

Расширенное исследование фрактала «горящий корабль»

Extended study of algebraic fractals burning ship

Бойков А.А.

старший преподаватель кафедры инженерной графики РТУ МИРЭА

e-mail: albophx@mail.ru

Boikov A.A.

senior lecturer of department of engineering graphics of MIREA – Russian Technological University

e-mail: albophx@mail.ru

Толстых И. С.

студент РТУ МИРЭА

Аннотация

В статье представлены результаты студенческой научной работы, которые могут представлять интерес для исследователей в области алгебраических фракталов, а также разработчиков программ для графического и предметного дизайна. С позиции многомерной геометрии исследована разновидность степенного фрактала Жюлиа-Мандельброта, известная как фрактал «горящий корабль».

Ключевые слова: алгебраические фракталы, множество Мандельброта, множество Жюлиа, фрактал «горящий корабль».

Abstract

The article presents the results of a student research work that may be of interest to researchers in the field of algebraic fractals, along with developers of software for graphic and industrial design. Power fractals of Julia-Mandelbrot of various orders are studied from the perspective of multidimensional geometry.

Keywords: algebraic fractals, Mandelbrot set, Julia set, burning ship fractal.

Введение

В работе [1] предлагается методика исследования степенных фракталов типа множество Мандельброта путем рассмотрения показателя степени в качестве свободной координаты, что делает двухмерный фрактал 3- (показатель степени – действительное число) или 4-мерным (показатель степени – комплексное число). В работах [2, 3, 4] предлагается методика исследования фракталов типа множество Мандельброта (ФМ) вместе с фракталами типа множество Жюлиа (ФЖ) в рамках общего многомерного подхода, где ФМ и ФЖ получаются рассечением многомерного фрактального объекта (гиперфрактала) сечениями некоторых параллельных плоскостей.

В настоящем исследовании указанные методики применяются совместно к частному виду фракталов, получивших название «горящий корабль». Эту разновидность фракталов можно рассматривать как частную модификацию базовой формулы степенного фрактала Мандельброта. Ниже представлены полученные серии изображений.

1. Фрактал «горящий корабль»

Итерационная формула – $F(z) = |z|^{1.2} + c$.

Здесь и далее выражение $|z|$ означает комплексное число, составленное из модулей действительной и мнимой части исходного – $|z| = (|Re Z| + i \cdot |Im Z|)$.

Для ФМ (рис. 1) значение Z_0 менялось в диапазоне от $-1,5 - 1,5i$ до $1,5 + 1,5i$ с шагом 0,3. Значение C принадлежало области $[-2 - 2i; 2 + 2i]$.

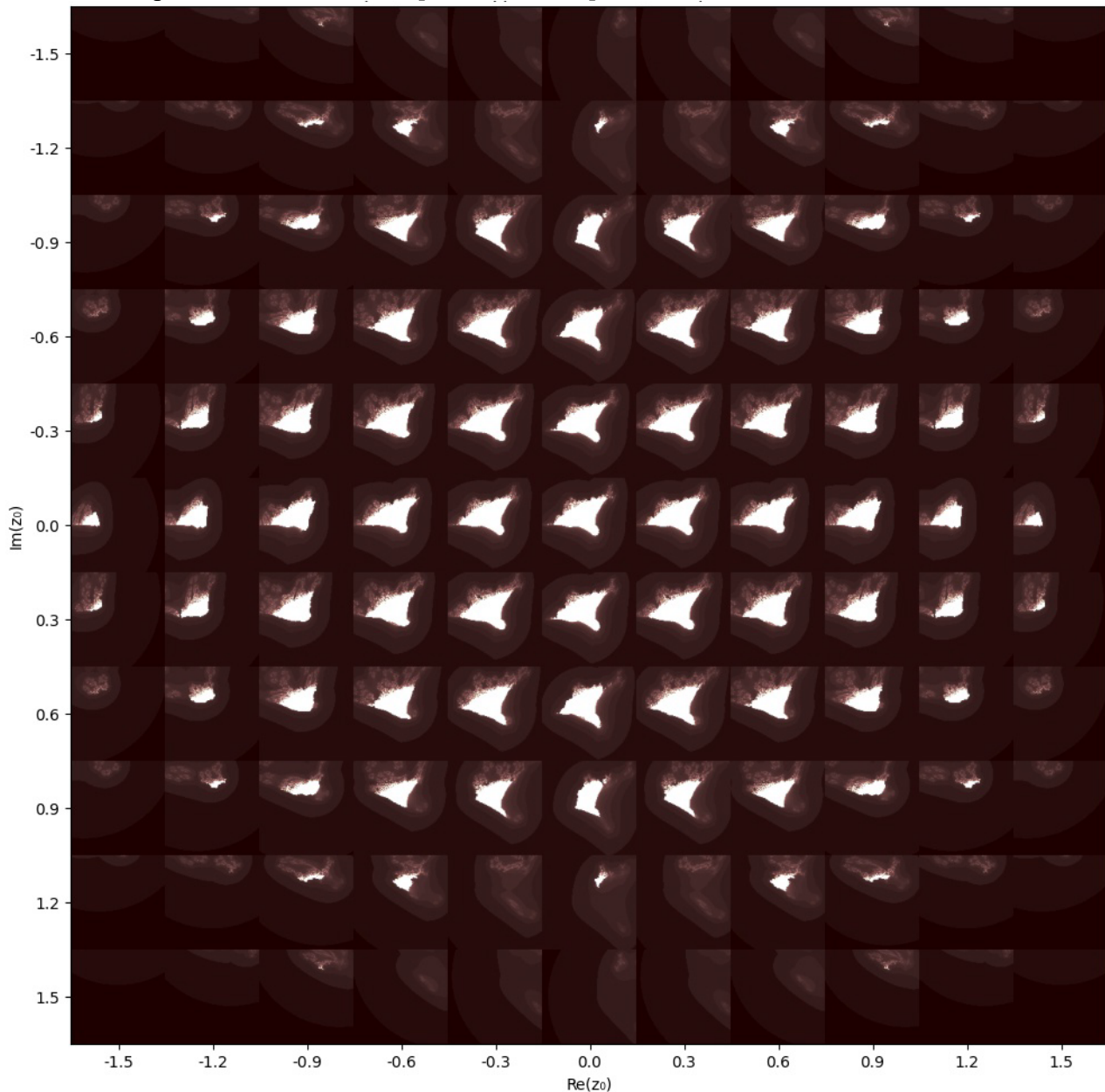


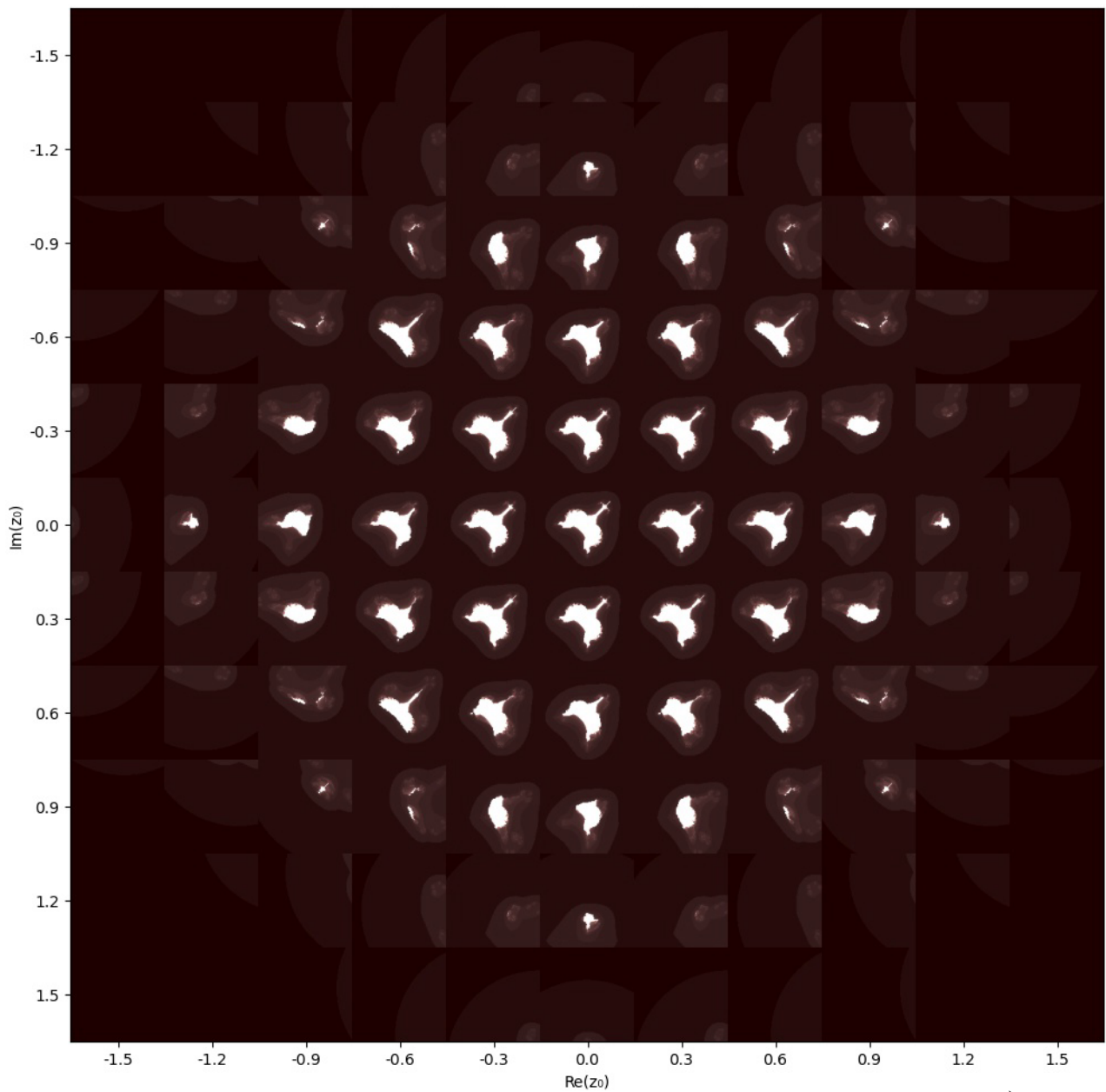
Рис. 1. Фракталы «горящий корабль» второй степени для разных значений Z_0

Построенные изображения, в целом, соответствуют результатам, полученным в предыдущих работах [4], что подтверждает корректность созданной программной системы и позволяет перейти к построению фрактальных изображений фракталов других степеней, изученных в меньшей степени.

