Расширенное исследование степенных фракталов Жюлиа-Мандельброта с позиции многомерной геометрии

Extended study of algebraic fractals Julia-Mandelbrot from the perspective of multidimensional assessment

Бойков А.А.
Старший преподаватель кафедры «Инженерная графика», ФГБОУ ВО «МИРЭА - Российский технологический университет», г. Москва
e-mail: albophx@mail.ru

Boykov A.A.
Senior lecturer of department of engineering graphics, MIREA – Russian Technological University, Moscow
e-mail: albophx@mail.ru

Горяная В.С.
Студентка, ФГБОУ ВО «МИРЭА - Российский технологический университет», г. Москва
e-mail: wertyyuq@yandex.ru

Gorjanaja V.C.
Student, MIREA – Russian Technological University, Moscow
e-mail: wertyyuq@yandex.ru

Аннотация
В статье представлены результаты студенческой научной работы, которые могут представлять интерес для исследователей в области алгебраических фракталов, а также разработчиков программ для графического и предметного дизайна. С позиции многомерной геометрии исследованы степенные фракталы Жюлиа-Мандельброта различных степеней.
Ключевые слова: алгебраические фракталы, множество Мандельброта, множество Жюлиа.

Abstract
The article presents the results of a student research work that may be of interest to researchers in the field of algebraic fractals, along with developers of software for graphic and industrial design. Power fractals of Julia-Mandelbrot of various orders are studied from the perspective of multidimensional geometry.
Keywords: algebraic fractals, Mandelbrot set, Julia set.

Введение

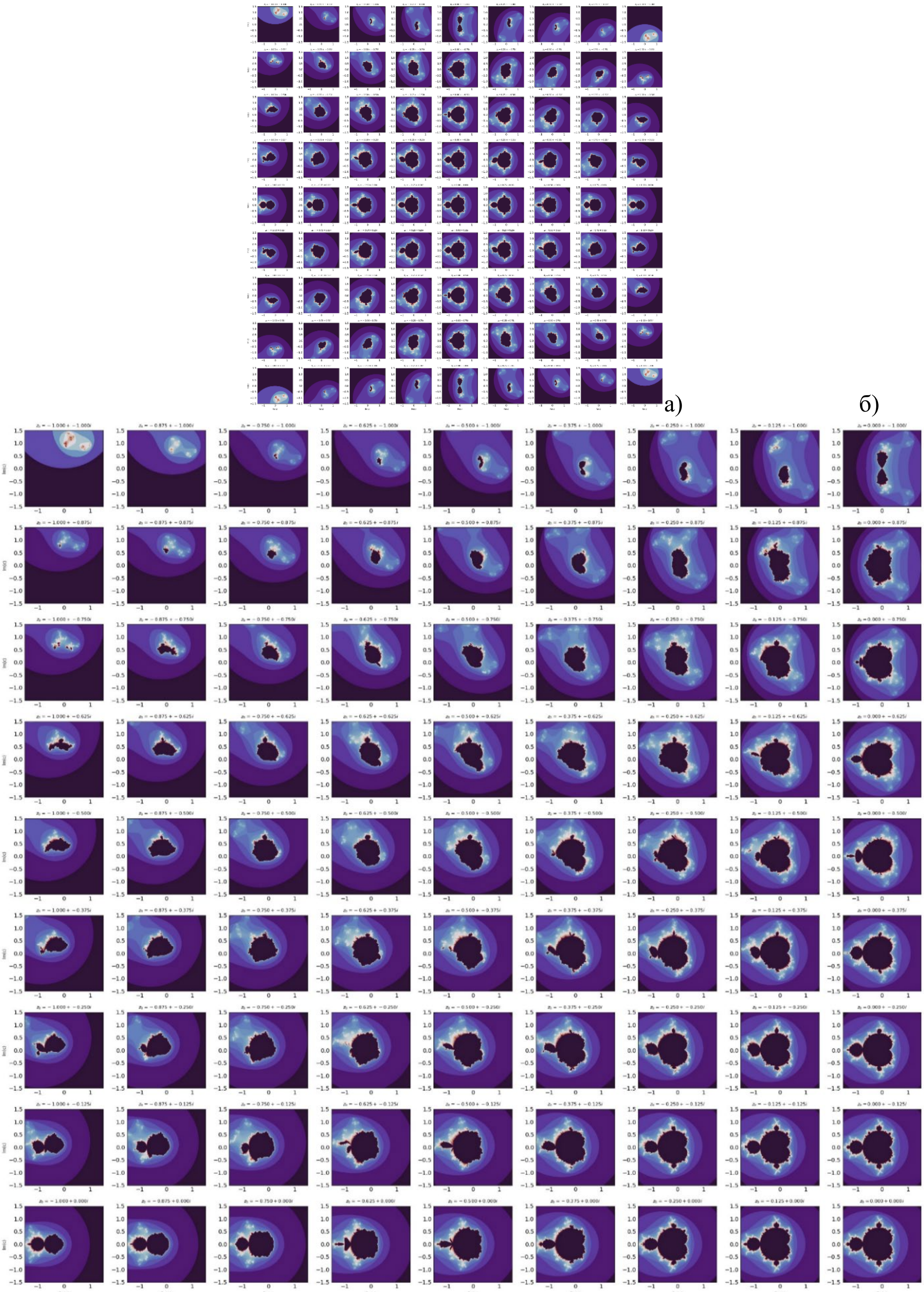
В работах [1, 2, 3] было предложено для фракталов типа множества Мандельброта (ФМ) строить серию изображений соответствующих фракталов Жюлиа (ФЖ) и, кроме того, в соответствии с многомерным подходом, где ФМ и ФЖ получаются рассечением многомерного фрактального объекта (гиперфрактала) сечениями плоскостей уровня, параллельных разным базовым плоскостям, строить серию изображений ФМ.

