроксимировать линейной зависимостью [Hathaway, 2015]. На рис. 5 показаны линейные аппроксимации отдельно для фаз роста и спада, а также для общей статистики циклов с 21-го по текущий 25-й, для которых имеется однородный ряд данных по площадям пятен, поступающих из одного источника [Hathaway, 2015]. Линия для фаз роста проходит выше линии спада, и эти линии расходятся. Для циклов с 12-го по 25-й получается такая же картина, но угол расхождения несколько меньше.

Рост активности происходит в среднем по верхней линии рис. 5. Вблизи максимумов наблюдается переход с верхней линии на нижнюю. Если этот переход происходит плавно, как на рис. 3, то фаза роста для площадей пятен длится дольше, чем для их чисел. Эта закономерность проявляется лишь в среднем и из-за расхождения линий рис. 5 выражена сильнее для циклов большой амплитуды.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Высокая отрицательная корреляция длительности фазы роста и амплитуды солнечных циклов для чисел пятен, по всей вероятности, является следствием

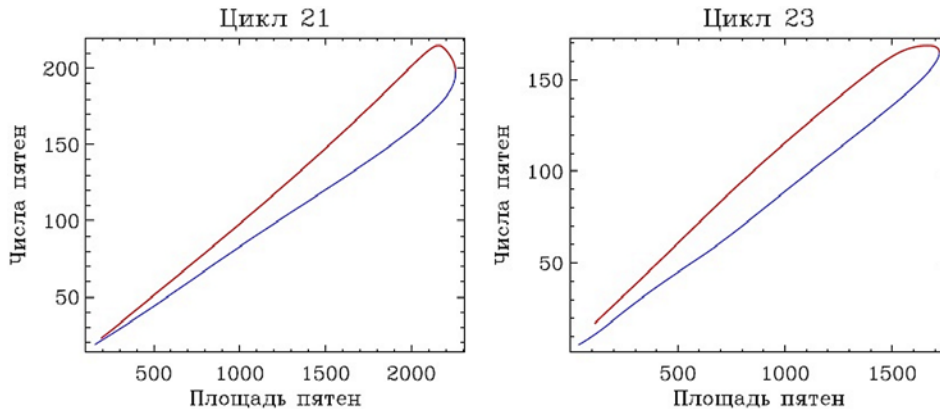


Рис. 3. Траектории солнечных циклов 21 и 23 в координатах числа пятен — площадь пятен. Фазы роста и спада показаны красной и синей линией соответственно. Даты минимумов и максимумов определены по площадям пятен

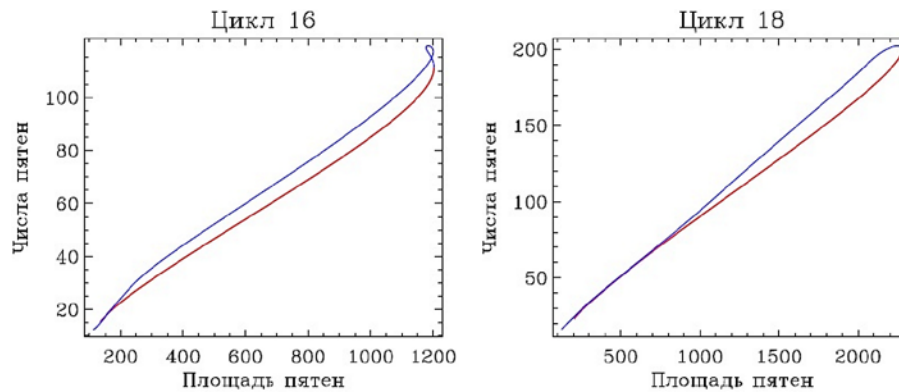


Рис. 4. То же, что на рис. 3, но для циклов 16 и 18, которые показывают наиболее существенные отклонения от петлевой структуры траекторий в координатах числа пятен — площадь пятен

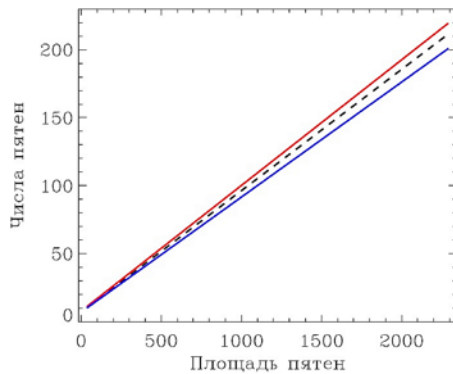


Рис. 5. Линейные аппроксимации соотношений чисел и площадей пятен для фаз роста (красная линия), спада (синяя линия) и общей статистики (штриховая линия) в циклах 21–25

определения чисел Вольфа и не несет содержательной информации о физике солнечной активности. Правило Вальдмайера для площадей (магнитного потока) солнечных пятен выражено слабо и имеет место с вероятностью ~ 0.7 .

