Рекомбинация β-ребер αβ-триангуляции на евклидовой плоскости

Recombination of β-edges in αβ-triangulation on the Euclidean plane

Рустамян В.В.
Старший преподаватель кафедры «Инженерная графика», ФГБОУ ВО «МИРЭА - Российский технологический университет», г. Москва
e-mail: vv@rustamyan.ru

Rustamyan V.V.
Senior Lecturer Department of Engineering Graphics, MIREA - Russian Technological University, Moscow
e-mail: vv@rustamyan.ru

Кадыкова Н.С.
Канд. техн. наук, доцент кафедры «Инженерная графика», ФГБОУ ВО «МИРЭА - Российский технологический университет», г. Москва
e-mail: nkadykova@mail.ru

Kadykova N.S.
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Engineering Graphics, MIREA - Russian Technological University, Moscow
e-mail: nkadykova@mail.ru

Аннотация
В данной статье осуществляется поиск алгоритма рекомбинации β-ребер для алгоритма образования αβ-триангуляции из произвольной триангуляции на евклидовой плоскости. Выявлены возможные нарушения структуры $T_{\alpha\beta}$. Определена асимптотическая временная сложность алгоритма.
Ключевые слова: триангуляция, αβ-триангуляция, свойства αβ-триангуляции, алгоритм оптимизации, рекомбинация ребер.

Abstract
This paper addresses the search for a recombination algorithm of β-edges for generating an αβ-triangulation from an arbitrary triangulation on the Euclidean plane. Possible violations of the $T_{\alpha\beta}$ structure have been identified. An asymptotic time complexity of the algorithm has been determined.
Keywords: triangulation, αβ-triangulation, properties of αβ-triangulation, optimization algorithm, edge recombination.

Введение

В статье [4] была создана математическая модель, определены основные свойства, определены операции разреза и сшивки αβ-триангуляции, и описан алгоритм образования αβ-триангуляции из произвольной триангуляции. Данная математическая модель является теоретической основой и новым подходом для решения задачи аппроксимации поверхностей свободной формы полиэдрами с группами конгруэнтных граней [2, 3, 7, 8]. Одним из шагов последнего алгоритма является механизм рекомбинации β-ребер посредством переброски ребра, или иначе, флип ребра (flip) [1]. В данной статье авторы описывают алгоритм такого действия для αβ-триангуляции на евклидовой плоскости.

Постановка задачи

1. Описать алгоритм переброски β-ребер для αβ-триангуляции на евклидовой плоскости.

Теория

В целях ознакомления читателя с математической моделью, которая по сути своей является оптимальной триангуляцией с ограничениями по критерию минимизации суммы длин ребер, процитируем из [4] определение αβ-триангуляции, лемму 1 и свойство 4.

*«**Определение.** Возьмем сильно связную триангуляцию размерности 2 в пространстве* R^2*. Выделим некоторое множество граней и обозначим их замыкания α-треугольниками. Соответственно остальные элементы триангуляции обозначаются β-элементами. Такой комплекс назовем αβ-триангуляцией (*$T_{\alpha\beta}$*), если он удовлетворяет следующим условиям:*

1. Тела α-треугольников не имеют общих точек;

2. Триангуляция K содержит в себе только вершины остовов α-треугольников;

3. Сумма длин β-ребер минимальна.»

*«**Лемма 1.** β-ребрам всегда подчинены α-вершины.»*

*«**Свойство 4.** β-треугольник есть комплекс, в состав которого включены не более одного α-ребра.»*

Из определения, леммы 1 и свойства 4 следует еще одно свойство αβ-триангуляции.

Свойство. *β-ребро всегда подчинено β-треугольнику.*

По определению α-треугольнику подчинены только α-ребра. Из леммы 1 и свойства 4 следует, что β-отрезок опирается на вершины α-треугольника, но только β-треугольник способен содержать в себе β-ребра. В зависимости от того, является β-ребро граничным или внутренним, соответственно будет смежным с одним или с двумя β-треугольниками.