В настоящем исследовании предложенная методика применена к степенным фракталам Жюлиа-Мандельброта степеней 2–7. Ниже представлены полученные серии изображений.

1. Фрактал Жюлиа-Мандельброта 2-й степени

Итерационная формула – $F(z) = z^2 + c$.

Для ФМ (рис. 1.1,а) значение Z_0 менялось в диапазоне от $-1 - i$ до $1 + i$ с шагом 1/4. Значение C принадлежало отрезку $[-1.5 - 1.5i;\ 1.5 + 1.5i]$.



а) б)

Рис. 1.1. Фракталы Мандельброта второй степени для разных значений Z_0

В таблице изображений ФМ наблюдается центральная симметричность. Так, например, из рис. 1.1,а видно, что фракталы для $Z_0=+1-0.5i$ и $Z_0=-1+0.5i$ – одинаковы, и симметричны фракталам для $Z_0=+1+0.5i$ и $Z_0=-1-0.5i$. Все фракталы, кроме размещенных в центральной строке ($Z_0=a+0i$) и столбце ($Z_0=0+ai$), ассиметричны. Фракталы центральной строки – горизонтально симметричны, центрального столбца – вертикально симметричны.

Поэтому дополнительно была построена четверть ФМ (рис. 1.1,б) диапазон Z_0 от $-1 - i$ до 0 с шагом 1/8, $C \in [-1.5 - 1.5i; 1.5 + 1.5i]$.

Для ФЖ (рис. 1.2) значение C менялось в диапазоне от $-1-i$ до $1+i$ с шагом 1/4. Значение Z принадлежало отрезку $[-1.5-1.5i; 1.5+1.5i]$.

Построенные изображения, в целом, соответствуют результатам, полученным в предыдущих работах [2, 3], что подтверждает корректность созданной программной системы и позволяет перейти к построению фрактальных изображений менее изученных фракталов других степеней.

2. Фрактал Жюлиа-Мандельброта 3-й степени

Итерационная формула – $F(z) = z^3 + c$.

Для ФМ (рис. 2.1,а) значение Z_0 менялось в диапазоне от $-1 - i$ до $1 + i$ с шагом 1/4.

Значение C принадлежало отрезку $[-1.5 - 1.5i; 1.5 + 1.5i]$.

Для ФЖ (рис. 2.2,а) значение C менялось в диапазоне от $-1 - i$ до $1 + i$ с шагом 1/4. Значение Z принадлежало отрезку $[-1.5 - 1.5i; 1.5 + 1.5i]$.

Ввиду симметричности полученного множества были дополнительно построены четверть ФМ (рис. 2.1,б, диапазон Z_0 от $-1 - i$ до 0 с шагом 1/8, $C \in [-1.5 - 1.5i; 1.5 + 1.5i]$.) и ФЖ (рис. 2.2,б, диапазон C от $-1 - i$ до 0 с шагом 1/8, $Z \in [-1.5 - 1.5i; 1.5 + 1.5i]$).

