

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ВРЕМЕН ПАДЕНИЯ
ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННЫХ РАБОЧИХ ОРГАНОВ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ МАШИН****Акимов А.П., Константинов Ю.В., Мазяров В.П.**

Реферат. Решения многих задач сельскохозяйственного машиностроения выражаются через специальные функции. В частности, к таким задачам относится задача об определении траекторий перемещения и времени падения шарнирно закрепленных рабочих органов сельскохозяйственных машин, когда ось подвески движется горизонтально с некоторой скоростью. К таким рабочим органам относятся: клапан копнителя, падающий после освобождения от копны, брус поперечных граблей, который падает после освобождения валка и другие. Решение таких задач сводится к определению времени движения физического маятника до заданного углового положения, которое выражается через эллиптические интегралы. И хотя эллиптические интегралы – хорошо изученный класс функций, во многих случаях приближенное решение подобных задач в элементарных функциях является вполне достаточным как с точки зрения практического применения, так и удобства использования. Кроме того, такой подход позволяет определить приближенный закон движения физического маятника в явном виде, что позволяет проще ставить и решать задачи оптимизации режимов работы и параметров упомянутых выше рабочих органов. Путем оценки интеграла, такой приближенный закон движения математического маятника был получен. Его точность достаточна для инженерной практики. Полученная формула для периода колебаний маятника с большой амплитудой позволяет определять время падения шарнирно закрепленных рабочих органов сельскохозяйственных машин с высокой точностью.

Ключевые слова: рабочие органы, траектории движения, физический маятник, колебания большой амплитуды, период колебаний, приближенно гармонические колебания.

Введение. Задача определения периода колебаний маятника привлекла внимание исследователей, прежде всего, в связи с использованием его как средства измерения времени. Вопрос о зависимости периода колебаний маятника от максимального угла отклонения его от положения равновесия был поставлен уже в мемуаре Х. Гюйгенса «Маятниковые часы». Он отмечал, «можно, например, показать, что время, в течение которого маятник проходит четверть окружности, относится ко времени падения по очень малой дуге, как 34:29. Это различие периодов колебаний ни в коем случае не объясняется сопротивлением воздуха, как думают некоторые, но вытекает из самой природы движения и свойств круга» [1, с. 19]. И хотя Х. Гюгенс дает достаточно точное значение времени движения, с ошибкой всего лишь 0,8%, он не приводит аналитического решения. Полное аналитическое решение этой задачи было получено при помощи эллиптического интеграла лишь в 1734 году П. Эльвиусом [1]. Исследованию зависимости периода колебаний маятника от их амплитуды посвящен ряд работ современных исследователей [2 – 6].

Решение многих задач сельскохозяйственного машиностроения невозможно без применения специальных функций. Одной из довольно распространенных задач такого типа является задача об определении времени падения шарнирно закрепленных рабочих органов сельскохозяйственных машин и траекторий их

перемещения, когда ось подвески движется горизонтально со скоростью v_m . К таким рабочим органам относятся клапан копнителя, падающий после освобождения от копны, брус поперечных граблей, который падает после освобождения валка и т.д. [7]. Решение этих задач сводится к определению времени движения физического маятника до заданного углового положения, которое выражается через эллиптические интегралы.

Несмотря на то, что эллиптические интегралы являются хорошо изученным классом специальных функций, во многих случаях приближенное решение подобных задач в элементарных функциях является вполне достаточным как с точки зрения практического применения, так и удобства использования. Кроме того, такой подход позволяет определить приближенный закон движения физического маятника в явном виде, что позволяет проще ставить и решать задачи оптимизации режимов работы и параметров упомянутых выше рабочих органов.

Поэтому цель данного исследования – найти приближенный закон движения физического маятника и определить период свободных колебаний для значительных углов его отклонения от положения равновесия, с точностью достаточной для решения задач сельскохозяйственного машиностроения.

Анализ и обсуждение результатов. Как известно, дифференциальное уравнение движения физического маятника (рисунок 1) име-

ет следующий вид [8]:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -GL \sin \varphi, \quad (1)$$

где j – угол отклонения отрезка ОС от вертикали, определяющий положение маятника; t – время движения маятника; G – вес маятника; L – расстояние от оси поворота до центра тяжести маятника; I – момент инерции маятника относительно оси поворота.

Обозначим через ω угловую скорость маятника, а через j_0 – максимальный угол отклонения отрезка ОС от вертикали, определяющий начальное положение физического маятника.

