

Теорема Дезарга: доказательство на плоскости координатным методом

Desargues' theorem: proof on a plane using the coordinate method

Соколова Л.С.

Канд. техн. наук, доцент кафедры РК1 «Инженерная графика», ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», г. Москва

e-mail: sls@bmstu.ru

Sokolova L.S.

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of RK1 "Engineering Graphics", Bauman Moscow State Technical University (National Research University), Moscow

e-mail: sls@bmstu.ru

Аннотация

Доказательство теоремы Дезарга на плоскости получено в модельном пространстве компьютера координатным методом преобразования пространства. Суть метода [3] заключается в закономерном снижении размерности, задающей это пространство конечной 3D-геометрической модели фигуры при визуализации аксонометрическим видом, что позволяет решать задачи на двумерной плоскости, избежав классического метода проецирования пространства на плоскость проекций. Для выполнения условий теоремы Дезарга построены два родственных треугольника в стандартном изометрическом виде: одним из них является основание любой прямой призмы, а в качестве второго треугольника принято сечение этой призмы. Графическими построениями найдено, а математическими расчетами подтверждено пересечение родственных сторон треугольников в точках, принадлежащих оси родства s_0 .

Ключевые слова: теорема Дезарга, проецирование на плоскость, координатный метод.

Abstract

The proof of Desargues' theorem on the plane is obtained in the computer's model space using the coordinate method of space transformation. The essence of the method [3] is the regular reduction of the dimensionality of the finite 3D geometric model of the shape that defines this space when visualized in an axonometric view. This allows for solving problems on a two-dimensional plane, avoiding the classical method of projecting space onto a projection plane. To fulfill the conditions of Desargues' theorem, two related triangles are constructed in the standard isometric form: one of them is the base of any straight prism, and the second triangle is the section of this prism. Graphical constructions have found, and mathematical calculations have confirmed, the intersection of the related sides of the triangles at points belonging to the axis of kinship s_0 .

Keywords: Desargues' theorem, projection onto a plane, coordinate method.

Моделирование точечного пространства выполняется по схеме классического метода двух изображений. Теорема Дезарга является одним из первых обоснований получения обратимого изображения методом двух изображений.

Теорема излагается в двух формулировках: для пространства и для плоскости. В обоих случаях справедлива как сама теорема, так и ее доказательство путем проецирования пространства на плоскость проекций, например, с помощью метода центрального проецирования [4].

Интерес исследователей к поиску доказательства теоремы на плоскости связан с поиском метода, альтернативного проецированию пространственной фигуры на плоскость, который 400 лет остается единственным практическим методом.

Так, например, известный математик Д. Гильберт показал, что теорема Дезарга, хотя и имеет сугубо проективную формулировку, может быть доказана «без выхода» в пространство только с привлечением средств метрической геометрии. А использование отображения «выхода» на пространство позволяет ее автору доказать теорему чисто проективными средствами, то есть использовать лишь операции проецирования и сечения.

Речь идет, по существу, о поиске возможности замены метода двух изображений, который используется в инженерной практике (чертеж Монжа, аксонометрия, перспектива) на современные цифровые технологии вместо проецирования.

Рассмотрим предлагаемое решение теоремы Дезарга в модельном пространстве компьютера. Для этого модельное пространство компьютера рассмотрим, как бесконечное трехмерное пространство в мировой декартовой системе координат. В нем создадим 3D-геометрическую модель прямой трехгранной призмы в каркасном исполнении, задав ее координатами вершин.

Согласно [3] визуализации этой модели в модельном пространстве компьютера аксонометрическим или ортогональным видами является преобразование пространства в связи с закономерным снижением размерности задающей это пространство конечной геометрической фигуры. При этом, согласно теореме К. Польке [2], координаты точек в аксонометрии просто пересчитывают по натуральным координатам объекта.

Таким образом, дальнейшее решение задачи Дезарга будем выполнять на двумерной плоскости, избежав классического метода проецирования.

Для выполнения условий теоремы Дезарга требуется построение двух родственных треугольников. В качестве одного из родственных треугольников примем основание прямой призмы, а в качестве второго треугольника примем сечение этой призмы. Исходим из условия, что каждую из двух аффинно соответствующих фигур можно рассматривать как ортогональную проекцию фигуры подобной другой.