3. Фрактал Жюлиа-Мандельброта 4-й степени

Итерационная формула – $F(z) = z^4 + c$.

Для ФМ (рис. 3.1) значение Z_0 менялось в диапазоне от $-1 - i$ до $1 + i$ с шагом 1/4.

Значение C принадлежало отрезку $[-1.5 - 1.5i; 1.5 + 1.5i]$.

Для ФЖ (рис. 3.2) значение C менялось в диапазоне от $-1 - i$ до $1 + i$ с шагом 1/4. Значение Z принадлежало отрезку $[-1.5 - 1.5i; 1.5 + 1.5i]$.

Ввиду симметричности изображений ФМ дополнительно была построена четверть ФМ (рис. 3.1,б) диапазон Z_0 от $-1 - i$ до 0 с шагом 1/8, $C \in [-1.5 - 1.5i; 1.5 + 1.5i]$.

В действительности, ввиду наличия трехлучевой симметрии в главном ФМ (рис. 3.2,б), оригинальные изображения ФЖ следует искать лишь в одном из шести соответствующих отсеков ФМ.

4. Фрактал Жюлиа-Мандельброта 5-й степени

Итерационная формула – $F(z) = z^5 + c$.

Для ФМ (рис. 4.1,а) значение Z_0 менялось в диапазоне от $-1 - i$ до $1 + i$ с шагом 1/4.

Значение C принадлежало отрезку $[-1.5 - 1.5i; 1.5 + 1.5i]$.

Для ФЖ (рис. 4.2,а) значение C менялось в диапазоне от $-1 - i$ до $1 + i$ с шагом 1/4. Значение Z принадлежало отрезку $[-1.5 - 1.5i; 1.5 + 1.5i]$.

Ввиду симметричности полученного множества были дополнительно построены четверть ФМ (рис. 4.1,б, диапазон Z_0 от $-1 - i$ до 0 с шагом 1/8, $C \in [-1.5 - 1.5i; 1.5 + 1.5i]$.) и ФЖ (рис. 4.2,б, диапазон C от $-1 - i$ до 0 с шагом 1/8, $Z \in [-1.5 - 1.5i; 1.5 + 1.5i]$).

В действительности, ввиду наличия четырехлучевой симметрии в главном ФМ (рис. 7,а) оригинальные изображения ФЖ следует искать лишь в одном из восьми соответствующих отсеков ФМ.

