

## Дидактические особенности изучения действительных чисел в школьном курсе математики

### Didactic Features of Studying the Real Numbers in the School Course of Mathematics

Получено: 23.01.2017 г. / Одобрено: 26.01.2017 г. / Опубликовано: 19.03.2017 г.

#### Алексеенко А.С.

Ст. преподаватель кафедры естественнонаучных дисциплин  
НОУ ВО «Московский технологический институт»,  
Россия, 119334, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 38А,  
e-mail: ann-206@yandex.ru

#### Лихачева М.В.

Учитель математики, ГБОУ Школа № 72,  
Россия, 121309, г. Москва, ул. Большая Филевская, д. 15,  
e-mail: 72@edu.mos.ru

#### Alekseenko A.S.

Senior Lecturer, Department Natural Science Disciplines,  
Moscow Technological Institute,  
38A, Leninsky Prospect, Moscow, 119334, Russia,  
e-mail: ann-206@yandex.ru

#### Likhacheva M.V.

Teacher of Mathematics, School № 72,  
15, Bolshaya Filyovskaya St., Moscow, 121309, Russia,  
e-mail: 72@edu.mos.ru

**Аннотация.** Статья посвящена особенностям изучения действительных чисел в рамках дисциплины «Алгебра и начала анализа» в средней общеобразовательной школе. Тема «Действительные числа» не является легкой для понимания, часто вызывает затруднения у учащихся. Однако изучению этой темы в настоящее время уделяется недостаточно внимания и времени. Следствием этого является непонимание школьниками и выпускниками школ, что собой представляют действительные числа, иррациональные числа. В то же время понятие действительного числа необходимо для дальнейшего успешного изучения математики. Для повышения эффективности изучения этой темы и формирования четкого представления о различных числах предложено существенно дополнить материал современных школьных учебников, увеличить количество часов на изучение действительных чисел, а также включить в школьный курс алгебры разделы «Комплексные числа» и «Алгебраические структуры».

**Ключевые слова:** алгебра и начала анализа, действительные числа, иррациональные числа, среднее общее образование, дидактика.

**Abstract.** The article is devoted to the study of the peculiarities of real numbers in the discipline "Algebra and analysis" in the secondary school. The theme of "Real numbers" is not easy to understand and often causes difficulties for students. However, the study of this topic is now being given enough attention and time. The consequence is a lack of understanding of students and school-leavers, what constitutes the real numbers, irrational numbers. At the same time the notion of a real number is required for further successful study of mathematics. To improve the efficiency of studying the topic and form a clear idea about the different numbers offered to add significantly to the material of modern textbooks, increase the number of hours in the study of real numbers, as well as to include in the school course of algebra topics "Complex numbers" and "Algebraic structures".

**Keywords:** algebra and analysis, real numbers, irrational numbers, secondary education, didactics.

### I. Введение

В настоящее время программы изучения математики в общеобразовательных школах по учебникам, рекомендованным Министерством образования и науки Российской Федерации, предполагают последовательное изучение школьниками натуральных чисел, дробей, целых чисел, рациональных чисел, иррациональных чисел и действительных чисел. Процесс изучения чисел начинается в 1-м классе начальной школы знакомством с натуральными числами, которые используются для счета предметов, далее на наглядных примерах вводятся дроби, целые числа, рациональные числа. Завершением расширения понятия о числе в средней общеобразовательной школе является изучение в 10–11-х

классах иррациональных и действительных чисел в курсе предмета «Алгебра и начала анализа». Порядок изучения различных чисел совпадает с порядком их появления в ходе развития математики как науки.

Последовательный процесс изучения новых, «более сложных» чисел на протяжении всего курса математики в школе должен способствовать осознанному и твердому усвоению учащимися знаний о числах. Однако заметная часть выпускников средних общеобразовательных школ (в том числе успешно сдавших итоговые экзамены, поступивших на технические и экономические направления обучения в вузы) не может объяснить, что такое действительные числа, иррациональные числа и др. Проблема эта, конечно, заключается не в запоми-

нании формулировки, а в отсутствии понимания причин появления различных чисел с развитием математики как науки, отсутствии осознания того, как расширяется понятие числа с добавлением новых возможных операций, и т. д.