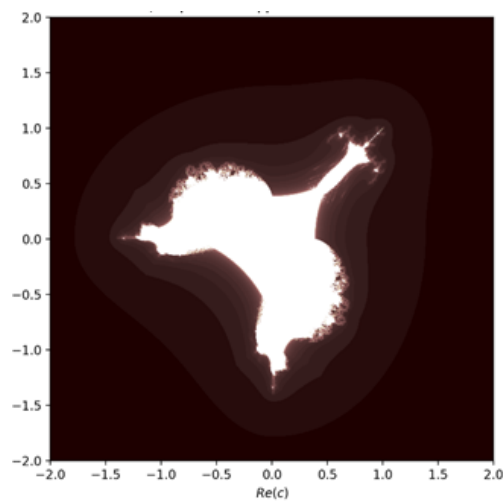
2. Фрактал «горящий корабль» 3-й степени

Итерационная формула – $F(z) = |z|^3 + c$.

Для ФМ (рис. 2.1,а) значение Z_0 менялось в диапазоне от $-1,5 - 1,5i$ до $1,5 + 1,5i$ с шагом 0,3. Значение C принадлежало области $[-2 - 2i; 2 + 2i]$. На рис. 2.1,б показано изображение базового ФМ третьей степени ($Z_0=0+0i$). Его можно назвать «звездным кораблем».



а)



б)

Рис. 2.1. Фракталы «горящий корабль» третьей степени для разных значений Z_0
 Для ФЖ (рис. 2.2) значение C также менялось в диапазоне от $-1,5 - 1,5i$ до $1,5 + 1,5i$ с шагом $0,3$. Значение Z принадлежало области $[-2 - 2i; 2 + 2i]$.

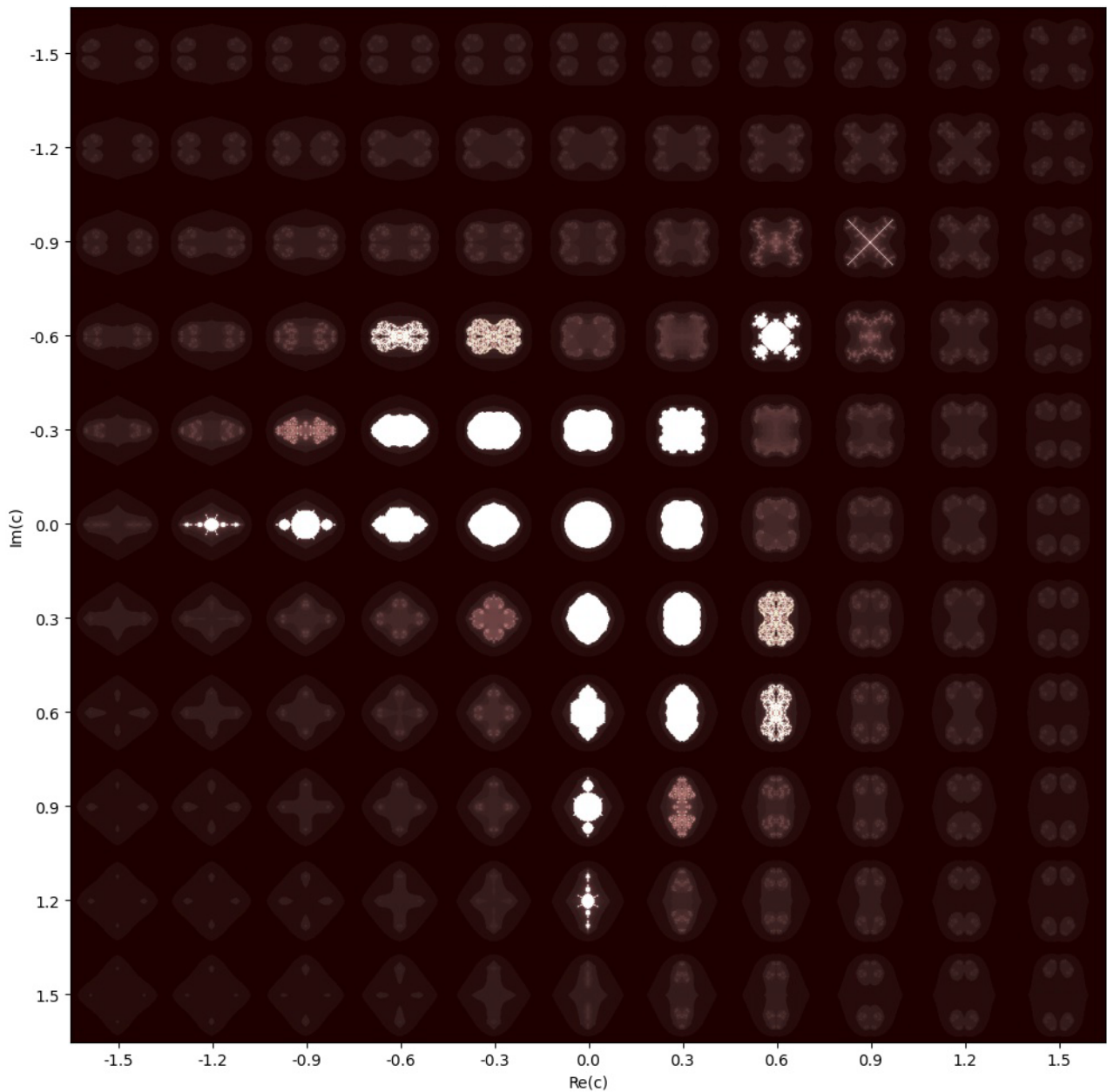


Рис. 2.2. Фракталы Жюлиа «горящий корабль» третьей степени для разных значений C_0

3. Фрактал «горящий корабль» 4-й степени

Итерационная формула – $F(z) = |z|^4 + c$.

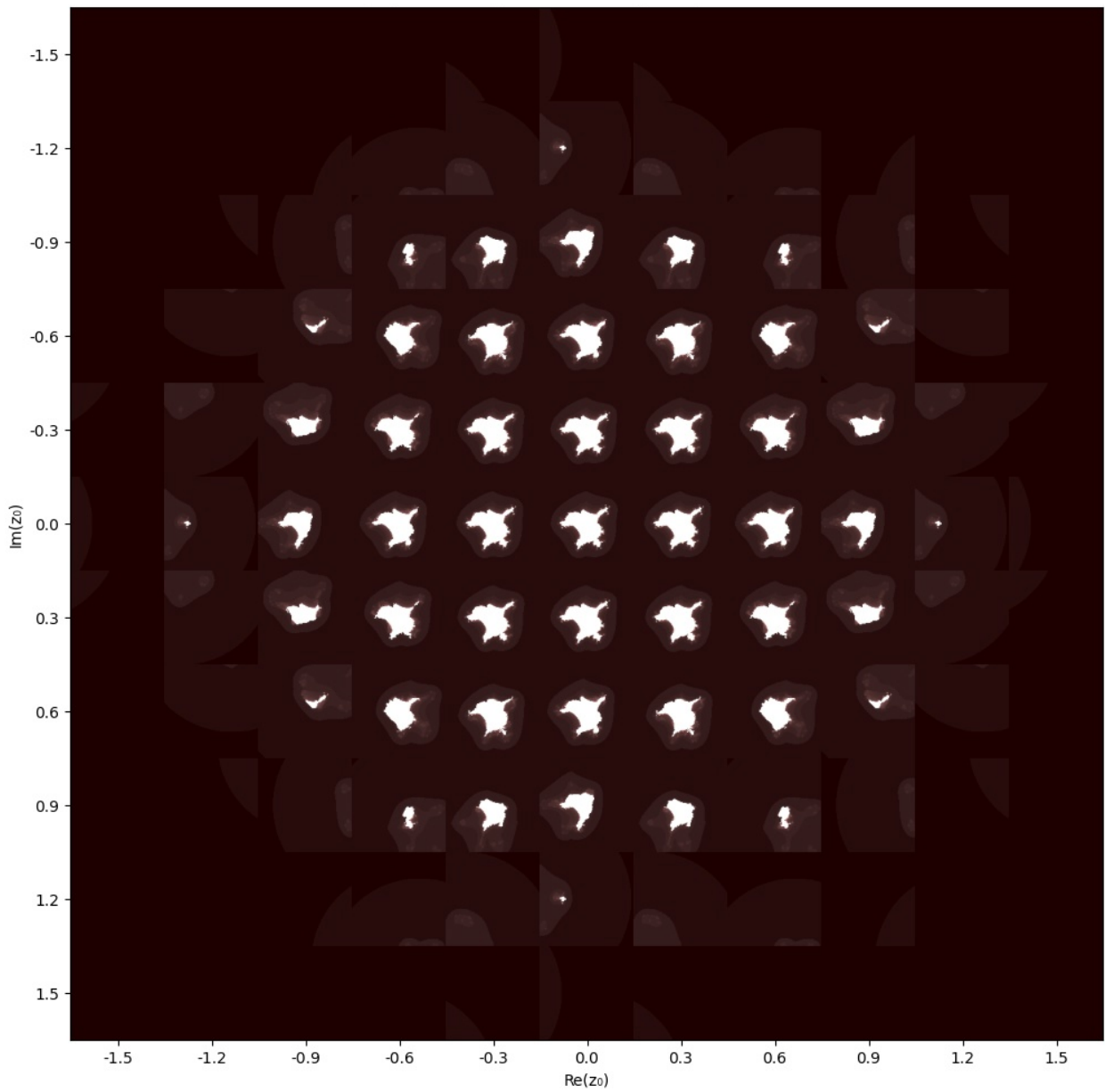
Для ФМ (рис. 3.1,а) значение Z_0 менялось в диапазоне от $-1,5 - 1,5i$ до $1,5 + 1,5i$ с шагом 0,3. Значение C принадлежало области $[-2 - 2i; 2 + 2i]$. На рис. 3.1,б показано изображение базового ФМ четвертой степени ($Z_0=0+0i$).

Для ФЖ (рис. 3.2) значение C также менялось в диапазоне от $-1,5 - 1,5i$ до $1,5 + 1,5i$ с шагом 0,3. Значение Z принадлежало области $[-2 - 2i; 2 + 2i]$.