На рис. 1 представлена αβ-триангуляция, где выполнены все этапы алгоритма образования αβ-триангуляции из произвольной сильно связной триангуляции, кроме оптимизации по условию 3 определения.

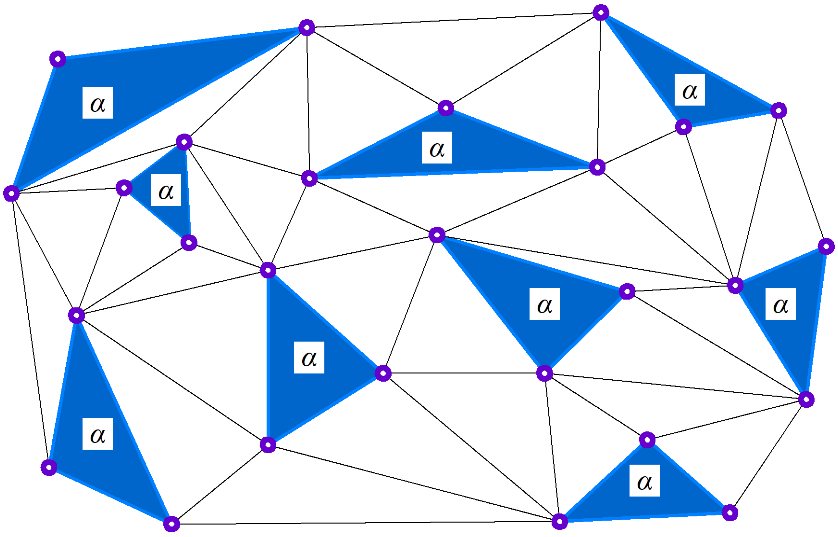

Рис. 1. αβ-триангуляция без выполнения 3 условия определения

Алгоритм рекомбинации β-ребер

Из полученного свойства следует, что для оптимизации β-ребер по критерию минимизации суммы их длин достаточно для каждого внутреннего β-ребра проверить условие его минимальности. Каждому внутреннему ребру смежны две грани. Значит замыкания этих граней образуют комплекс в виде четырехугольника, в котором две диагонали являются конкурирующими по длине.

На рис. 2 взято произвольное внутреннее β-ребро из заданной триангуляции (рис. 1), отмеченное утолщённой красной линией. По выбранному ребру смежны грани β_1 и β_2, выделены зеленым цветом. Их замыкания, в свою очередь, образуют четырехугольник с двумя диагоналями. Вторая диагональ легко обнаруживается как линия, соединяющая вершины четырехугольника неподчиненные выбранному β-ребру, отмечена штриховой красной линией. Производится сравнение длин [5]. Если выбранное ребро короче, комплекс остается без изменений. В противном случае производится флип ребра.