Сложившаяся ситуация приводит к тому, что дальнейшее изучение предметов школьного курса «Алгебра и начал анализа», «Геометрия», а также дисциплин образовательных программ высшего образования «Математика», «Высшая математика», «Математический анализ» и др. становится значительно менее осознанным и более затруднительным. Понятие действительного числа — одно из фундаментальных понятий математики, на нем строится дальнейшее математическое образование. Без ясного понимания того, что представляют собой действительные числа, учащийся не может осмысленно находить приближенные значения величин, вычислять пределы последовательностей и производные функций и т.д.

О сложностях изучения иррациональных чисел в средней школе и возможных способах преодоления этой проблемы писал советский математик Г.М. Фихтенгольц [19]. Среди разнообразия методов изучения иррациональных чисел, предложенных в этой публикации, есть и применение возможностей школьного курса геометрии при доказательстве следующей леммы: «Прямая, параллельная какой-нибудь стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному». В процессе доказательства рассматриваются два случая: когда отрезки имеют общую меру и не имеют общей меры. Автор обращает внимание на эту ситуацию как на возможность подготовки учеников к изучению иррациональных чисел, так как лемма доказывается в курсе планиметрии, т.е. раньше, чем начинается целенаправленное изучение иррациональных чисел.

Среди работ отечественных авторов нашего времени необходимо выделить труды В.Ф. Чаплыгина [20; 21], в которых учителю даны рекомендации по применению наглядно-интуитивного подхода к данному материалу, а также активному использованию задач по изучаемой теме.

В соответствии с актуальными изменениями в образовательных стандартах школьного образования и введением многоуровневых учебников по алгебре и началам анализа в публикации [18] представлены некоторые методические особенности преподавания темы «Действительные числа» на профильном уровне.

Среди педагогических разработок можно также отметить рекомендации по изучению иррациональ-

ных чисел с помощью самоподобных визуальных моделей [5].

В качестве наглядной, дополнительной информации при подготовке к урокам по данной теме можно использовать материал, предложенный в статье [14], где приведена иллюстрация связи между иррациональными числами, золотым сечением и пропорциями.

Из множества исследований современных зарубежных авторов отметим публикацию [22], в которой с помощью педагогического эксперимента анализируется роль следующих фактов:

- существование несоизмеримых величин;
- информация о том, что рациональные числа не закрывают непрерывно всю числовую ось в создании представления об иррациональных числах.

В исследовании [24] приведены результаты испытаний над группами учащихся, проведенных с целью выявления проблем в восприятии иррационального числа, а также предлагаются общие рекомендации по формированию верного представления об этих числах.

В публикации [23] представлена анкета для учащихся с целью выявления проблемных мест в восприятии иррациональных, рациональных и действительных чисел, сравнения чисел между собой и т.д., подробно описан эксперимент над группами испытуемых и проведен анализ результатов. Проведенное испытание подтверждает наличие трудностей у учащихся в идентификации иррациональных чисел.

## II. Анализ методики изучения действительных чисел в школе

Согласно программам, которые соответствуют учебникам для общеобразовательных школ, используемым в настоящее время, на изучение действительных чисел, на наш взгляд, отводится недостаточное количество времени. Например, в учебнике [8] информация о действительных числах содержится в разделе «Сведения из истории», который школьники чаще всего просматривают мельком или пропускают, а в учебнике [1] изучению действительных чисел просто уделяется крайне мало внимания. Отсутствует четкая, обобщающая, наглядная и доступная информация о том, что множество действительных чисел содержит все ранее изученные в школьном курсе математики числа. В каком порядке изучаются числа в школьном курсе математике и почему — эти сведения чаще всего остаются в памяти учеников в виде разрозненной информации.

Учебный материал, связанный с понятием действительных чисел, не самый простой для восприятия школьника, требует особого внимания и труда от учителя. Для эффективного усвоения этого материала учащимися необходима четкая, логически обоснованная система тщательно подобранной теоретической информации, включающая наглядные примеры и практические задания, которых в вышеуказанных современных учебниках нет или содержится недостаточное количество. При этом следует учесть, что программа предмета «Алгебра и начала анализа» 10–11-х классов содержит значительное количество нового материала. Выделить дополнительное время для обобщения информации о числах учителю достаточно непросто.