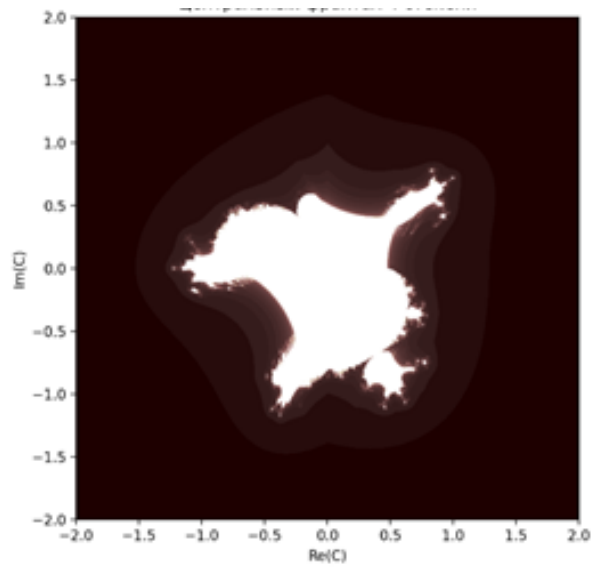
4. Фрактал «горящий корабль» 5-й степени

Итерационная формула – $F(z) = |z|^5 + c$.

Для ФМ (рис. 4.1,а) значение Z_0 менялось в диапазоне от $-1,5 - 1,5i$ до $1,5 + 1,5i$ с шагом 0,3. Значение C принадлежало области $[-2 - 2i; 2 + 2i]$. На рис. 4.1,б показано изображение базового ФМ пятой степени ($Z_0=0+0i$).



a)



б)

Рис. 3.1. Фракталы «горящий корабль» четвертой степени для разных значений Z_0

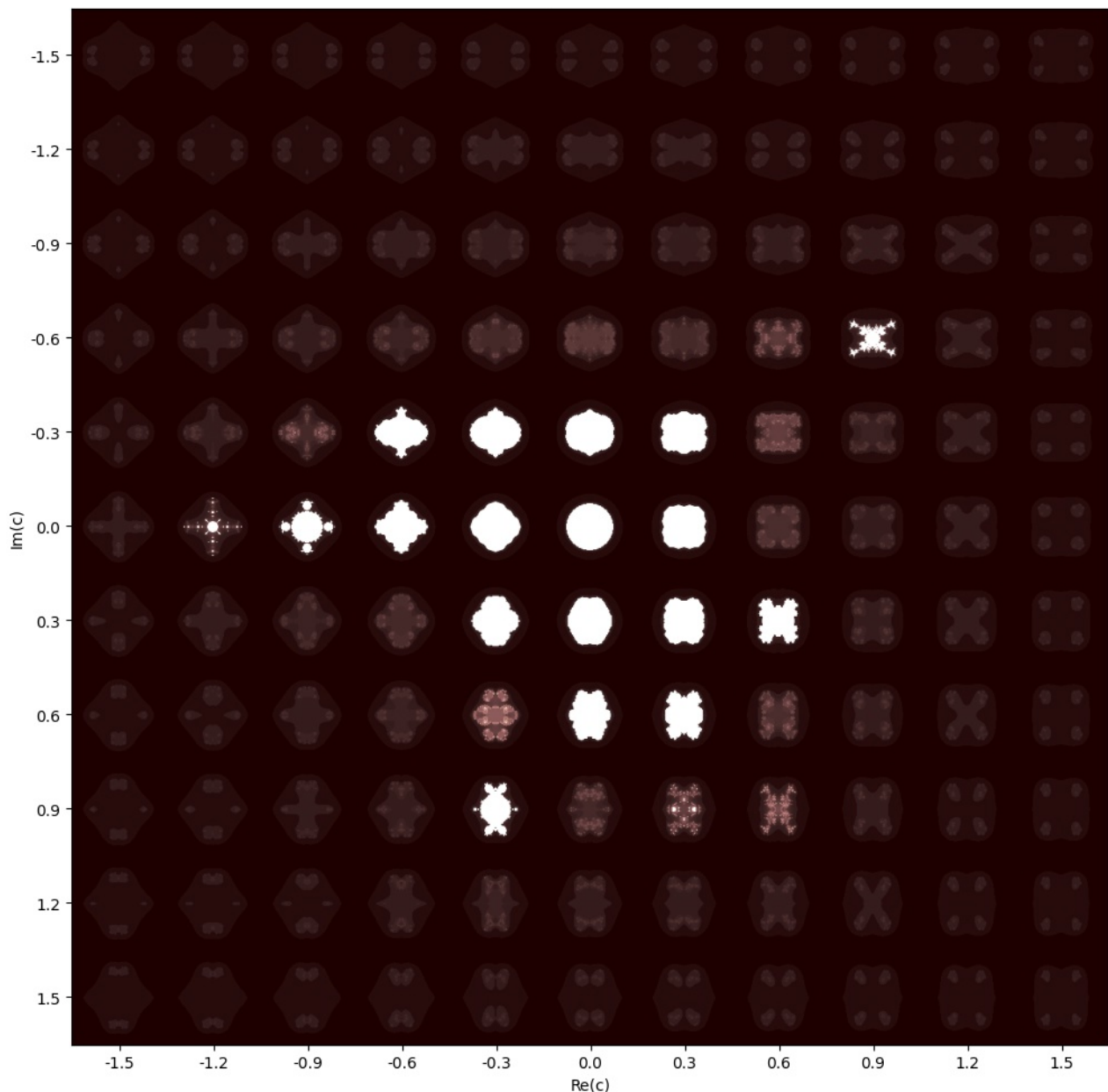


Рис. 3.2. Фракталы Жюлиа «горящий корабль» четвертой степени для разных значений C_0

Центральный фрактал 5 степени можно назвать «шкурой медведя» (рис. 4.1,б).

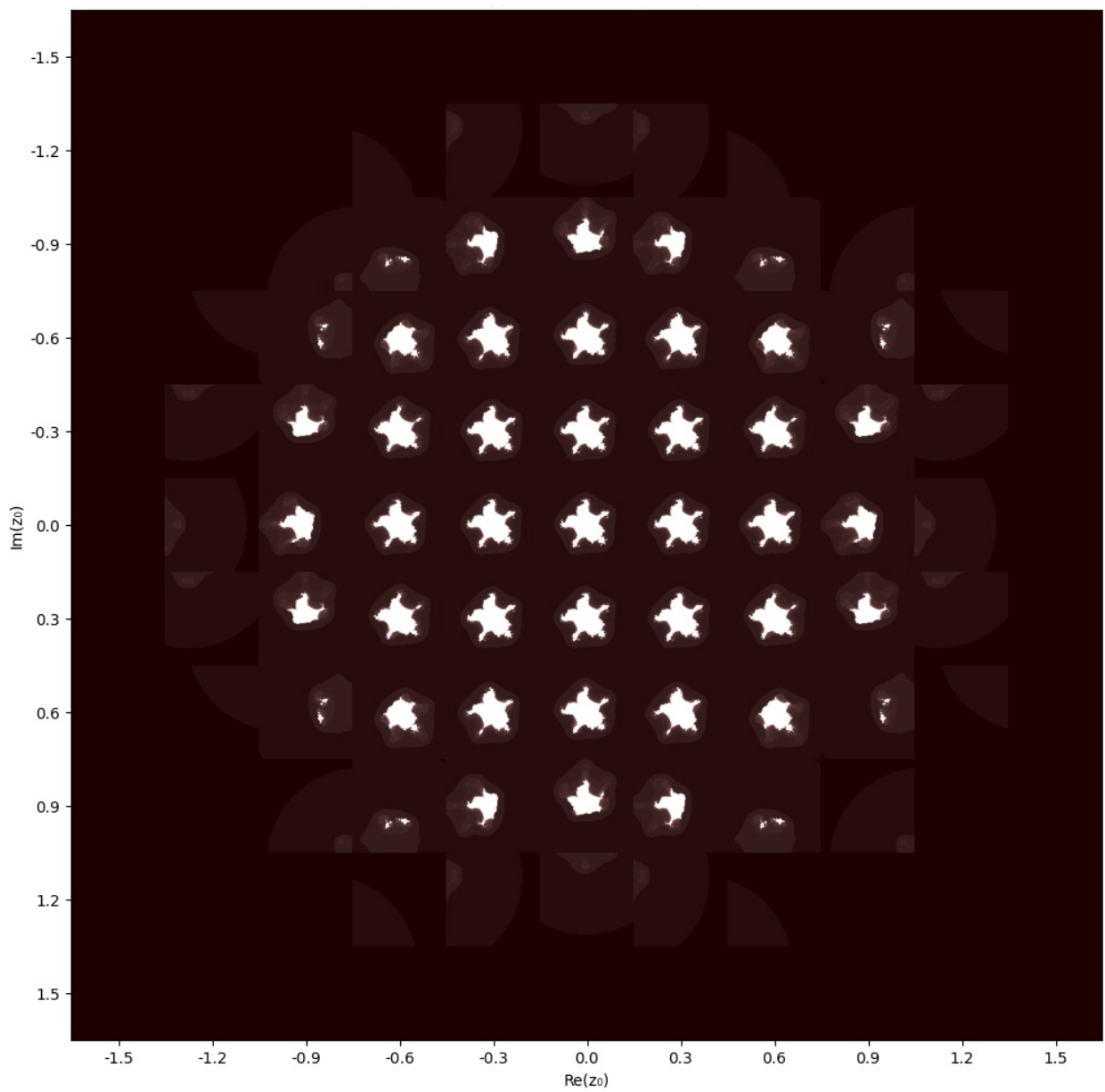
Для ФЖ (рис. 4.2) значение C также менялось в диапазоне от $-1,5 - 1,5i$ до $1,5 + 1,5i$ с шагом 0,3. Значение Z принадлежало области $[-2 - 2i; 2 + 2i]$.

5. Фрактал «горящий корабль» 6-й степени

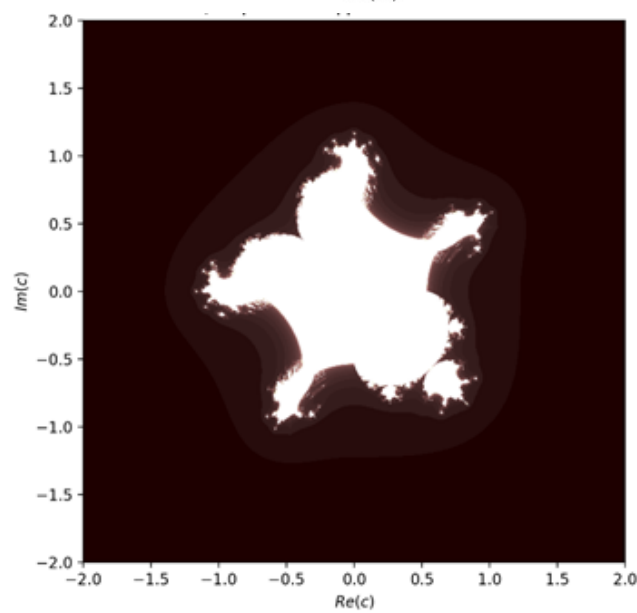
Итерационная формула – $F(z) = |z|^6 + c$.