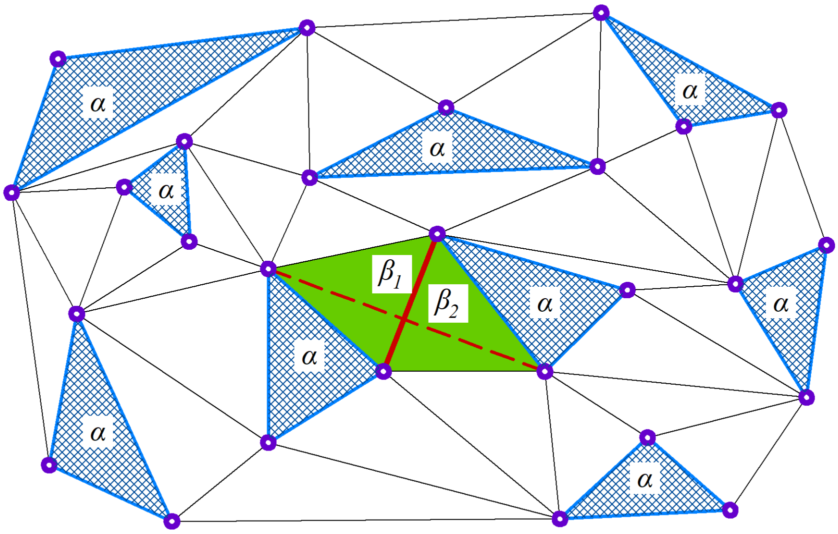

Рис. 2. Алгоритм поиска β-ребер для рекомбинации

Во время выполнения этого алгоритма возникают конструкции, которые противоречат определению триангуляции. Один из таких случаев представлен на рис. 3. Задана триангуляция с двумя α-треугольниками. При проверке ребра AA' в четырехугольнике $AB'A'C'$ диагональ $B'C'$ оказывается короче проверяемой. При выполнении флипа ребра создается два новых треугольника, один из которых совпадает с α-треугольником $A'B'C'$, на другой ($AB'C'$) накладываются оба предыдущих. Соответственно, во избежание таких случаев требуется проверка диагонали на совпадение с α-ребром.

На рис. 4 приведены еще два примера, где при выполнении флипа ребра происходит пересечение β-ребра с α-треугольником. Основываясь на аксиомах принадлежности евклидовой геометрии и непрерывности плоскости легко доказать, что прямая, проходящая через вершину треугольника, пересекает сам треугольник, если она пересекает противолежащую вершине сторону треугольника. Так как у нас β-ребро есть отрезок, соединяющий два α-треугольника, то требуется производить проверку его пересечения с противолежащими α-ребрами дважды, т.е. для каждого α-треугольника.

С возможными нарушениями структуры $T_{\alpha\beta}$ мы разобрались. Теперь следует понять, как осуществить перебор всех внутренних β-ребер? Создадим очередь из них. Будем осуществлять проверку каждого. На рис. 5 (правая часть триангуляции из рис. 1) рассмотрим случай осуществления флипа ребра. Есть ребро BC, которое прошло проверку и в четырехугольнике $CABD$ является наименьшей диагональю. Есть ребро CD, над которым осуществляется проверка. В четырехугольнике $BCFD$ диагональ BF оказывается наикратчайшей, осуществляется флип ребра. Если после перестроения снова проверить ребро BC, то в четырехугольнике $ABFC$ оно окажется длиннее диагонали AF. Получается, если созданная очередь β-ребер будет статична, то мы упускаем некоторое множество β-ребер, требующих перестроения. Эта задача решается, если β-ребра – стороны четырехугольника, в котором произошел флип ребра добавлять в очередь для повторной проверки.