Следует также отметить, что контрольно-измерительные материалы единого государственного экзамена практически не включают в себя задания на проверку знаний испытуемых о различных видах чисел, понимания разницы между ними [16]. Это опять же приводит к тому, что в учебном процессе данному материалу часто уделяют значительно меньше времени, чем следует, отдавая приоритет заданиям из разделов школьного курса, которые могут быть включены в КИМ ЕГЭ. Значительная часть времени в старших классах отведена на подготовку учащихся к сдаче ЕГЭ, отработку частных навыков решения определенного набора заданий, при этом в жертву приносится глубина и системность знаний по предмету.

В школьной программе изучаются иррациональные числа  $\pi$  и  $e$ , что, казалось бы, должно способствовать лучшему усвоению иррациональных чисел, иллюстрировать их наличие и применение в математике. Число  $\pi$  появляется при изучении окружности в курсе планиметрии и используется в формулах, связанных с окружностью, а в курсе стереометрии — при вычислении площади поверхности и объема тел вращения. Как правило, выпускники помнят, что  $\pi$  является постоянной величиной, выражающей отношение длины окружности к диаметру, помнят и умеют использовать формулы, в которых есть это число. Но наличие числа  $e$  в школьных учебниках для учащихся практически необъяснимо: оно появляется либо как основание показательной функции, значение производной (тангенс угла наклона касательной) которой в точке  $x_0 = 0$  равно 1 [3; 8], либо как основание при определении натурального логарифма [1], необходимость наличия которого в школьной программе тоже не вполне очевидна. Поскольку, как правило, второй замечательный предел не изучается в курсе

предмета «Алгебра и начала анализа» общеобразовательной школы, число  $e$  чаще всего остается в памяти школьников лишь как основание показательной функции  $y = e^x$ , производная которой совпадает с исходной функцией. Знание этого факта не добавляет ничего нового к пониманию, что такое иррациональные числа.

Из вышесказанного следует сделать вывод: содержание учебного материала и отведенное количество часов на изучение действительных чисел в современных учебниках для общеобразовательной школы не способствуют глубокому и четкому усвоению понятий иррациональных и действительных чисел, развитию умений работать с числовыми множествами, правильному представлению о разных видах чисел.

### **III. Выявление дидактических особенностей и акцентов при изучении темы «Действительные числа»**

Выходом может являться ряд мер, способствующих более эффективному усвоению школьниками знаний о числах. Вспомним, что изучению различных числовых множеств уделялось значительное внимание в некоторых отечественных школьных учебниках прошлого столетия. Приведем несколько примеров.

Например, в главе II части I учебника [9] приведен краткий исторический обзор, иллюстрирующий, как от натуральных чисел, используемых первоначально для счета предметов, человек последовательно подошел к действительным числам. Здесь внимание уделяется причинам появления новых видов чисел — невозможности выполнить определенные операции над имеющимися числами. С помощью наглядных примеров обосновано появление действительных чисел. Отдельно следует отметить материал, посвященный геометрическому изображению действительных чисел, также значительное место занимает информация о действиях над числами. В главе XI части II предусмотрено повторение известных из курса средней школы законов умножения и сложения чисел, вводятся понятия числового поля и кольца, рассматриваются поле рациональных чисел, кольцо целых чисел, кольцо действительных чисел. Предложены практические задания для усвоения определений поля и кольца. Затем при расширении поля действительных чисел таким образом, чтобы было выполнимо извлечение корней для всех действительных чисел, вводится понятие комплексного числа и множество комплексных чисел, вклю-

чающее в себя все ранее изученные числовые множества.

Обсуждение понятий числового поля и кольца, задания, связанные с этими понятиями помогают осознать замкнутость числовых множеств относительно тех или иных операций. Эти понятия не являются лишними, сложными для восприятия, они основаны на свойствах чисел, которые известны и применяются школьниками: коммутативность, ассоциативность и др. Умение знать и различать алгебраические структуры поможет ясному пониманию взаимосвязей между различными понятиями и разделами курса математики, будет способствовать структурности знаний учащихся. Потенциал изучения алгебраических структур в старших классах школы в формировании мировоззрения учащихся, развитии умений делать логические выводы, обобщать, абстрагироваться от несущественного, отмечается, например, в исследовании [2].