Здесь и далее построения выполняют на изометрическом виде, аксонометрические оси которого расположены под углами 120° , а точка просмотра соответствует координатам $(1, 1, 1)$ (рис. 1).

При выборе изометрического вида исходим из следующих соображений:

- взаимная перпендикулярность оси родства и направления родства в ортогональных координатах не позволяет построить родственное соответствие двух геометрических фигур из-за осевой симметрии [1];
- простота выполнения взаимно перпендикулярных осей родства и направления родства в прямоугольной изометрии;
- координаты изометрического изображения просто пересчитывают с натуральных координат и наоборот;
- наглядность и построение видов, а не проекций.

При рассмотрении родственных треугольников исходим из положения о том, что ось родства s_0 и две точки M и M_1 по направлению родства вполне определяют родственное соответствие фигур.

Ось родства и направление родства, взаимно перпендикулярные в прямоугольных координатах, на изометрическом виде параллельны соответственным аксонометрическим осям, т.е. $s_0 \parallel OY$, а $s \parallel OX$.

Точки M и M_1 построены в соответствии с конкретными параметрами заданной призмы и ее сечения в виде произвольного треугольника. Для упрощения дальнейших графических построений ось родства s_0 проведем через вершину C основания призмы ABC . Точка M выбрана на середине стороны AB и из нее проведена линия направления родства до точки M_1 .

Согласно теореме Дезарга у двух родственных треугольников их стороны пересекаются в точках, лежащих на оси родства s_0 . Находим точку S пересечения стороны AB основания

призмы с осью родства s_0 . Затем, из этой точки через точку M_1 проводим прямую SM_1 . На пересечении этой прямой с прямыми AA_1 и BB_1 параллельными направлению родства s , строим сторону A_1B_1 , родственную стороне AB основания призмы. Соединяем точки $A_1B_1C_1$ и получаем вид искомого треугольника в изометрии, родственного основанию призмы (см. рис. 1).