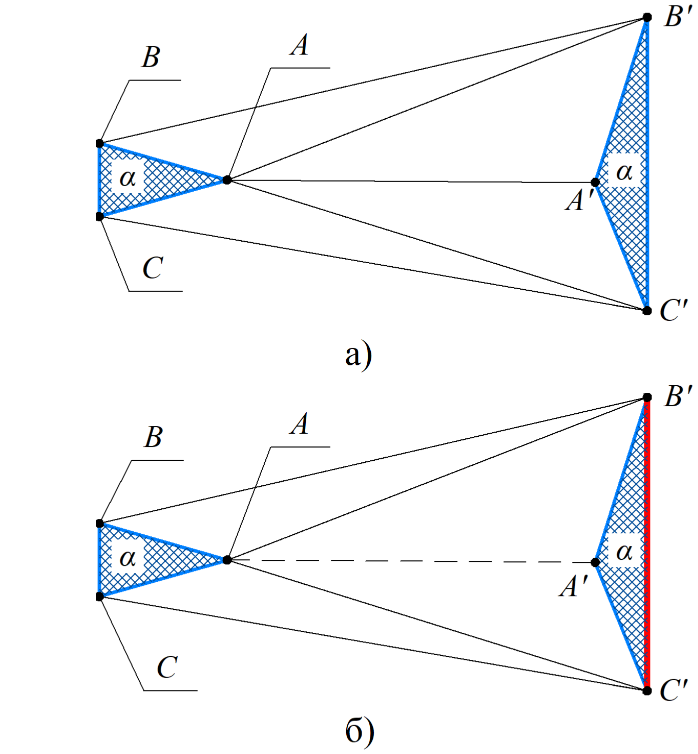

Рис. 3. Пример нарушения, β-ребро совпадает с α-ребром

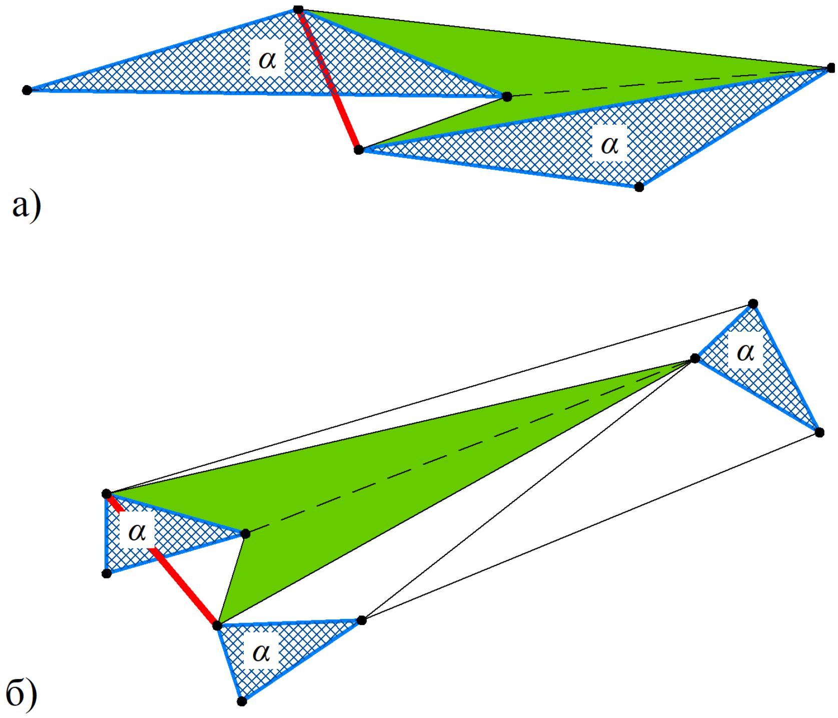

Рис. 4. Примеры нарушения, β-ребро пересекает α-ребро

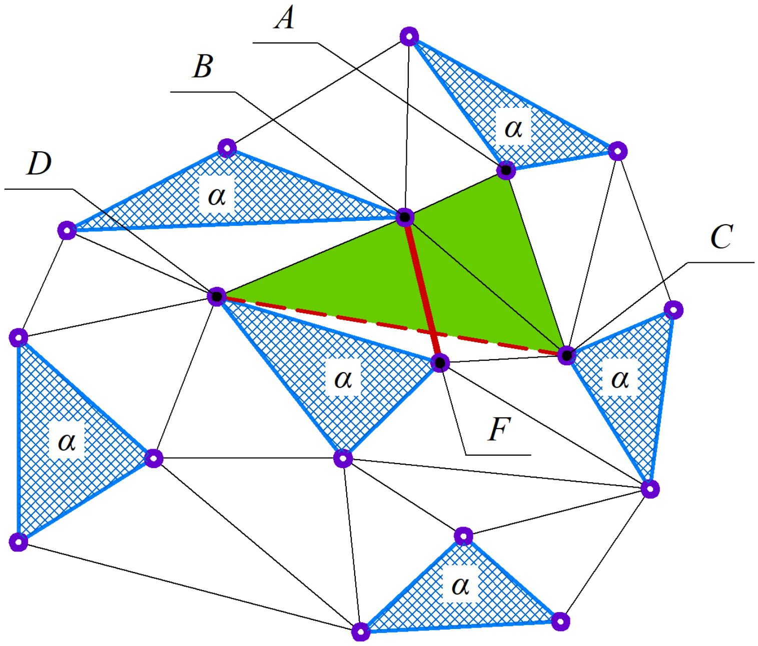

Рис. 5. Алгоритм перебора β-ребер в случае флипа ребра

Результат

Опишем полный алгоритм рекомбинации β-ребер αβ-триангуляции, который является частью алгоритма образования αβ-триангуляции из заданной произвольной триангуляции.

1. Создание очереди (списка) внутренних β-ребер.
2. Проверка β-ребра на минимальность длины в соответствующем четырехугольнике.

2.1. Если проверяемое ребро минимально среди диагоналей:

2.1.1. Если ребро не пересекает α-треугольник:

2.1.1.1. Произвести флип ребра;

2.1.1.2. Вставить в очередь β-стороны вновь образовавшегося четырехугольника.

2.2. Иначе:

2.2.1. Вернуться к пункту 2.

3. Сохранить и завершить программу.

Выводы

В статье описан алгоритм рекомбинации β-ребер для алгоритма образования αβ-триангуляции из заданной произвольной триангуляции на евклидовой плоскости. Найдены возможные коллизии β-ребер с α-треугольниками и определены действия для их решения. Временная сложность полученного алгоритма составляет $O(n)$, где n – число β-ребер триангуляции [6].

Литература

1. Лебединская Н.А. Преобразование триангуляций при помощи элементарных операций [Текст] / Н.А. Лебединская, Д.М. Лебединский // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2009. – № 1. – С. 84-86.