Так как $d^2 \varphi / dt^2 = d\omega / d\varphi \cdot d\varphi / dt = \omega \cdot d\omega / d\varphi$ то из (1) следует, что

$$I \omega d\omega = -GL \sin \varphi d\varphi.$$

Поскольку $\omega(\varphi_0) = 0$, то, интегрируя последнее уравнение, получаем:

$$\int_0^{\omega} \omega d\omega = -p^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varphi d\varphi,$$

или

$$\omega^2 / 2 = p^2 (\cos \varphi - \cos \varphi_0), \quad (2)$$

где обозначено $p^2 = GL/I$.

Из равенства (2) находим:

$$\omega = \pm p \sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}. \quad (3)$$

Так как с увеличением величины угловой скорости ω угол j уменьшается, то в равенстве (3) необходимо выбрать знак минус. Тогда с учетом того, что $\omega = d\varphi / dt$, получим:

$$dt = - \frac{d\varphi}{p \sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}}.$$

Интегрирование левой и правой части последнего равенства дает:

$$t = \frac{1}{p \sqrt{2}} \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}. \quad (4)$$

Чтобы выразить время движения физического маятника через нормальные эллиптические интегралы Лежандра, воспользуемся тождеством $\cos \varphi - \cos \varphi_0 = 2[\sin^2(\varphi_0/2) - \sin^2(\varphi/2)]$ и, обозначив $k = \sin \varphi_0 / 2$, выполним замену переменной $\varphi = 2 \arcsin(k \sin \alpha)$ в интеграле из (4):

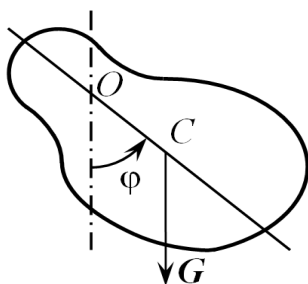


Рисунок 1 – Схема к составлению уравнения движения маятника

$$t = \frac{1}{p} \int_{\alpha}^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{p} [K(k) - F(k, \alpha)], \quad (5)$$

где функции $F(k, \alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$ и

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$$
 называются неполным

и полным нормальными эллиптическими интегралами Лежандра первого рода соответственно [9]. Для них составлены подробные таблицы значений.

Поскольку интеграл в правой части равенства (4) не выражается через элементарные функции, то для определения приближенного закона движения физического маятника оценим интеграл в (4). Для этого рассмотрим следующую функцию переменной j с параметром j_0 :

$$f(\varphi) = \frac{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}{\varphi_0^2 - \varphi^2}. \quad (6)$$

Найдем ее наименьшее и наибольшее значения на отрезке $[0, j_0]$. Значения функции на левом конце отрезка равно:

$$f(0) = \frac{4 \sin^2(\varphi_0 / 2)}{\varphi_0^2}. \quad (7)$$

Функция неопределенна на правом конце отрезка, но ее можно дополнить до непрерывности, положив:

$$f(\varphi_0) = f(\varphi_0 - 0) = 2 \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \frac{(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}{\varphi_0^2 - \varphi^2} = \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} \quad (8)$$

Покажем, что функция $f(j)$ является убывающей. Ее производная равна:

$$f'(\varphi) = 2 \frac{g(\varphi)}{(\varphi_0^2 - \varphi^2)^2}, \quad (9)$$

где числитель последней дроби $g(j)$ равен

$$g(\varphi) = 2\varphi(\cos \varphi - \cos \varphi_0) - \sin \varphi (\varphi_0^2 - \varphi^2). \quad (10)$$

Поскольку $\cos \varphi - \cos \varphi_0 = 2 \sin \varphi_0 \cdot \varphi / 2 \cdot \sin \varphi_0 + \varphi / 2$ то в силу очевидного неравенства $\sin x < x$, при $x > 0$, при $j < j_0$ справедливо также следующее неравенство:

$$\frac{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}{\varphi_0^2 - \varphi^2} < \frac{\sin((\varphi_0 + \varphi) / 2)}{(\varphi_0 + \varphi) / 2}. \quad (11)$$

С другой стороны, так как $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' < 0$,

при $0 < x \leq p$, то $\frac{\sin x}{x}$ убывает на этом

промежутке. Но при $0 < \varphi < \varphi_0$, $(\varphi_0 + \varphi) / 2 > \varphi$, поэтому:

$$\frac{\sin((\varphi_0 + \varphi) / 2)}{(\varphi_0 + \varphi) / 2} < \frac{\sin \varphi}{\varphi}.$$