Для ФМ (рис. 5.1,а) значение Z_0 менялось в диапазоне от $-1,5 - 1,5i$ до $1,5 + 1,5i$ с шагом 0,3. Значение C принадлежало области $[-2 - 2i; 2 + 2i]$. На рис. 4.1,б показано изображение базового ФМ пятой степени ($Z_0=0+0i$).

Для ФЖ (рис. 4.2) значение C также менялось в диапазоне от $-1,5 - 1,5i$ до $1,5 + 1,5i$ с шагом 0,3. Значение Z принадлежало области $[-2 - 2i; 2 + 2i]$.



а)



б)

Рис. 4.1. Фракталы «горящий корабль» пятой степени для разных значений Z_0

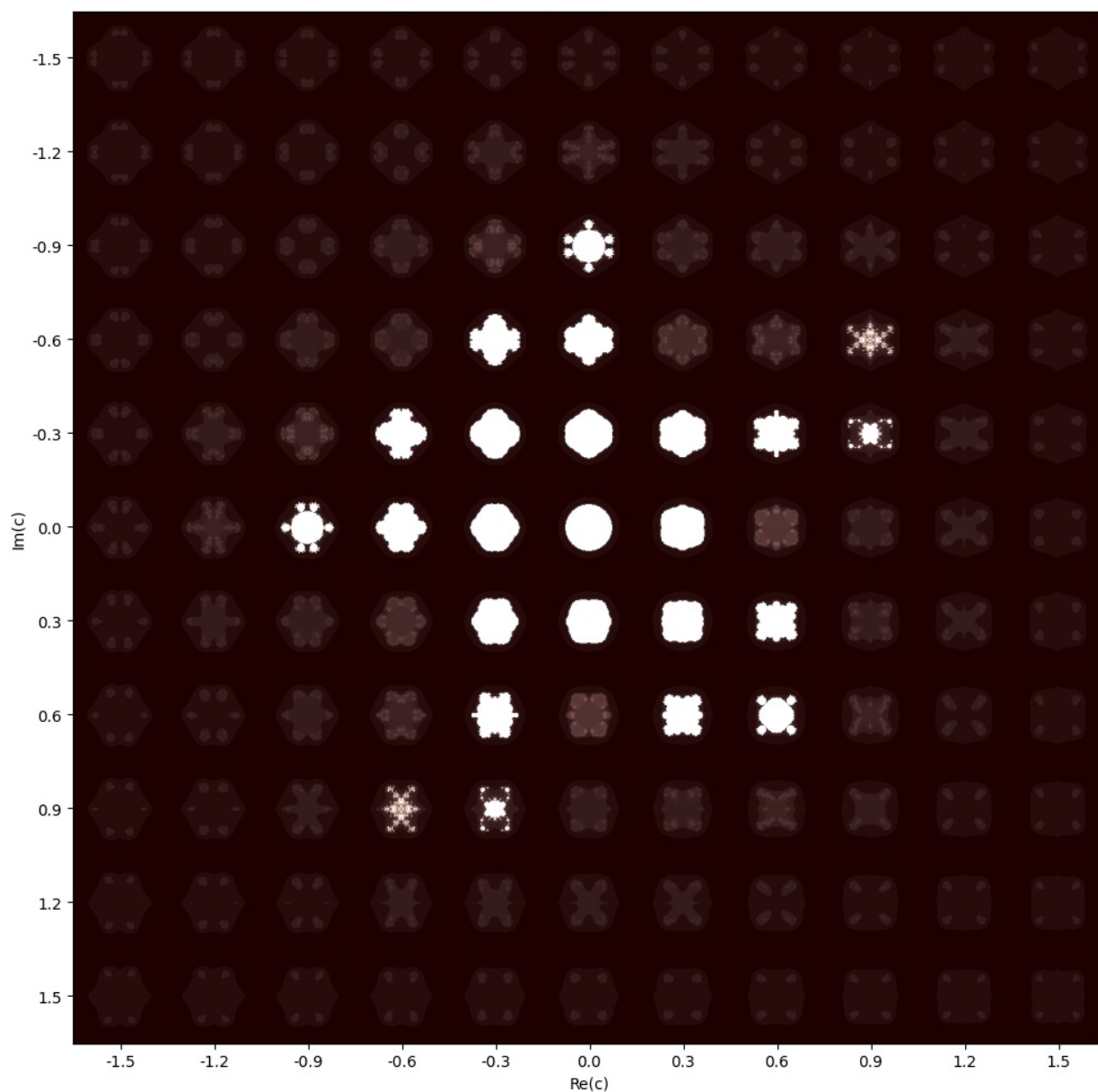


Рис. 4.2. Фракталы Жюлиа «горящий корабль» пятой степени для разных значений C_0

6. Фракталы «горящий корабль» дробных степеней

Рассмотрев ряд фракталов с целыми значениями степени в итерационной формуле, мы можем перейти к формуле общего вида – $F(z) = |z|^m + c$.

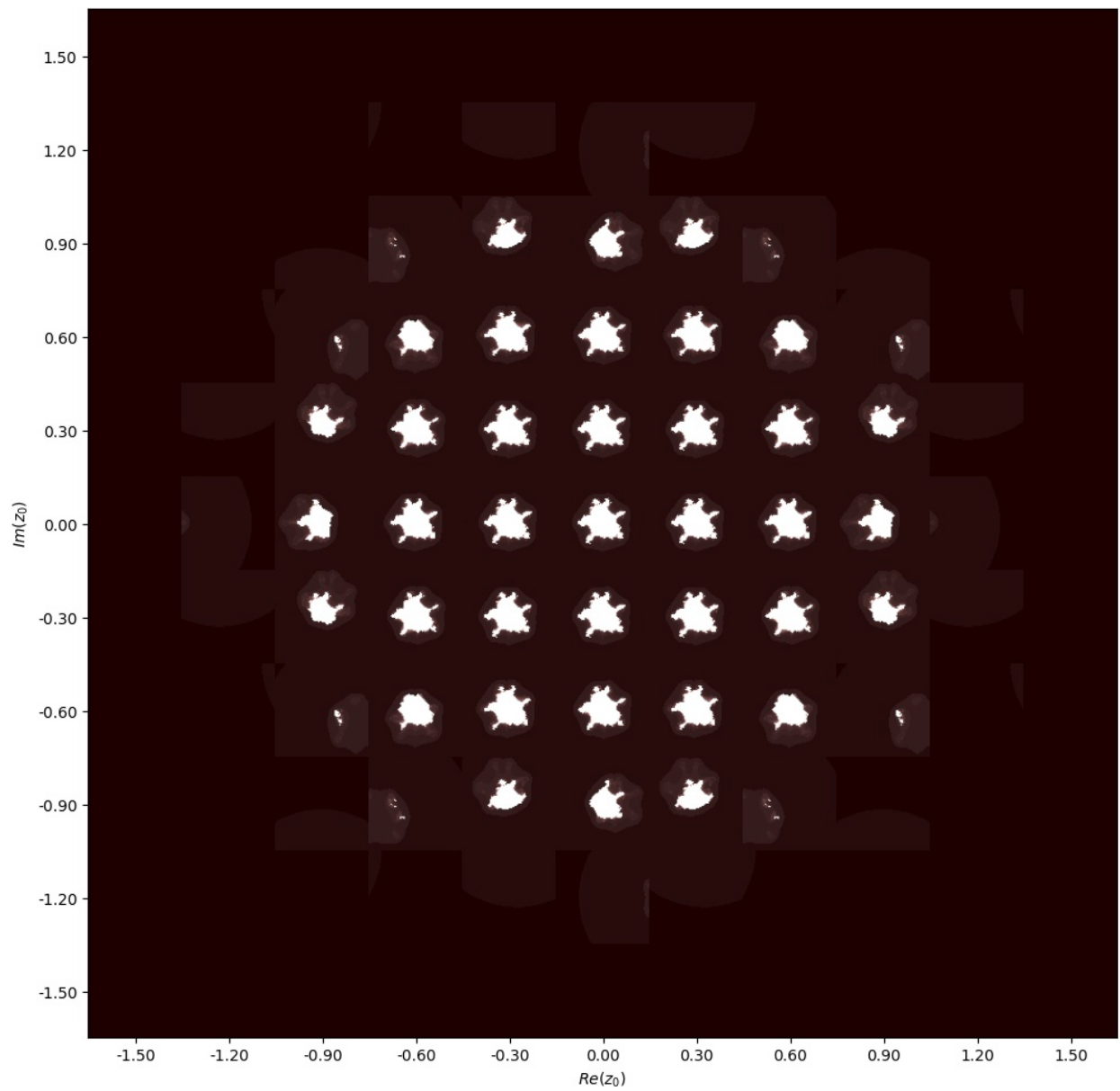
Эта формула задает 5-мерный гиперфрактал, если m – вещественное, – и 6-мерный гиперфрактал, если m – комплексное. Рассмотрим несколько примеров для m вещественного и не целого.

На рис. 6.1 показаны миниатюры ФМ, на рис. 6.2 – миниатюры ФЖ степени 1.5.

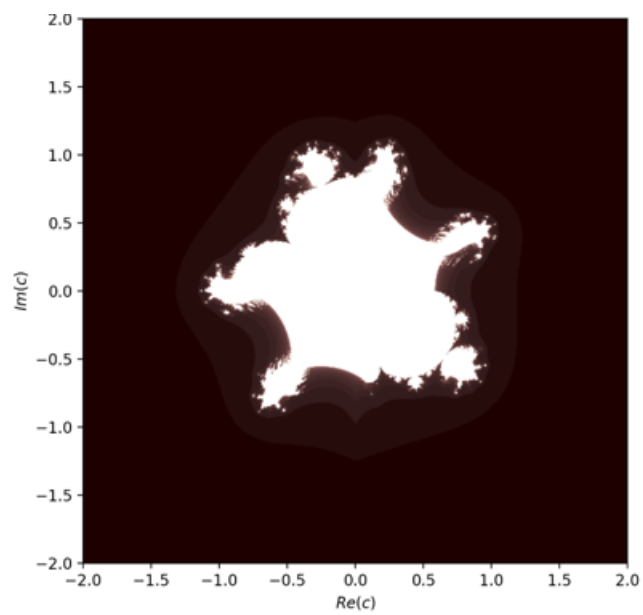
На рис. 6.3 показаны миниатюры ФМ, на рис. 6.4 – миниатюры ФЖ степени 2.5.