Зависимость длительности роста циклов активности от их амплитуды указывает на присутствие нелинейных эффектов в механизме динамо. Слабое проявление правила Вальдмайера для площадей солнечных пятен указывает на слабую нелинейность и, как следствие, малую заkritичность солнечного динамо. Это согласуется с выводами для Солнца, следующими из данных о вращении звезд [Metcalf et al.,

2016]. С этой точки зрения, можно ожидать более ярких проявлений правила Вальдмайера для звезд, вращающихся быстрее Солнца, что, по-видимому, действительно наблюдается [Garg et al., 2019].

Отношение чисел пятен к их площадям в среднем выше на фазе роста циклов по сравнению с фазой спада (см. рис. 3, 5). Это означает, что на фазе спада пятна крупнее. Данное обстоятельство может иметь значение для физики формирования солнечных пятен, все еще слабо изученной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России.

Автор признателен Ю.А. Наговицыну и А.В. Гетлингу за полезные замечания и обсуждения.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Витинский Ю.И., Копецкий М., Кушлин Г.В. *Статистика пятнообразовательной деятельности Солнца*. М.: Наука, 1986, 296 с.
- Кичатинов Л.Л., Олемской С.В. Действует ли механизм Бэбкока—Лейтона на Солнце? *Письма в АЖ*. 2011, т. 37, № 9, с. 713–715.
<https://doi.org/10.1134/S0320010811080031>.
- Кичатинов Л.Л. Непомнящих А.А. Согласованная модель солнечного динамо и дифференциального вращения. *Письма в АЖ*. 2017, т. 43, № 5, с. 370–382.
<https://doi.org/10.7868/S0320010817040039>.