Следует отметить, что учебник [9] использовался в основном в средних школах с углубленным изучением математики. Однако информация о действительных и комплексных числах в этом учебнике изложена наглядно и доступно и может быть использована и в обычных общеобразовательных школах для формирования у учащихся достоверного и четкого представления об иррациональных, действительных и комплексных числах.

В качестве другого примера можно назвать считавшийся в СССР одним из эталонных школьных учебников по алгебре для общеобразовательной школы на протяжении многих десятилетий учебник А.П. Киселева, переизданный в 2006 г. [7]. Это учебное пособие высоко ценится учителями математики и в наше время, несмотря на то, что содержание школьного курса алгебры изменилось достаточно давно и преподавание ведется по принципиально другим учебникам. Обучение школьников по данному учебнику предполагает значительно более подробное изучение иррациональных чисел (часть II) по сравнению с современными школьными учебниками, например, много внимания уделяется вычислению приближенных корней из числа. Подчеркивается, что множество иррациональных чисел не ограничивается числами, полученными извлечением корней из рациональных чисел, а содержит также числа, которые не могут быть получены с помощью арифметических действий над рациональными числами. Так же, как и в предыдущем учебнике [9], в содержание этого учебного издания входят комплексные числа и действия над ними, геометрическая интерпретация комплексных

чисел, тригонометрическая форма комплексного числа и действия над комплексными числами, выраженные в тригонометрической форме.

Отдельно следует сказать о комплексных числах, которые неоднократно исчезали из школьной программы, а затем вновь возвращались. В настоящее время комплексные числа включены в материал небольшого числа школьных учебников, например [4; 13; 15]. Однако в учебнике [15] тема «Комплексные числа» отмечена как материал для изучения математики на профильном уровне, учебник [13] предназначен для профильного уровня, а учебник [4] предназначен для школ и классов с углубленным изучением математики.

Отдельно отметим, как логично, наглядно и естественно вводится понятие комплексного числа в учебном издании [13] — в процессе обсуждения невозможности выполнения определенных действий на числовых множествах. Учащимся для рассмотрения предлагается таблица с известными числовыми множествами и алгебраическими операциями, допустимыми всегда и допустимыми частично. Множество комплексных чисел вводится как множество, на котором допустимы все алгебраические операции. Исходя из этого, выдвигаются минимальные условия, которым должны удовлетворять комплексные числа, вводится определение комплексного числа и действий над комплексными числами.

Следует отметить, что изучение комплексных чисел в курсе математики общеобразовательной школы не только способствовало бы углублению и систематизации представления о числах, но и являлось бы наглядной иллюстрацией исторического развития понятия числа, а также логично бы завершало изучение понятия числа в школьной программе. Кроме того, комплексные числа были бы полезны в школьной программе как раздел математики, в котором применяются многие знания и умения, полученные учащимися при изучении алгебры и тригонометрии.

Ниже приведены рекомендации по повышению эффективности изучения темы «Действительные числа», которые авторы данной статьи считают целесообразными:

- 1) расширить и углубить теоретический и практический материал об иррациональных и действительных числах в учебниках общеобразовательной школы. Это можно сделать, например, основываясь на материале изданий [9] и [7]. Полезный, наглядный и доступный (в том числе для самостоятельного изучения школьниками) материал об иррациональных числах также представлен в

- книге для учащихся [17, с. 104–113]. Интересны и полезны школьному учителю будут методические рекомендации, предложенные российским ученым и педагогом В.Ф. Чаплыгиным [20; 21];
- 2) ввести в материал курса «Алгебра и начала анализа» понятия алгебраических структур: группы, кольца и поля. Материал должен содержать примеры уже известных (ранее не определенных) алгебраических структур: группа целых чисел с операцией сложения, группа рациональных чисел с операцией сложения, группа рациональных чисел без нуля с операцией умножения, кольцо целых чисел, поле рациональных чисел, поле действительных чисел. Рекомендации по изучению теории групп в школе предложены, например, в публикации [6];
  - 3) включить тему «Комплексные числа» в материал курса «Алгебра и начала анализа». Тема «Комплексные числа» должна изучаться после окончания изучения действительных чисел (как завершение изучения понятия числа в школе) и тригонометрии (в материал темы входит тригонометрическая форма комплексного числа). Это

дополнение можно осуществить, используя, например, материал учебников [7; 9; 13]. Значительное количество различных практических заданий на усвоение и проверку полученных знаний и умений предложено на электронном ресурсе для педагогов [12].