Из последнего неравенства и неравенства (11) с учетом выражения (10) следует отрица-

тельность функции $g(\varphi)$, а значит, в силу равенства (9), и отрицательность производной функции $f(\varphi)$, что и доказывает ее убывание как на интервале $(0, \varphi_0)$, так и на отрезке $[0, \varphi_0]$. Значит, значение $f(0)$ является наибольшим значением функции $f(\varphi)$ на этом отрезке, а $f(\varphi_0)$ – ее наименьшим значением. Но поскольку функция $f(\varphi)$ является четной, то эти же ее значения являются наибольшим и наименьшим значениями и на симметричном отрезке $[-\varphi_0, \varphi_0]$. То есть, при $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$, справедливо двойное неравенство:

$$\frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} < \frac{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}{\varphi_0^2 - \varphi^2} < \frac{4 \sin^2(\varphi_0/2)}{\varphi_0^2}.$$

Так как $y = \sqrt{x}$ функция возрастает на всей числовой оси, то из последнего неравенства следует, что при $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 < \pi$ справедливо еще одно двойное неравенство:

$$\frac{\varphi_0}{2 \sin(\varphi_0/2)} \frac{1}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} < \frac{1}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}} < \sqrt{\frac{\varphi_0}{\sin \varphi_0}} \frac{1}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}.$$

Интегрируя последнее неравенство почленно, получим оценку:

$$\frac{\varphi_0/2}{\sin(\varphi_0/2)} \arccos \frac{\varphi}{\varphi_0} < \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}} < \sqrt{\frac{\varphi_0}{\sin \varphi_0}} \arccos \frac{\varphi}{\varphi_0}.$$

Таким образом, если приближенно приравнять значение интеграла среднему арифметическому ограничивающих его значений, положив:

$$\int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_0/2}{\sin(\varphi_0/2)} + \sqrt{\frac{\varphi_0}{\sin \varphi_0}} \right) \arccos \frac{\varphi}{\varphi_0}, \quad (12)$$

то относительная ошибка приближения по формуле (12) не превысит величины:

$$\delta = \frac{2 \sqrt{\varphi_0 / \sin \varphi_0} - \varphi_0 / \sin(\varphi_0/2)}{2 \sqrt{\varphi_0 / \sin \varphi_0} + \varphi_0 / \sin(\varphi_0/2)}.$$

Эта величина δ стремится к нулю при $\varphi_0 \rightarrow 0$ и, хотя монотонно возрастает на отрезке $[0, 3\pi/4]$, но довольно медленно, правда, приближаясь к 1 при $\varphi_0 \rightarrow \pi$. Как показывают расчеты, при $\varphi_0 = \pi/2$ она составляет величину около 6%, а при $\varphi_0 < 3\pi/4$ она меньше 17,8%, что в большинстве случаев является допустимой величиной для инженерной практики.

Из (4) с учетом приближенного равенства (12) легко находим приближенный закон движения физического маятника:

$$\varphi \approx \varphi_0 \cos\left(\frac{P}{n(\varphi_0)} t\right), \quad (13)$$

$$n(\varphi_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_0/2}{\sin(\varphi_0/2)} + \sqrt{\frac{\varphi_0}{\sin \varphi_0}} \right),$$

где

На рисунок 2 сплошной линией изобра-

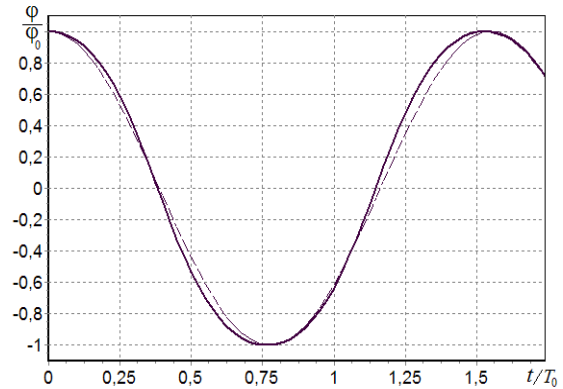


Рисунок 2 – Графики зависимостей угла отклонения маятника от безразмерного времени

жен график зависимости φ/φ_0 от безразмерного времени t/T_0 для значения $\varphi_0 = 3\pi/4$, полученный с помощью численного интегрирования, а пунктирной линией – график аналогичной зависимости, соответствующей приближенному решению (13). Даже для этого значения φ_0 форма колебаний близка к синусоидальной, то есть колебания близки к гармоническим.