На рис. 6.5 показаны миниатюры ФМ, на рис. 6.6 – миниатюры ФЖ степени 2.75.

На рис. 6.7 показаны миниатюры ФМ, на рис. 6.8 – миниатюры ФЖ степени 3.5.



а)



б)

Рис. 5.1. Фракталы «горящий корабль» шестой степени для разных значений Z_0

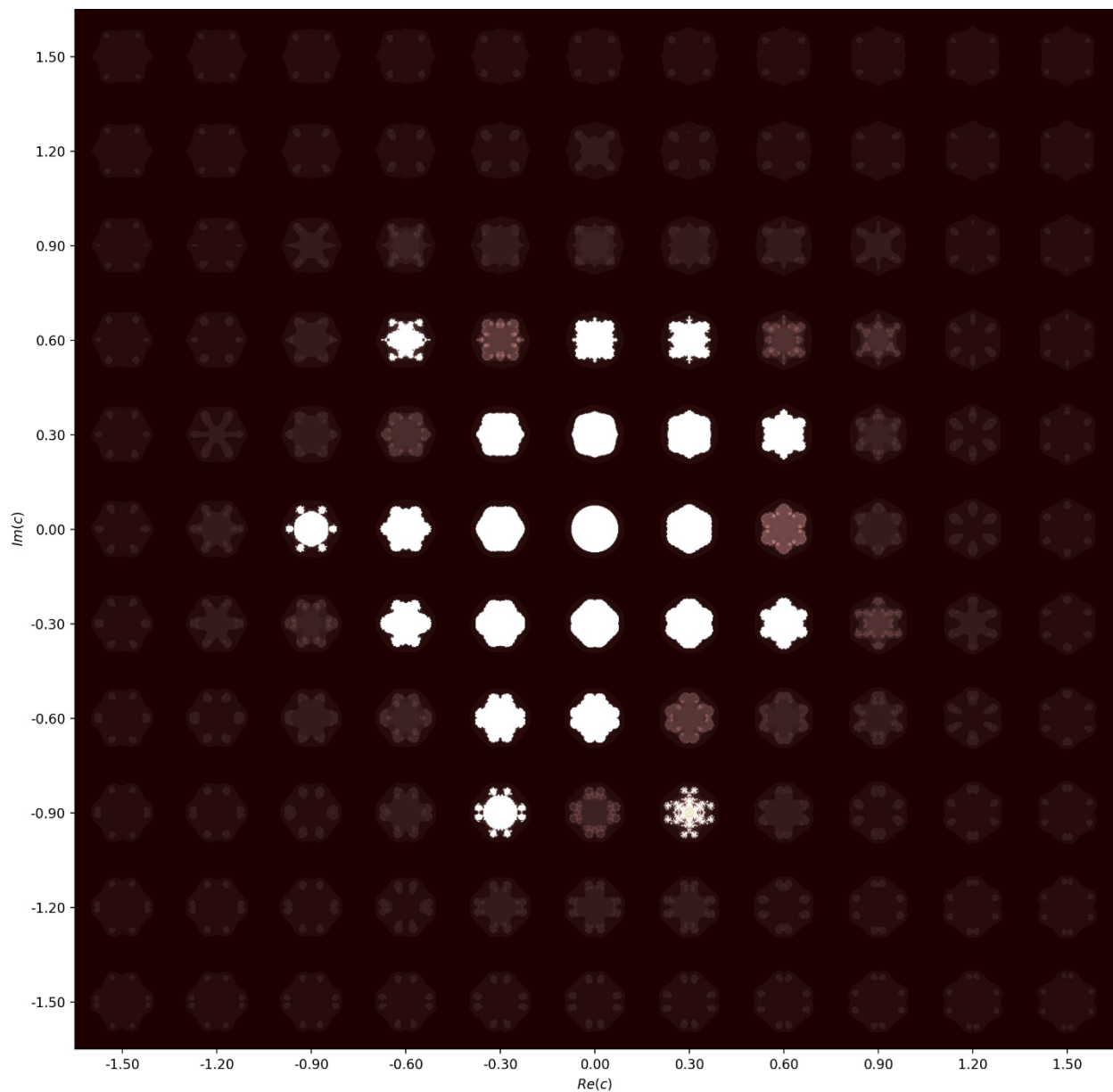


Рис. 5.2. Фракталы Жюлиа «горящий корабль» шестой степени для разных значений C_0