#### IV. Заключение

Решением проблем, возникающих при изучении темы «Действительные числа» в школе, уже много десятилетий занимаются российские и зарубежные ученые и педагоги-практики. Формирование понятия «действительное число» вызывает затруднения у учащихся в силу существенных отличий от чисел, изучаемых ранее. В то же время этот материал является необходимой основой для дальнейшего успешного изучения математики. С целью систематизации, обобщения и углубления знаний школьников о действительных числах материал актуальных школьных учебников для общеобразовательной школы (в том числе и для базового уровня изучения математики) должен быть существенно переработан и расширен, а количество часов, отведенное на изучение действительных чисел, увеличено.

#### Литература

1. *Алимов Ш.А.* Алгебра и начала анализа. 10–11-е классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый уровень / Ш.А. Алимов [и др.]. — М.: Просвещение, 2012. — 384 с.
2. *Арсентьева И.В.* Интеграция науки и образования в процессе изучения алгебраических структур школьного курса математики [Текст] / И.В. Арсентьева // Интеграция образования. — 2007. — № 1.
3. *Башмаков М.И.* Алгебра и начала анализа. 10–11-е классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. учеб. заведений / М.И. Башмаков. — 3-е изд. — М.: Дрофа, 2001. — 400 с.
4. *Виленкин Н.Я.* Алгебра и математический анализ для 11-го класса [Текст]: учеб. пособие для учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. математики / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбург. — 6-е изд. — М.: Просвещение, 1998. — 288 с.
5. *Емелин А.В.* Самоподобные визуальные модели как эффективное средство изучения иррациональных чисел в школьном курсе алгебры [Текст] / А.В. Емелин // Современные проблемы науки и образования. — 2012. — № 3.
6. *Имайкин В.М.* Из опыта изучения элементов теории групп в непрофильных старших классах средней школы [Текст] / В.М. Имайкин // Математическое образование. — 2009. — Вып. 3. — С. 17–26.
7. *Киселев А.П.* Алгебра [Текст] / А.П. Киселев: В 2 ч.; под ред. и с доп. Н.А. Глаголева. — М.: Физматлит, 2005.
8. *Колмогоров А.Н.* Алгебра и начала анализа [Текст]: учеб. для 10–11-х кл. общеобразоват. учреждений / А.Н. Колмогоров [и др.]. — М.: Просвещение, 2008. — 384 с.
9. *Кочетков Е.С.* Алгебра и элементарные функции [Текст]: учеб. пособие для учащихся 10-го класса средней школы / Е.С. Кочетков, Е.С. Кочеткова: В 2 ч. — 3-е изд. — М.: Просвещение, 1968.
10. *Лихачева М.В.* О содержании математических дисциплин образовательных программ среднего и высшего образования [Текст] / М.В. Лихачева, А.С. Алексеев / Сб. трудов межд. конф. «Прикладные исследования и технологии ART-2016». — М.: Изд-во МТИ, 2016. — С. 171–172.
11. *Малова И.Е.* Теория и методика обучения математике в средней школе [Текст] / И.Е. Малова [и др.]. — М.: Владос, 2009. — 445 с.
12. Методика изучения комплексных чисел в общеобразовательной школе [Электронный ресурс]. — URL: <http://www.pedagogynow.ru/flowen-682.html%2023/> (дата обращения: 06.01.2017).
13. *Мордкович А.Г.* Алгебра и начала математического анализа. 10-й класс [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов; в 2 ч. Ч. 1. — М.: Мнемозина, 2009. — 424 с.
14. *Нараленкова И.И.* Природа чисел на уроках геометрии [Текст] / И.И. Нараленкова, Е.В. Шивринская // Наука и современность. — 2014. — № 29.
15. *Никольский С.М.* Алгебра и начала математического анализа. 11-й класс [Текст]: учебник / С.М. Никольский [и др.]. — М.: Просвещение, 2008–2009. — 464 с.
16. Официальный информационный портал единого государственного экзамена. [Электронный ресурс]. — URL: <http://www.ege.edu.ru/gu/> (дата обращения: 06.01.2017).
17. *Пичурин Л.Ф.* За страницами учебника алгебры [Текст]: Кн. для учащихся 7–9-х кл. сред. шк. / Л.Ф. Пичурин. — М.: Просвещение, 1990. — 224 с.
18. *Ульянова Т.В.* Методические акценты в преподавании темы «Действительные числа» на профильном уровне [Текст] / Т.В. Ульянова // Омский научный вестник. — 2011. — № 4.