Следовательно, закон движения маятника можно приближенно считать гармоническим, но с периодом, зависящим от амплитуды колебаний. Этот период приближенно равен:

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi_0/2}{\sin(\varphi_0/2)} + \sqrt{\frac{\varphi_0}{\sin \varphi_0}} \right) \cdot T_0, \quad (14)$$

где $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{GL}}$ – период малых

колебаний физического маятника.

Зависимость периода свободных колебаний от амплитуды – специфическая особенность нелинейных колебательных систем. При их исследовании, прежде всего, интересуются зависимостью T от φ_0 , которая является одной из наиболее важных характеристик таких систем. Из равенства (5) следует точное выражение этой зависимости для маятника:

$$T = \frac{2 K(\sin(\varphi_0/2))}{\pi} T_0. \quad (15)$$

Из расчетов следует, что формула (14) аппроксимирует зависимость (15) с достаточно высокой точностью. Относительная ошибка определения T равна нулю при $\varphi_0 = 0$, а на отрезке $[0, 3\pi/4]$ она монотонно, но очень медленно, возрастает с ростом φ_0 . Так при $\varphi_0 < \pi/2$ она меньше 0,15% и, даже при $\varphi_0 = 3\pi/4$, она меньше 1,5%.

Обычно зависимость (15) аппроксимируется с помощью приближенной формулы [8]:

$$T \approx (1 + \varphi_0^2/16) T_0, \quad (16)$$

относительные ошибки которой значительно выше. При $\varphi_0 = 3\pi/4$ ошибка в определении периода по формуле (16) уже больше 11,5%.

Выводы. Получены приближенный закон движения физического маятника для значительных углов его отклонения от положения равновесия и приближенная формула для периода его колебаний. Показано, что с точностью достаточной для инженерной практики даже при значительных амплитудах колебаний физического маятника его колебания при-

ближенно являются гармоническими, но с периодом, зависящим от максимального угла отклонения маятника от положения его равновесия. Простая формула для периода колебаний большой амплитуды позволяет определять время падения шарнирно закрепленных рабочих органов сельскохозяйственных машин с высокой точностью.

Литература

1. Гюйгенс Х. Три мемуара по механике / Х. Гюйгенс. – М.: АН СССР, 1951. – 377 с.
2. Кочетков А.В., Челпанов И.Б., Федотов П.В. Определение периода больших колебаний маятника в элементарных функциях / А.В. Кочетков, И.Б. Челпанов, П.В. Федотов // Измерительная техника. – 2016. – № 6. – С. 39–41.
3. Талалай В.В., Кочетков А.В., Федотов П.В., Талалай М.В. Определение периода больших колебаний маятника (до 90°) // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 8, № 5 (2016) <http://naukovedenie.ru/PDF/73TVN516.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус, англ.
4. P. Amore, M. Cervantes Valdovinos, G. Ornelas, and S. Zamudio Barajas. The nonlinear pendulum: formulas for the large amplitude period. *Revista Mexicana De Fisica E* 53 (1) 2007, 106–111.
5. A. Belendez. C. Pascual. D.I. Mendez. T. Belendez and C. Neipp. Exact solution for the nonlinear pendulum. *Revista Brasileira de Ensino de Fisica*. v. 29. n. 4, 2007, p. 645-648.
6. Пеана Тома. New periodic LEM solutions for the nonlinear pendulum. *Rev. Roum. Sci. Techn. - Mec. Appl.*, TOME 53, № 2, 2008, – Bucarest, p. 135-146.
7. Долгов И.А., Васильев Г.К. Математические методы в земледельческой механике / И.А. Долгов, Г.К. Васильев. – М.: «Машиностроение», 1967. – 204 с.
8. Магнус К. Колебания: введение в исследование колебательных систем. Пер. с нем. / К. Магнус. – М.: Мир, 1982. – 304 с., илл.
9. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / – М.: Наука, 1979 г. – 832 с. с илл.

Сведения об авторах:

Акимов Александр Петрович – доктор технических наук, профессор, e-mail: akimov_mechfak@mail.ru
 Константинов Юрий Валентинович – кандидат технических наук, доцент, e-mail:konstantinov@polytech21.ru
 Мазяров Владимир Порфирьевич – кандидат технических наук, доцент, e-mail: if7@academy21.ru
 ФГБОУ ВО «Чувашская государственная сельскохозяйственная академия», г. Чебоксары, Россия.