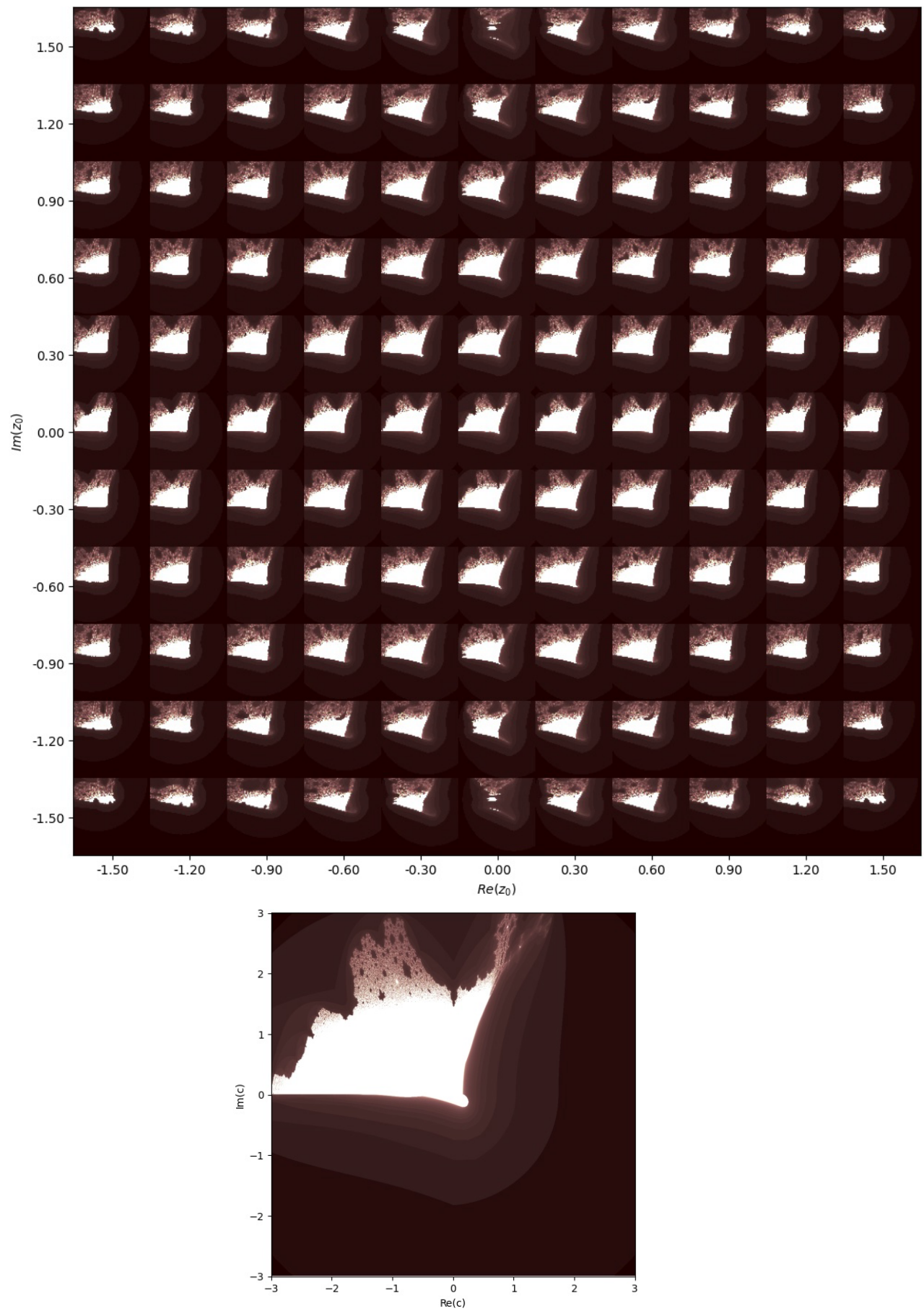


Рис. 6.1. Фракталы Мандельброта степени 1.5 для разных значений Z_0

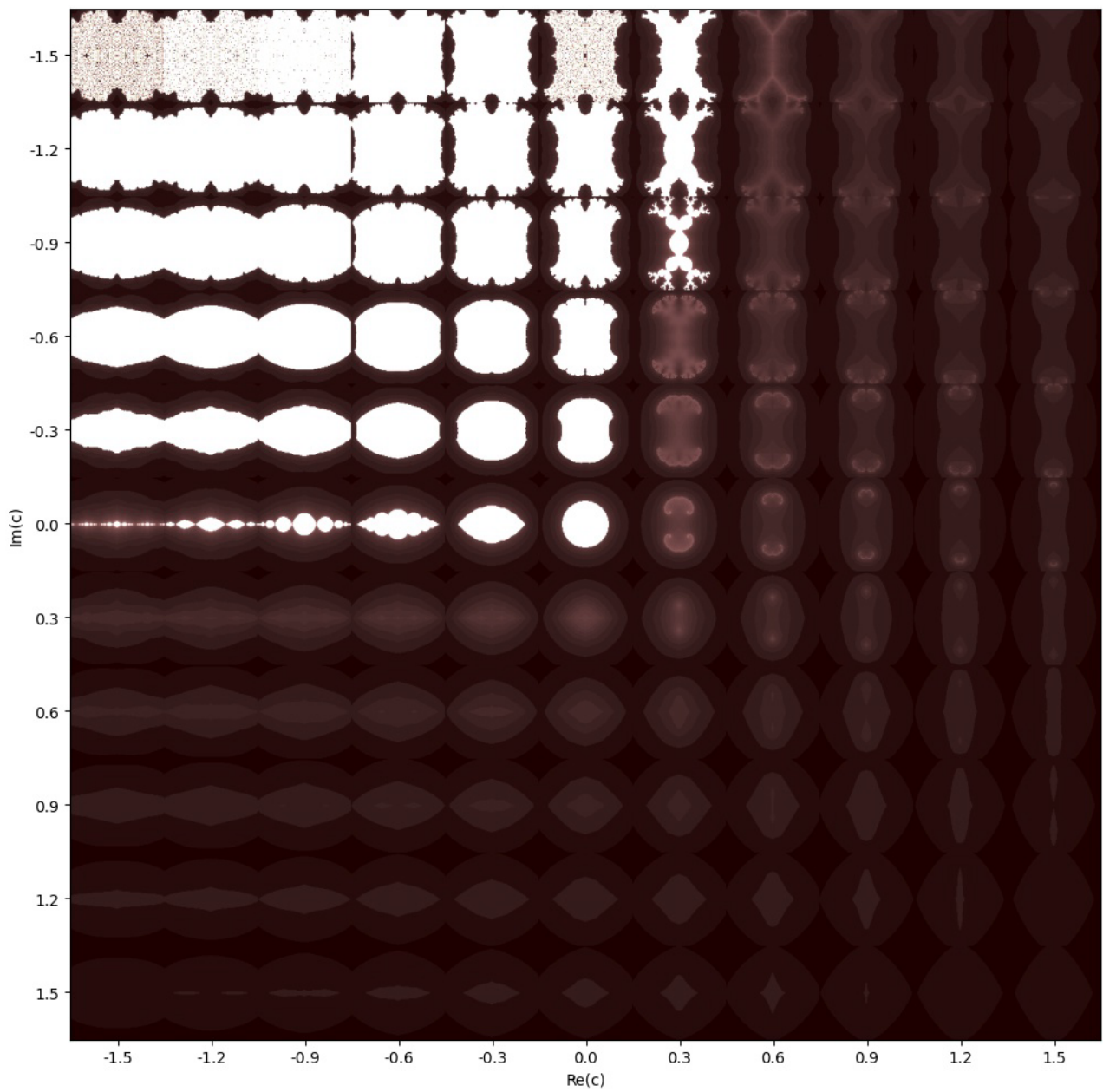


Рис. 6.2. Фракталы Жюлиа «горящий корабль» степени 1.5 для разных значений C_0

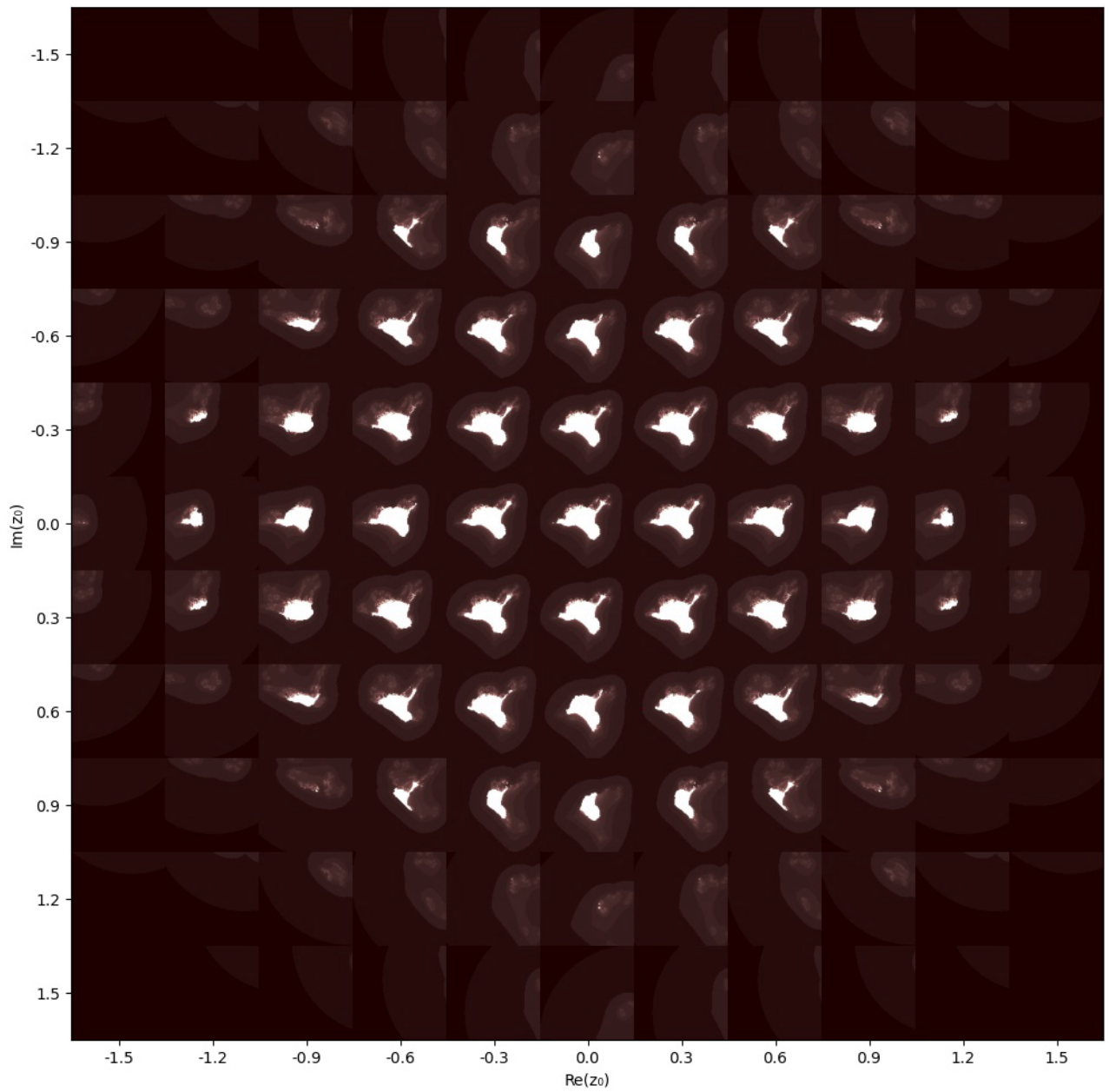


Рис. 6.3. Фракталы Мандельброта «горящий корабль» степени 2.5 для разных значений Z_0