2. Рустамян В.В. Анализ топологии полиэдров в задаче аппроксимации замкнутых поверхностей полиэдрами с группами конгруэнтных граней [Текст] / В.В. Рустамян // GraphiCon 2024: Материалы 34-й Международной конференции по компьютерной графике и машинному зрению, Омск, 17–19 сентября 2024 года. – Омск: Омский государственный технический университет, 2024. – С. 827-836. – DOI 10.25206/978-5-8149-3873-2-2024-827-836.
3. Рустамян В.В. Анализ основных параметров генетического алгоритма при решении задачи аппроксимации замкнутых поверхностей свободной формы полиэдрами с группами

конгруэнтных треугольников [Текст] / В.В. Рустамян // Геометрия и графика. – 2024. – Т. 12, № 2. – С. 13-25. – DOI 10.12737/2308-4898-2024-12-3-13-25.

4. Рустамян В.В. αβ-триангуляция на евклидовой плоскости [Текст] / В.В. Рустамян // Геометрия и графика. 2025. Т. 13. № 1. С. 15-25. DOI: 10.12737/2308-4898-2025-13-1-15-25.
5. Сальков Н.А. Определение расстояний между геометрическими фигурами интерактивным методом [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. – 2024. – Т. 12, № 4. – С. 3-14. – DOI 10.12737/2308-4898-2024-12-4-3-14.
6. Скворцов А.В., Мирза Н.С. Алгоритмы построения и анализа триангуляции. — Томск: Изд-во Томского университета, 2006. – 168 с. – ISBN 5-7511-2028-0.
7. Liu Y., Lee T.-U., Rezaee Javan A., Pietroni N., Xie Y. Reducing the Number of Different Faces in Free-Form Surface Approximations Through Clustering and Optimization. // Computer-Aided Design. 2023. 166. 103633. 10.1016/j.cad.2023.103633.
8. Pellis D., Kilian M., Wang H., Jiang C., Müller C., Pottmann H. Architectural freeform surfaces designed for cost-effective paneling through mold re-use. // Conference: Advances in Architectural Geometry. 2021.