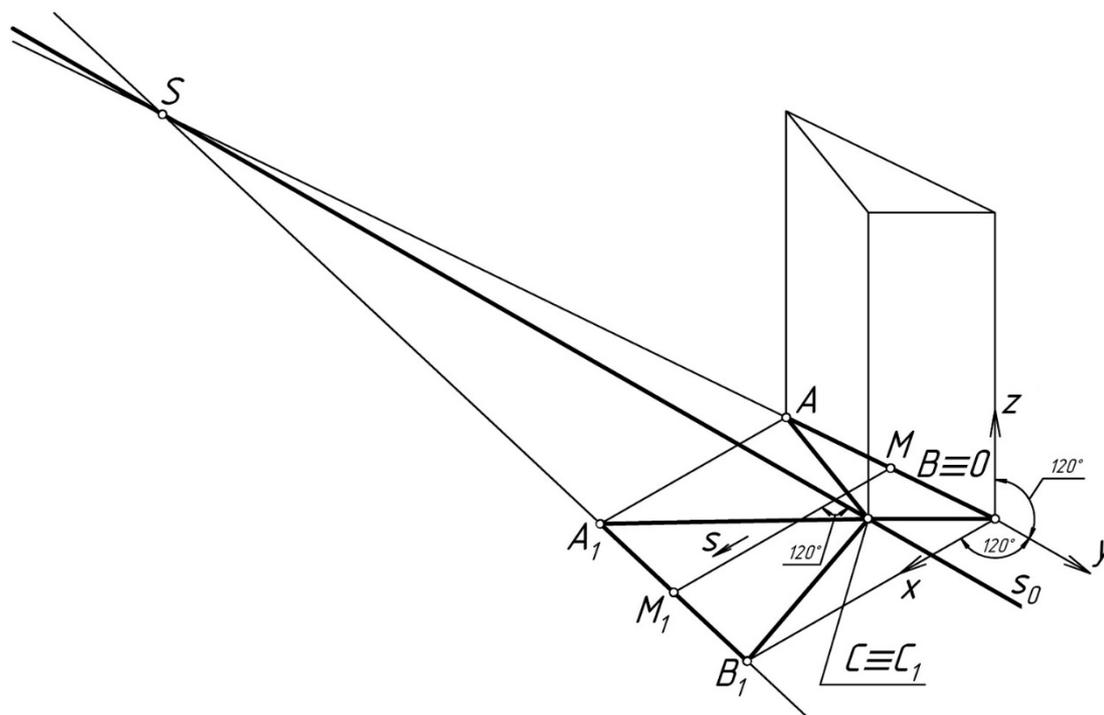


Рис. 1

Для проверки родственного соответствия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ [3] определим коэффициенты постоянства трех точек прямых и построенных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

$$k = \frac{SB}{SA} = \frac{SB_1}{SA_1} = 1,33$$

$$k = \frac{\Delta SBC}{\Delta SB_1C_1} = \frac{\Delta ABC}{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{\Delta SAC}{\Delta SA_1C_1} = 0,34$$

У двух родственных треугольников их стороны пересекаются в точках, лежащих на оси родства, являющейся двойной прямой.

Для доказательства этого тезиса теоремы Дезарга применим математические расчеты к построенным изображениям. Для этого запишем стороны родственных треугольников и ось родства аналитическими уравнениями в аксонометрической системе координат:

1) Пересчитаем координаты вершин основания 3D-геометрической модели, заданной в прямоугольной системе координат, на их изометрические координаты, поместив начало координат в точку B (см. рис. 1).

Тогда координаты точек A, B, C будут иметь следующие значения:

$A(8,16; 50,33); B(0; 0); C(22,33; 31,15)$

2) Координаты точек построенного родственного треугольника $A_1B_1C_1$ в этой системе координат будут иметь следующие значения:

$A_1(51,46; 63,53); B_1(66,34; 21,74); C_1 \equiv C(22,33; 31,15)$

3) По известным координатам точек запишем уравнения следующих прямых:

оси родства $s_0 \parallel OY$ и $C \in s_0$: $x = 22,33$;

прямой AB : $y = 6,17x$

прямой A_1B_1 : $y = -2,81x + 200,52$

4) Совместным решением вышеуказанных уравнений найдем координаты точки пересечений $S(x; y)$:

оси родства s_0 и прямой AB

$$\begin{cases} x = 22,33 \\ y = 6,17x \\ x = 22,33 \\ y = 6,17x \cdot 22,33 \\ x = 22,33 \\ y = 137,77 \end{cases}$$

точка пересечения $S(22,33; 137,77)$;

прямой AB и прямой A_1B_1

$$\begin{cases} y = 6,17x \\ y = -2,81x + 200,52 \\ y = 6,17x \\ 6,17x = -2,81x + 200,52 \\ 6,17x + 2,81x = 200,52 \\ 8,98x = 200,52 \\ x = 200,52 : 8,98 = 22,33 \\ y = 6,17 \cdot 22,33 = 137,77 \end{cases}$$

точка пересечения $S(22,33; 137,77)$

Графическими построениями и математическими расчетами установлено, что точка S лежит на пересечении сторон SAB и $S_1A_1B_1$ и принадлежит оси родства s_0 . Стороны AC , BC , A_1C_1 и B_1C_1 сходятся в точке C , принадлежащей оси родства s_0 .

Таким образом, доказана справедливость теоремы Дезарга построениями на плоскости без привлечения операций проецирования координатным методом в модельном пространстве компьютера при 2D-моделировании.

Литература

1. Графский О.А. Виды аффинных преобразований и их композиции. [текст] / О.А. Графский // Геометрия и графика. — 2016. — Т.4. — №3. — с. 11-16. — DOI:10.12737/21529.
2. Соколова Л.С. Теорема К. Польке в модельном пространстве компьютера при 2D-моделировании [текст] / Л.С. Соколова // Геометрия и графика. — 2024. — Т.12. — №1. — с. 12-21.
3. Соколова Л.С. Построение электронного изображения и чертежа координатным методом в модельном пространстве компьютера [текст] / Л.С. Соколова // Геометрия и графика. — 2025. — Т.13. — №1 — с. 43-52.
4. Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия. — М.: Учпедгиз. — 1953.