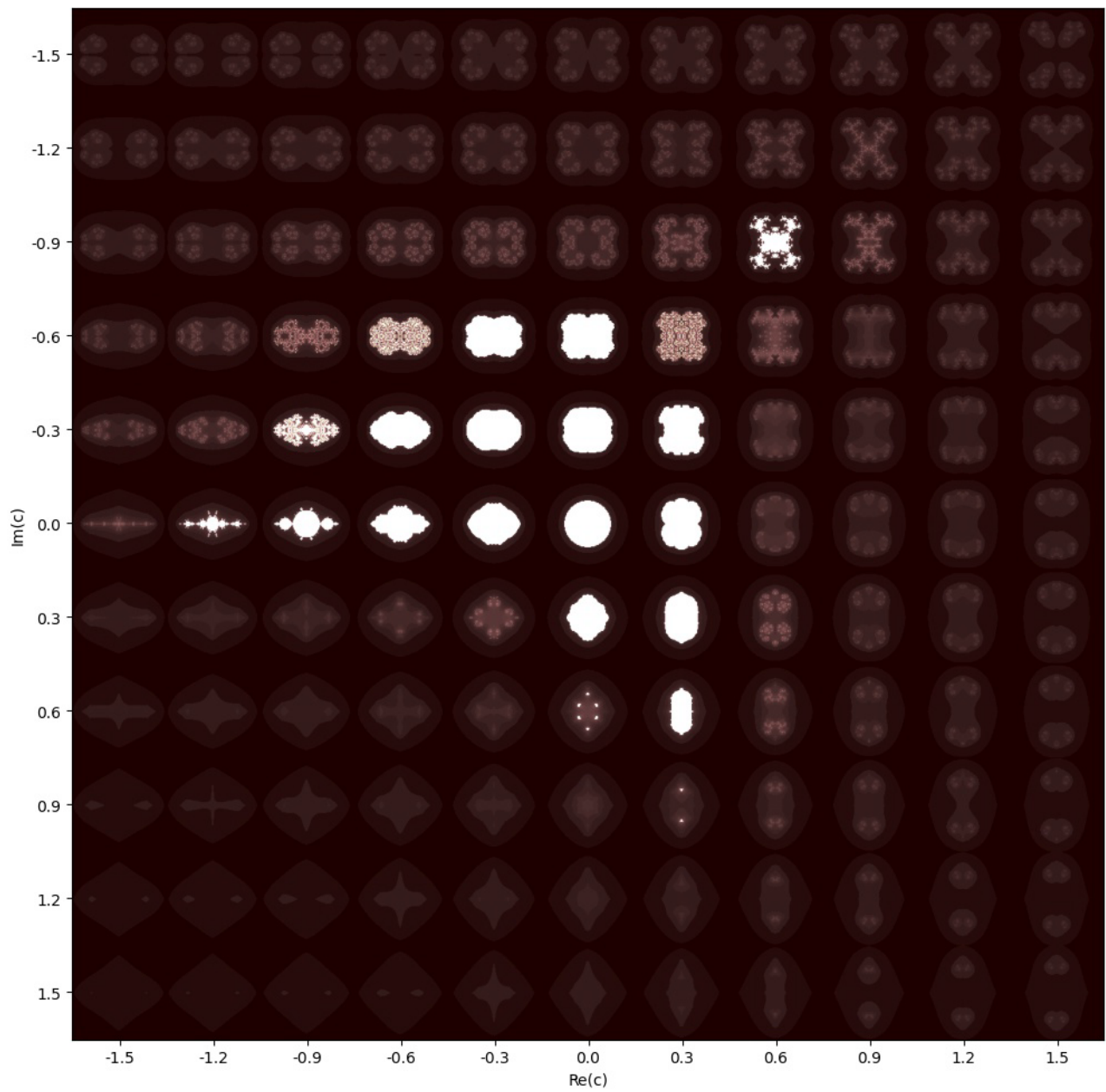


Рис. 6.4. Фракталы Жюлиа «горящий корабль» степени 2.5 для разных значений C_0

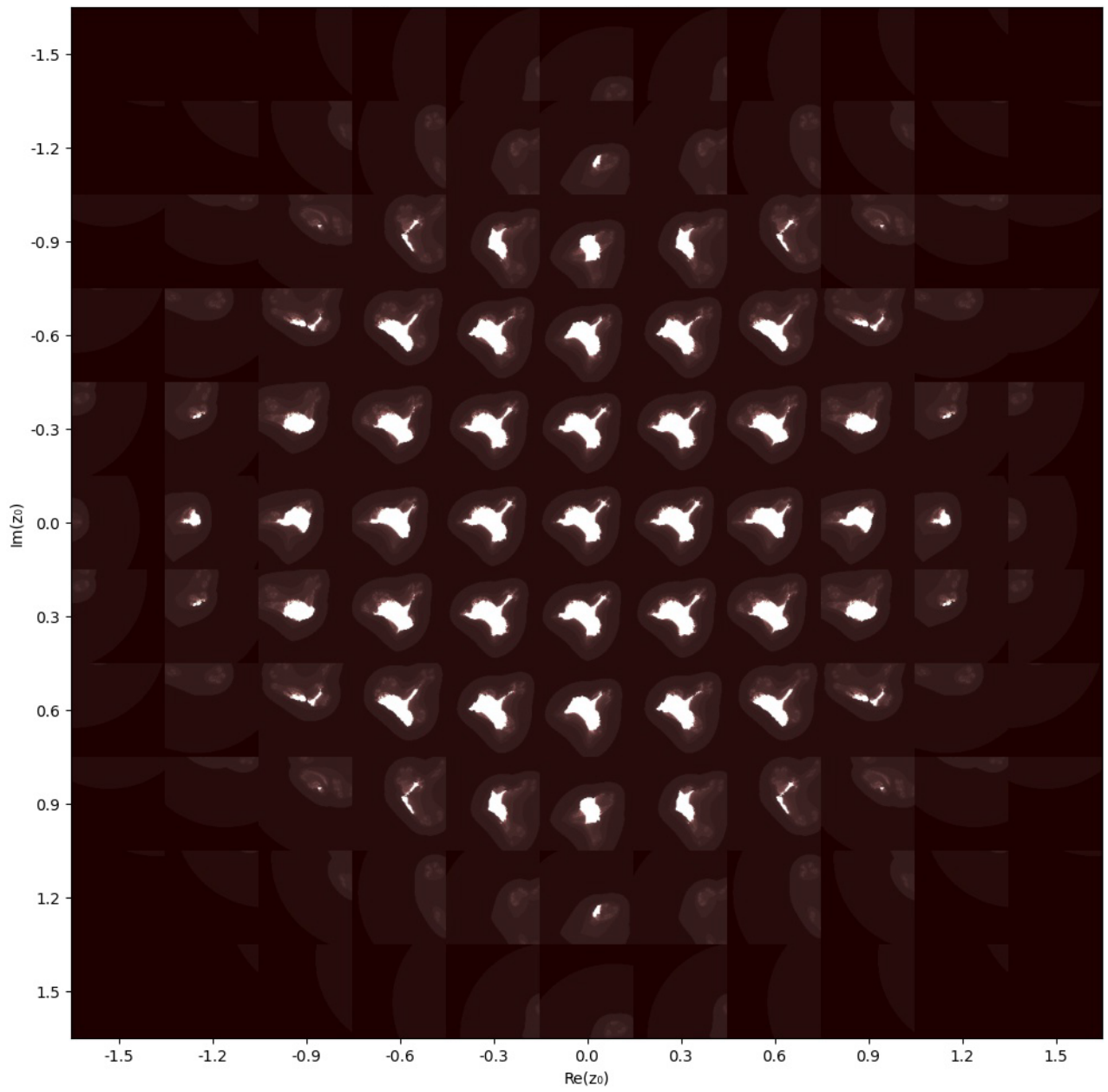


Рис. 6.5. Фракталы Мандельброта «горящий корабль» степени 2.75 для разных значений z_0

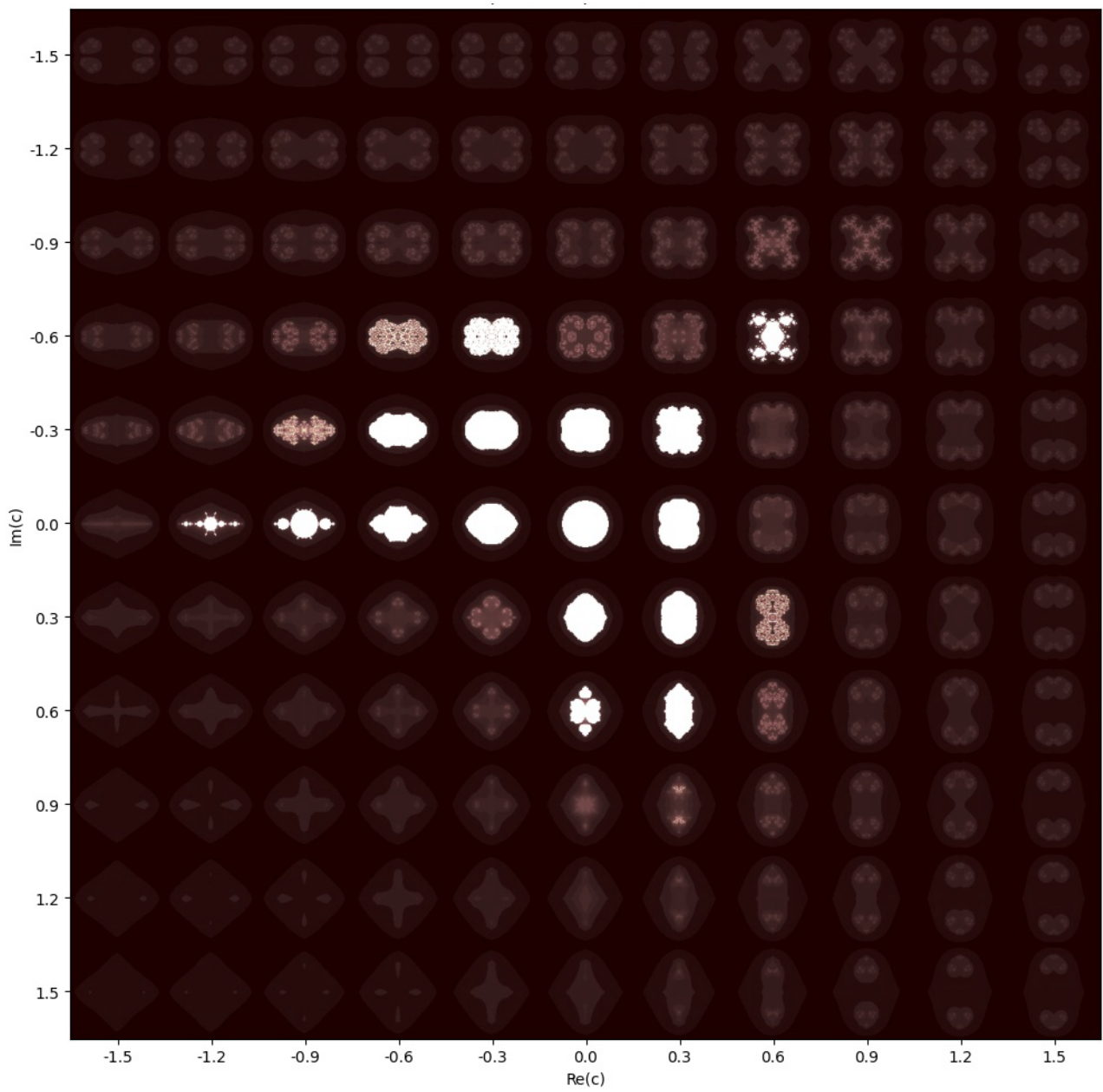


Рис. 6.6. Фракталы Жюлиа «горящий корабль» степени 2.75 для разных значений C_0

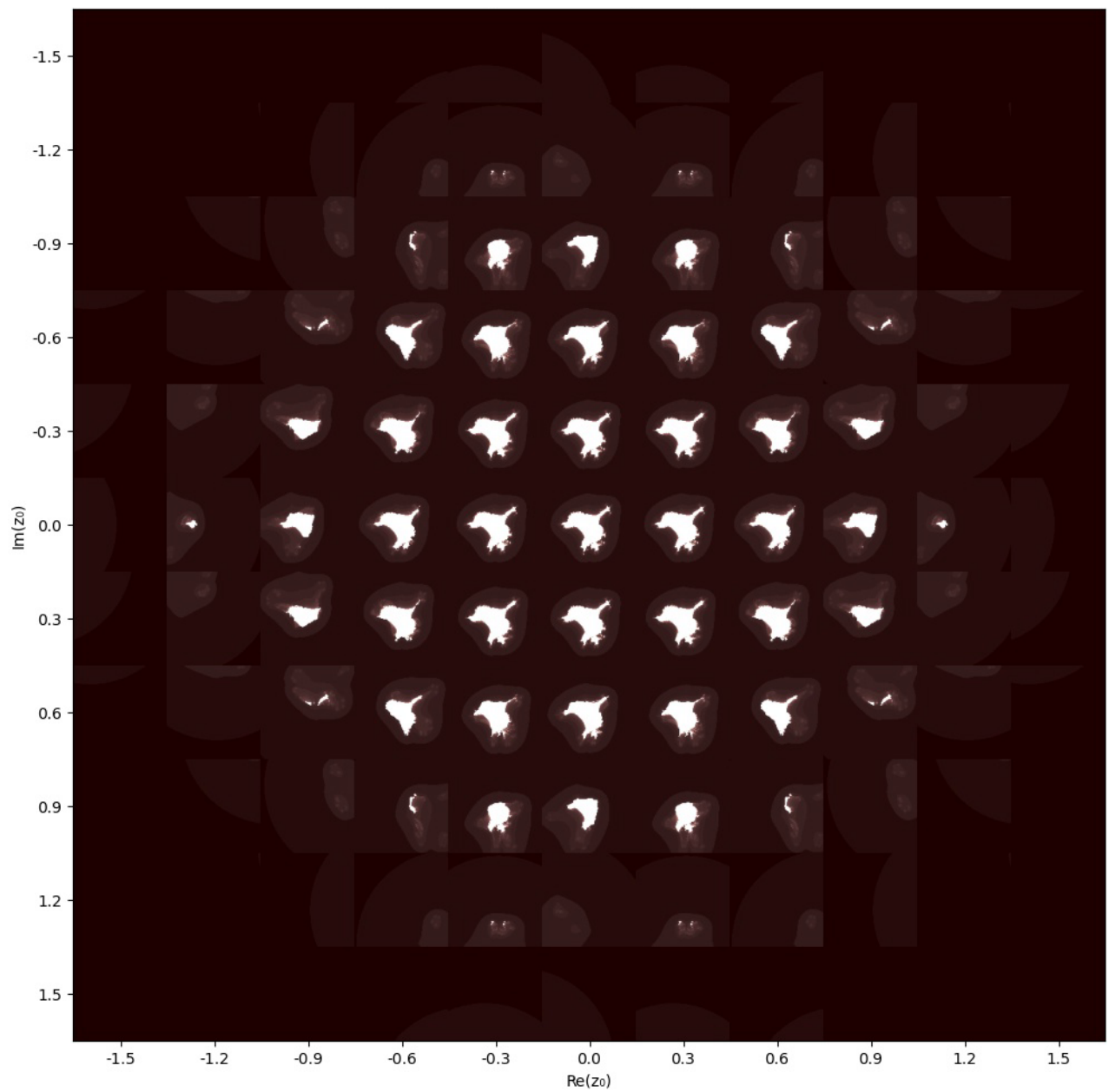


Рис. 6.7. Фракталы Мандельброта «горящий корабль» степени 3.5 для разных значений Z_0