- Наговицын Ю.А., Певцов А.А., Осипова А.А. и др. Две популяции солнечных пятен и вековые вариации их характеристик. *Письма в АЖ*. 2016, т. 42, № 10, с. 773–782. <https://doi.org/10.1134/S1063773716090048>.
- Олемской С.В., Чудури А.Р., Кичатинов Л.Л. Флуктуации альфа-эффекта и глобальные минимумы солнечной активности. *Астрономический журнал*. 2013, т. 90, № 6, с. 501–511. <https://doi.org/10.7868/S000462991305006X>.
- Badalyan O.G., Obridko V.N. North-South asymmetry of the sunspot indices and its quasi-biennial oscillations. *New Astronomy*. 2011, vol. 16, iss. 6, pp. 357–365. <https://doi.org/10.1016/j.newast.2011.01.005>.
- Cameron R.H., Schussler M. Understanding solar cycle variability. *Astrophys. J.* 2017, vol. 843, iss. 2, id. 111. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/aa767a>.
- Carrasco V.M.S., Vaquero J.M., Gallego M.C., Sanchez-Bajo F. A normalized sunspot-area series starting in 1832: An update. *Solar Phys.* 2016, vol. 291, iss. 9–10, pp. 2931–2940. <https://doi.org/10.1007/s11207-016-0943-9>.
- Charbonneau P. Dynamo models of the solar cycle. *Living Reviews in Solar Physics*. 2020, vol. 17, iss. 1, id. 4. <https://doi.org/10.1007/s41116-020-00025-6>.
- Charbonneau P., Sokoloff D. Evolution of solar and stellar dynamo theory. *Space Sci. Rev.* 2023, vol. 219, iss. 5, id. 35. <https://doi.org/10.1007/s11214-023-00980-0>.
- Dasi-Espuig M., Solanki S.K., Krivova N.A., et al. Sunspot group tilt angles and the strength of the solar cycle. *Astron. Astrophys.* 2010, vol. 518, id. A7. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201014301>.
- Dikpati M., Gilman P.A., de Toma G. The Waldmeier effect: An artifact of the definition of Wolf sunspot number? *Astrophys. J. Lett.* 2008, vol. 673, iss. 1, id.: L99. <https://doi.org/10.1086/527360>.
- Garg S., Karak B.B., Egeland R., et al. Waldmeier effect in stellar cycles. *Astrophys. J.* 2019, vol. 886, iss. 2, id. 132. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab4a17>.
- Hathaway D.H. The solar cycle. *Living Reviews in Solar Physics*. 2015, vol. 12, no. 1, id. 4. <https://doi.org/10.1007/lrsp-2015-4>.
- Jiang J., Cameron R.H., Schmitt D., Isik E. Modeling solar cycles 15 to 21 using a flux transport dynamo. *Astron. Astrophys.* 2013, vol. 553, id. A128. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321145>.
- Karak B.B., Choudhuri A.R. The Waldmeier effect and the flux-transport solar dynamo. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2011, vol. 410, iss. 3, pp. 1503–1512. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.17531.x>.
- Kitchatinov L.L. Flux tubes forming instability near the base of the rotating convection zone: A possible explanation for the low latitudes of sunspots. *Astrophys. J.* 2020, vol. 893, iss. 2, id. 131. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab7fa8>.
- Kitchatinov L., Nekomnyashchikh A. How supercritical are stellar dynamos, or why do old main-sequence dwarfs not obey gyrochronology? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2017, vol. 470, iss. 3, pp. 3124–3130. <https://doi.org/10.1093/mnras/stx1473>.
- Metcalf T.S., Egeland R., van Saders J. Stellar evidence that the solar dynamo may be in transition. *Astrophys. J. Lett.* 2016, vol. 826, iss. 1, id. L2. <https://doi.org/10.3847/2041-8205/826/1/L2>.
- Moss D., Sokoloff D., Usoskin I. Solar grand minima and random fluctuations in dynamo parameters. *Solar Phys.* 2008, vol. 250, iss. 2, id. 221. <https://doi.org/10.1007/s11207-008-9202-z>.
- Nagovitsyn Yu.A., Pevtsov A.A. On the presence of two populations of sunspots. *Astrophys. J.* 2016, vol. 833, iss. 1, id. 94. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/833/1/94>.
- Nagovitsyn Yu.A., Osipova A.A. Average annual total sunspot area in the last 410 yr: the most probable values and limits of their uncertainties. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2021, vol. 505, iss. 1, pp. 1206–1212. <https://doi.org/10.1093/mnras/stab1328>.
- Nagovitsyn Yu.A., Pevtsov A.A., Livingston W.C. On a possible explanation of the long-term decrease in sunspot field strength. *Astrophys. J. Lett.* 2012, vol. 758, iss. 1, id. L20. <https://doi.org/10.1088/2041-8205/758/1/L20>.
- Osipova A.A., Nagovitsyn Yu.A. The Waldmeier effect for two sunspot populations. *Geomagnetism and Aeronomy*. 2017, vol. 57, iss. 8, pp. 1092–1100. <https://doi.org/10.1134/S0016793217080199>.
- Pipin V.V., Kosovichev A.G. The asymmetry of sunspot cycles and Waldmeier relation as a result of nonlinear surface-shear shaped dynamo. *Astrophys. J.* 2011, vol. 741, iss. 1, id. 1. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/741/1/1>.
- Sreedevi A., Jha B.K., Karak B.B., Banerjee D. Analysis of BMR tilt from Auto TAB catalog: Hinting towards thin flux tube model? *Astrophys. J.* 2024, vol. 966, iss. 1, id. 112. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/ad34b8>.
- Tlatov A.G., Pevtsov A.A. Bimodal distribution of magnetic fields and areas of sunspots. *Solar Phys.* 2014, vol. 289, iss. 4, pp. 1143–1152. <https://doi.org/10.1007/s11207-013-0382-9>.
- van Saders J.L., Ceillier T., Metcalfe T.S., et al. Weekend magnetic braking as the origin of anomalously rapid rotation in old field stars. *Nature*. 2016, vol. 529, iss. 7585, pp. 181–184. <https://doi.org/10.1038/nature16168>.
- Waldmeier M. Neue Eigenschaften der Sonnenfleckenkurve. *Astron. Mitt. Zurich*. 1935, vol. 14, pp. 105–136.
- URL: http://solarcyclescience.com/AR_Database/sunspot_area.txt (дата обращения 11 февраля 2026 г.).
- URL: http://www.wdcb.ru/stp/data/solar.act/sunspot/SILSO/ver2/SN_m/SN_m_tot_V2.0.txt (дата обращения 11 февраля 2026 г.).

Как цитировать эту статью:

Кичатинов Л.Л. Правило Вальдмайера для солнечных циклов: статистическая достоверность и значение для динамо. *Солнечно-земная физика*. 2026, т. 12, № 2, с. 5–9. <https://doi.org/10.12737/szf-122202601>.