19. Фихтенгольц Г.М. Иррациональные числа в средней школе [Текст] / Г.М. Фихтенгольц // Математическое просвещение. — М.: Гостехиздат, 1957. — Вып. 2. — С. 133–148.
  20. Чаплыгин В.Ф. Задачи в формировании понятия действительного числа [Текст] / В.Ф. Чаплыгин // Математика в школе. — 1997. — № 1. — С. 26–27
  21. Чаплыгин В.Ф. Основные понятия анализа в школьном курсе математики. Некоторые методические подходы [Текст] / В.Ф. Чаплыгин // Ярославский педагогический вестник. — 2003. — № 1.
  22. Fischbein E., Jehiam R., Cohen D. The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers // Educational Studies in Mathematics. July 1995, vol. 29, i.1, pp. 29–44. DOI: 10.1007/BF01273899. URL: www.dx.doi.org/BF01273899/
  23. Giannakoulis E., Sougioul A., Zachariades T. Students' thinking about fundamental real numbers properties. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.) // Proceedings of the 5<sup>th</sup> Conference of European Research in Mathematics Education (CERME5) Larnaca, Cyprus: ERME, 2007. Pp. 1955–1964.
  24. Zazkis R., Sirotic N. Making sense of irrational numbers: focusing on representation // Proceedings of the 28<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004, vol. 4, pp. 497–504.
- References**
1. Alimov Sh.A. *Algebra i nachala analiza. 10–11 klassy: ucheb. dlya obshcheobrazovatel'nykh uchrezhdeniy: bazovyy uroven'* [The algebra and analysis. 10–11: Proc. for general education. Institutions: baseline]. Moscow, Prosveshchenie Publ., 2012. 384 p.
  2. Arsent'eva I.V. Integratsiya nauki i obrazovaniya v protsesse izucheniya algebraicheskikh struktur shkol'nogo kursa matematiki [Integration of science and education in the study of algebraic structures school mathematics]. *Integratsiya obrazovaniya* [Integration of education]. 2007, I. 1.
  3. Bashmakov M.I. *Algebra i nachala analiza. 10–11 klassy: ucheb. dlya obshcheobrazovatel'nykh uchreb. Zavedeniy* [Algebra and analysis. 10–11: Proc. for general education. Proc. institutions]. Moscow, Drofa Publ., 2001. 400 p.
  4. Vilenkin N.Ya., Ivashchev-Musatov O.S., Shvartsburd S.I. *Algebra i matematicheskiy analiz dlya 11-go klassa* [Algebra and mathematical analysis for 11 Class]. Moscow, Prosveshchenie Publ., 1998. 288 p.
  5. Emelin A.V. Samopodobnye vizual'nye modeli kak effektivnoe sredstvo izucheniya irratsional'nykh chisel v shkol'nom kurse algebr [Self-similar visual model as an effective means of studying the irrational numbers in a school course of algebra]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya* [Modern problems of science and education]. 2012, I. 3.
  6. Imaykin V.M. Iz opyta izucheniya elementov teorii grupp v neprofil'nykh starshikh klassakh sredney shkoly [From the experience of studying the elements of group theory in non-high school]. *Matematicheskoe obrazovanie* [Mathematical Education]. 2009, I. 3, pp. 17–26.
  7. Kiselev A.P. *Algebra* [Algebra]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2005.
  8. Kolmogorov A.N. *Algebra i nachala analiza: ucheb. dlya 10–11 kl. obshcheobrazovatel'nykh uchrezhdeniy* [The algebra and analysis: Textbook. For 10–11. general education. institutions]. Moscow, Prosveshchenie Publ., 2008. 384 p.
  9. Kochetkov E.S., Kochetkova E.S. *Algebra i elementarnye funktsii: ucheb. posobie dlya uchashchikhsya 10-go klassa sredney shkoly* [Algebra and elementary functions: Proc. A manual for students of 10 secondary school]. Moscow, Prosveshchenie Publ., 1968.