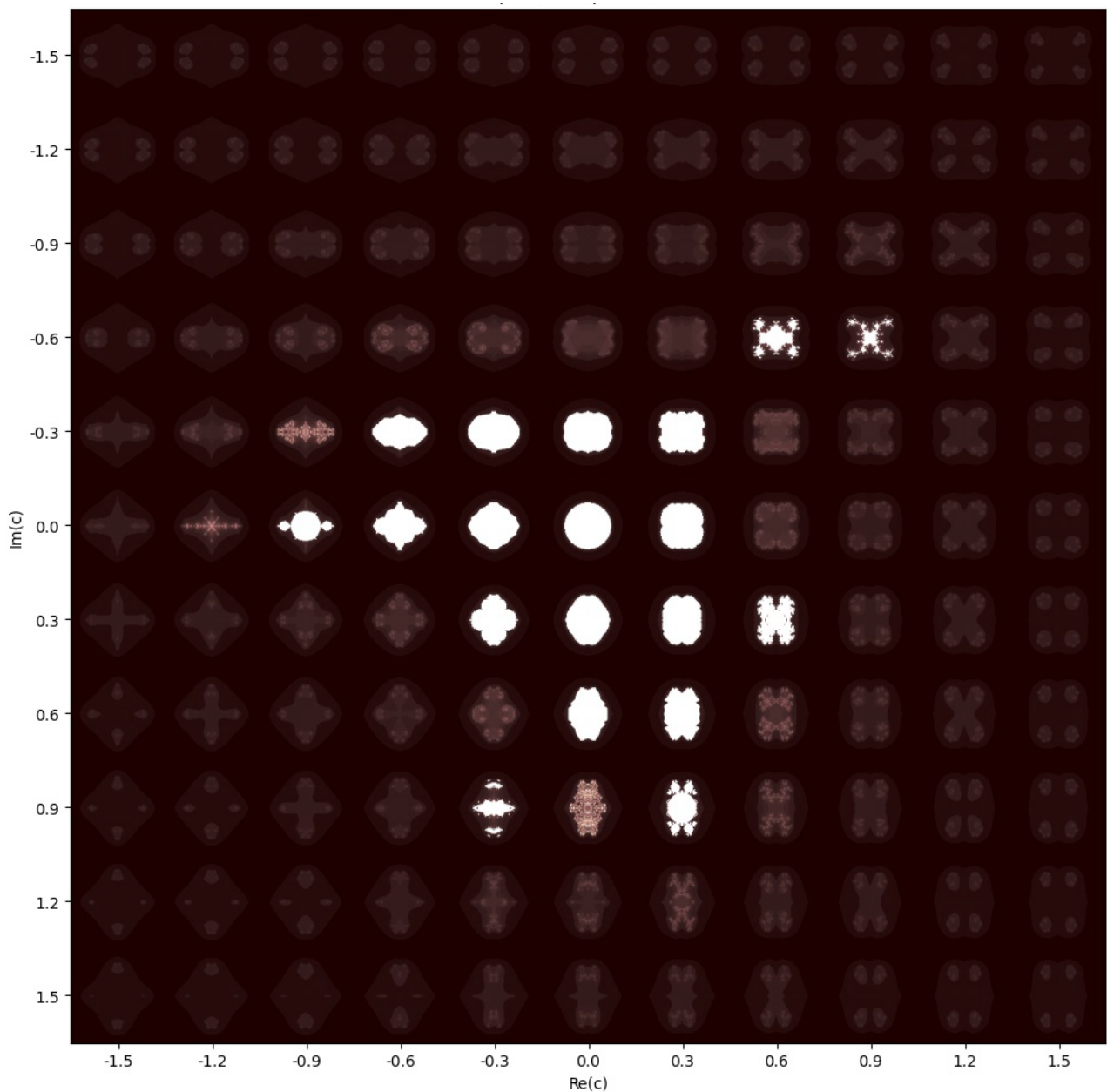


Рис. 6.8. Фракталы Жюлиа «горящий корабль» степени 3.5 для разных значений C_0

Заключение и выводы

Данная студенческая научно-исследовательская работа проводилась в соответствии с практико-ориентированной методикой, подробно изложенной в [5, 6, 7].

Подробное исследование фрактала «горящий корабль» ранее авторам не встречалось.

В изображениях ФМ «горящего корабля» разных вещественных степеней (рис. 1, рис. 2.1, рис. 3.1, рис. 4.1 и т.д.) наблюдается симметричность относительно центральной строки ($Im(z_0)=0$) и центрального столбца ($Re(z_0)=0$).

Кроме того, сами изображения ФМ «горящего корабля» целых четных степеней ассиметричны (рис. 1, рис. 3.1, рис. 5.1), нечетных степеней – имеют осевую симметрию относительно диагонали (рис. 2.1, рис. 4.1), что приводит к симметричности изображений ФЖ относительно соответствующей диагонали таблицы (рис. 2.2, рис. 4.2).

В работе были получены массивы фрактальных изображений для степеней 2–6 и ряда дробных значений, что позволяет легко произвести их оценку «в целом», в частности, делая выбор образа для задач дизайна.

Впервые произведен выход в пространство большей размерности, в частности миниатюры ФМ или ФЖ с одинаковой позицией в разных таблицах представляют собой цепочки сечений (томограмм) обобщенного степенного гиперфрактала «горящий корабль», отличающихся одной координатой m . На рис. 7 показана такая цепочка, составленная из центральных изображений ФМ разных степеней. Это наглядно показывает, что пространство в окрестностях гиперфрактала «горящий корабль» так же непрерывно (при незначительных изменениях положения секущей плоскости, изображение меняется незначительно), как и пространство в окрестностях классического гиперфрактала Мандельброта.



Рис. 7. Сечения гиперфрактала «горящий корабль» для разных значений m ($Z_0 = 0+0i$)

Литература

1. Лабуть А. Снова о многомерности множества Мандельброта–Жюлиа [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.sciteclibrary.ru/texts/rus/stat/st2526.htm> . – Загл. с экрана (Дата обращения: 23.06.2025)
2. Бойков А.А., Орлова Е.В., Чернова А.В., Шкилевич А.А. О создании фрактальных образов для дизайна и полиграфии и некоторых геометрических обобщениях, связанных с ними // Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации. Материалы VIII Международной научно-практической интернет-конференции, февраль – март 2019 г. – Пермь: ПНИПУ, 2019. – С. 325–339.
3. Шкилевич А. А. К исследованию фрактальных образов множеств Жулиа-Мандельброта // Журнал естественнонаучных исследований. 2024. Т. 9, №2. С. 31–37.
4. Орлова Е.В., Чернова А.В. Исследование алгебраических фракталов с позиции многомерной геометрии // Журнал естественнонаучных исследований. 2024. Т.9, №4. С. 64–71.
5. Бойков А. А., Ефремов А. В., Рустамян В. В. О студенческой научно-исследовательской работе на геометро-графических кафедрах // Геометрия и графика. 2023. №. 4. С. 61-75. DOI: 10.12737/2308-4898-2024-11-4-61-75
6. Вышнепольский В. И., Бойков А. А., Егиазарян К. Т., Кадыкова Н. С. Методическая система проведения занятий на кафедре «Инженерная графика» РТУ МИРЭА // Геометрия и графика. 2023. №. 1. С. 23-34. DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-23-34
7. Вышнепольский В. И., Бойков А. А., Егиазарян К. Т., Ефремов А. В. Научно-исследовательская работа на кафедре «Инженерная графика» РТУ МИРЭА // Геометрия и графика. 2023. №. 1. С. 70-85. DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-70-85.

Literature

1. Labut' A. Snova o mnogomernosti mnozhestva Mandel'brot-Zhulia // SciTecLibrary [site]. URL: <http://www.sciteclibrary.ru/texts/rus/stat/st2526.htm> (Date of access 16.06.2025, in Russian).
2. Boykov A.A., Orlova E.V., Chernova A.B., Shkilevich A.A. O sozdanii fraktal'nyh obrazov dlja disajna i poligrafii i nekotoryh geometricheskikh obobtszenijah, svjazannyh s nimi // Problemy kachestva graficheskoy podgotovki studentov v tekhnicheskom vuze: tradicii i innovacii. Materialy 8-j mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii. – Perm': PNIPU, 2019. – pp. 325–339.
3. Shkilevich A.A. Research of fractal images of Julia and Mandelbrot sets // Journal of Natural Sciences Research. 2024. Vol. 9, №. 2. pp. 31–37.
4. Orlova E. V., Chernova A. V. Study of algebraic fractals from the perspective of multidimensional assessment // Journal of Natural Sciences Research. – 2024. – №4. – pp. 64–71.

5. Boykov A. A., Efremov A. V., Rustamyan V. V. About Student Research Work // Geometry & Graphics. 2023. Vol. 11, №4. pp. 61–75. DOI: 10.12737/2308-4898-2024-11-4-61-75 (In Russian)
6. Vyshnyepolskiy V. I., Boykov A. A., Egiazaryan K. T., Kadykova N. S. Methodological system for conducting classes at the Department of "Engineering Graphics" RTU MIREA // Geometry & Graphics. 2023. Vol. 11, №1. pp. 23-34. DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-23-34. (In Russian)
7. Vyshnyepolskiy V. I., Boykov A. A., Egiazaryan K. T., Efremov A. V. Scientific Research at the Department of Engineering Graphics RTU MIREA // Geometry & Graphics. 2023. Vol. 11, №1. pp. 70–85. DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-70-85. (In Russian)