DETERMINATION OF DISPLACEMENT TRAJECTORIES AND FALLING TIME OF HINGEDLY FIXED WORKING UNITS OF AGRICULTURAL MACHINES

Akimov A.P., Konstantinov Yu.V., Mazyarov V.P.

Abstract. The solutions of many problems of agricultural engineering are expressed through special functions. In particular, such problems include the problem of determining the displacement trajectories and the falling time of the hingedly working units of agricultural machines, when the suspension axis moves horizontally at a certain speed. Such working device include: a stacker valve, falling after release from the shock, a beam of transverse rakes, that falls after the release of the roll and others. The solution of such problems is to determine the motion time of a physical pendulum to a given angular position, which is expressed in terms of elliptic integrals. And although elliptic integrals are a well-studied class of functions, in many cases an approximate solution of similar problems in elementary functions is quite sufficient both from the point of view of practical application and convenience of use. In addition, this approach makes it possible to determine the approximate law of motion of a physical pendulum in an explicit form, which makes it easier to set and solve problems of optimizing the operating modes and parameters of the above-mentioned working units. By estimating the integral, such an approximate law of motion of a mathematical pendulum was obtained. Its accuracy is sufficient for engineering practice. The obtained formula for the oscillation period of a pendulum with a large amplitude makes it possible to determine the falling time of the hinged working units of agricultural machines with high accuracy.

Key words: working units, trajectories of motion, physical pendulum, large amplitude oscillations, oscillation period, approximately harmonic oscillations.

References

1. Gyuygens Kh. *Tri memuara po mekhanike*. [Three memoirs on mechanics]. / Kh. Gyuygens. – М.: АН СССР, 1951. – P. 377.
2. Kochetkov A.V., Chelpanov I.B., Fedotov P.V. Determination of the period of large oscillations of a pendulum in elementary functions. [Opredelenie perioda bolshikh kolebaniy mayatnika v elementarnykh funktsiyakh]. / A.V. Kochetkov, I.B. Chelpanov, P.V. Fedotov // *Izmeritel'naya tekhnika. - Measuring Technology*. – 2016. – №6. – P. 39–41.
3. Talalay V.V., Kochetkov A.V., Fedotov P.V., Talalay M.V. *Opredelenie perioda bolshikh kolebaniy mayatnika (do 90°)*. // *Internet-zhurnal "NAUKOVEDENIE"*. (Determination of the period of large oscillations of the pendulum (up to 90°)). // Internet journal "Naukovedenie". Volume 8, № 5 (2016). Available at: <http://naukovedenie.ru/PDF/73TVN516.pdf>

(free).

4. P. Amore, M. Cervantes Valdovinos, G. Ornelas, and S. Zamudio Barajas. The nonlinear pendulum: formulas for the large amplitude period. *Revista Mexicana De Fisica E* 53 (1) 2007, P. 106–111.

5. A. Belendez, C. Pascual, D.I. Mendez, T. Belendez and C. Neipp. Exact solution for the nonlinear pendulum. *Revista Brasileira de Ensino de Fisica*. v. 29. n. 4, 2007, P. 645-648.

6. Ileana Toma. New periodic LEM solutions for the nonlinear pendulum. *Rev. Roum. Sci. Techn. - Mec. Appl.*, TOME 53, № 2, 2008, – Bucurest, p. 135-146.

7. Dolgov I.A., Vasilev G.K. *Matematicheskie metody v zemledelcheskoy mekhanike*. [Mathematical methods in agricultural mechanics]. / I.A. Dolgov, G.K. Vasilev. – M.: “Mashinostroenie”, 1967. – P. 204.

8. Magnus K. *Kolebaniya: vvedenie v issledovanie kolebatelnykh sistem. Per. s nem.* [Oscillations: an introduction to the study of oscillatory systems. Translated from German]. / K. Magnus. – M.: Mir, 1982. – P. 304, illustrated.

9. *Spravochnik po spetsialnym funktsiyam s formulami, grafikami i tablitsami*. [Handbook of special functions with formulas, graphs and tables]. / – M.: Nauka, 1979. – P. 832, illustrated.

Authors:

Akimov Aleksandr Petrovich – Doctor of Technical sciences, Professor, e-mail: akimov_mechfak@mail.ru

Konstantinov Yuriy Valentinovich – Ph.D. of Technical sciences, Associate Professor, e-mail: konstantinov@polytech21.ru

Turovskiy Boris Vladimirovich – Ph.D. of Technical sciences, Associate Professor, e-mail: boturovskij@yandex.ru

Chuvash State Agrarian University, Cheboksary, Russia.