  10. Likhacheva M.V., Alekseenko A.S. O soderzhanii matematicheskikh distsiplin obrazovatel'nykh programm srednego i vysshego obrazovaniya [About the contents of mathematical disciplines of educational programs of secondary and higher education]. *Sbornik trudov mezhdunarodnoy konferencii «Prikladnye issledovaniya i tekhnologii ART-2016»* [Proceedings of the international conference "Applied research and ART2016 technology"]. MTI Publ., pp. 171–172.
  11. Malova I.E. *Teoriya i metodika obucheniya matematike v sredney shkole* [Theory and methods of teaching mathematics in high school]. Moscow, VLADOS Publ., 2009. 445 p.
  12. *Metodika izucheniya kompleksnykh chisel v obshcheobrazovatel'noy shkole* [Methods of study of complex numbers in secondary school]. PEDAGOGYFLOW.RU [PEDAGOGYFLOW.RU]. Available at: <http://www.pedagogyflow.ru/flowen-682.html%2023/> (accessed 06 January 2017).
  13. Mordkovich A.G., Semenov P.V. *Algebra i nachala matematicheskogo analiza* [Algebra and beginning of mathematical analysis]. Moscow, Mnemozina Publ., 2009. 424 p.
  14. Naralenkova I.I., Shivrinskaya E.V. Priroda chisel na urokakh geometrii [The nature of the numbers on the geometry lessons]. *Nauka i sovremennost'* [Science and modernity]. 2014, I. 29.
  15. *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 11 klass* [Algebra beginning of mathematical analysis. Grade 11]. Moscow, Prosveshchenie Publ., 2008–2009. 464 p.
  16. *Ofitsial'nyy informatsionnyy portal Edinogo gosudarstvennogo ekzamina* [Official information portal of the Unified State Examination]. Available at: <http://www.ege.edu.ru/ru/> (accessed 06 January 2017).
  17. Pichurin L.F. *Za stranitsami uchebnika algebr* [For algebra textbook pages]. Moscow, Prosveshchenie Publ., 1990. 224 p.
  18. Ul'yanova T.V. Metodicheskie aktsenty v prepodavanii temy «Deystvitel'nye chisla» na profil'nom urovne [Methodical emphasis in teaching the topic "Real numbers" at profile level]. *Omskiy nauchnyy vestnik* [Omsk Scientific Bulletin]. 2011, I. 4.
  19. Fikhtengol'ts G.M. Irratsional'nye chisla v sredney shkole [Irrational numbers in high school]. *Matematicheskoe prosveshchenie* [Mathematical education]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1957, I. 2, pp. 133–148.
  20. Chaplygin V.F. Zadachi v formirovaniy ponyatiya deystvitel'nogo chisla [Problems in the formation of the concept of a real number]. *Matematika v shkole* [Mathematics at school]. 1997, I. 1, pp. 26–27.
  21. Chaplygin V.F. Osnovnye ponyatiya analiza v shkol'nom kurse matematiki. Nekotorye metodicheskie podkhody [Basic concepts of analysis in a school course of mathematics. Some methodological approaches]. *Yaroslavskiy pedagogicheskiy vestnik* [Yaroslavl Pedagogical Gazette]. 2003, I. 1.
  22. Fischbein E., Jehiam R., Cohen D. The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers // Educational Studies in Mathematics. July 1995, vol. 29, i.1, pp. 29–44. Available at: [www.dx.doi.org/BF01273899](http://www.dx.doi.org/BF01273899).
  23. Giannakoulis E., Sougioul A., Zachariades T. Students' thinking about fundamental real numbers properties. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.) // Proceedings of the 5<sup>th</sup> Conference of European Research in Mathematics Education (CERME5) Larnaca, Cyprus: ERME, 2007. pp. 1955–1964.
  24. Zazkis R., Sirotic N. Making sense of irrational numbers: focusing on representation // Proceedings of the 28<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2004, vol. 4, pp. 497–504.