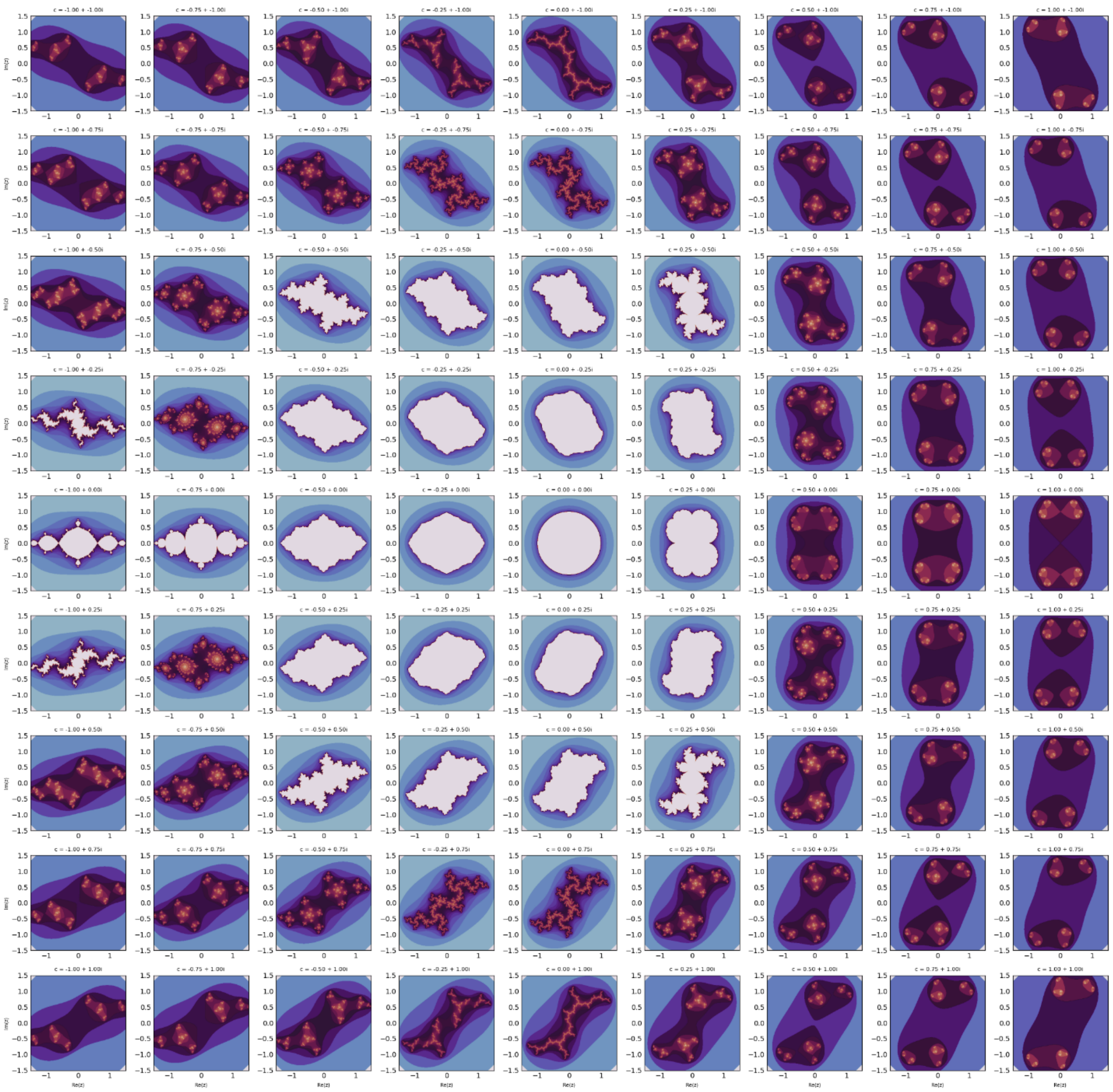


Рис. 1.2. Фракталы Жюлиа второй степени для разных значений C_0

5. Фрактал Жюлиа-Мандельброта 6-й степени

Итерационная формула – $F(z) = z^6 + c$.

Для ФМ (рис. 5.1) значение Z_0 менялось в диапазоне от $-1 - i$ до $1 + i$ с шагом 1/4.

Значение C принадлежало отрезку $[-1.5 - 1.5i;\ 1.5 + 1.5i]$.

Для ФЖ (рис. 5.2) значение C менялось в диапазоне от $-1 - i$ до $1 + i$ с шагом 1/4. Значение Z принадлежало отрезку $[-1.5 - 1.5i;\ 1.5 + 1.5i]$.

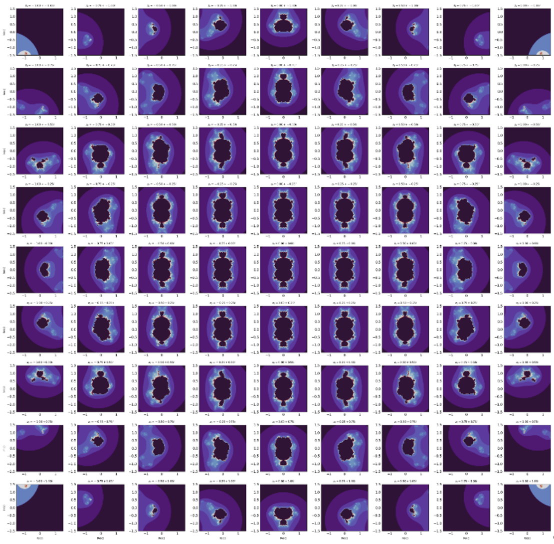
Ввиду симметричности изображений ФМ была дополнительно построена четверть ФМ (рис. 5.1,б) диапазон Z_0 от $-1 - i$ до 0 с шагом 1/8, $C \in [-1.5 - 1.5i;\ 1.5 + 1.5i]$.

В действительности, ввиду наличия пятилучевой симметрии в главном ФМ (рис. 7,б) оригинальные изображения ФЖ следует искать лишь в одном из десяти соответствующих отсеков ФМ.

6. Фрактал Жюлиа-Мандельброта 7-й степени

Итерационная формула – $F(z) = z^7 + c$.

Для ФМ (рис. 4.1,а) значение Z_0 менялось в диапазоне от $-1 - i$ до $1 + i$ с шагом 1/4.



а) б)

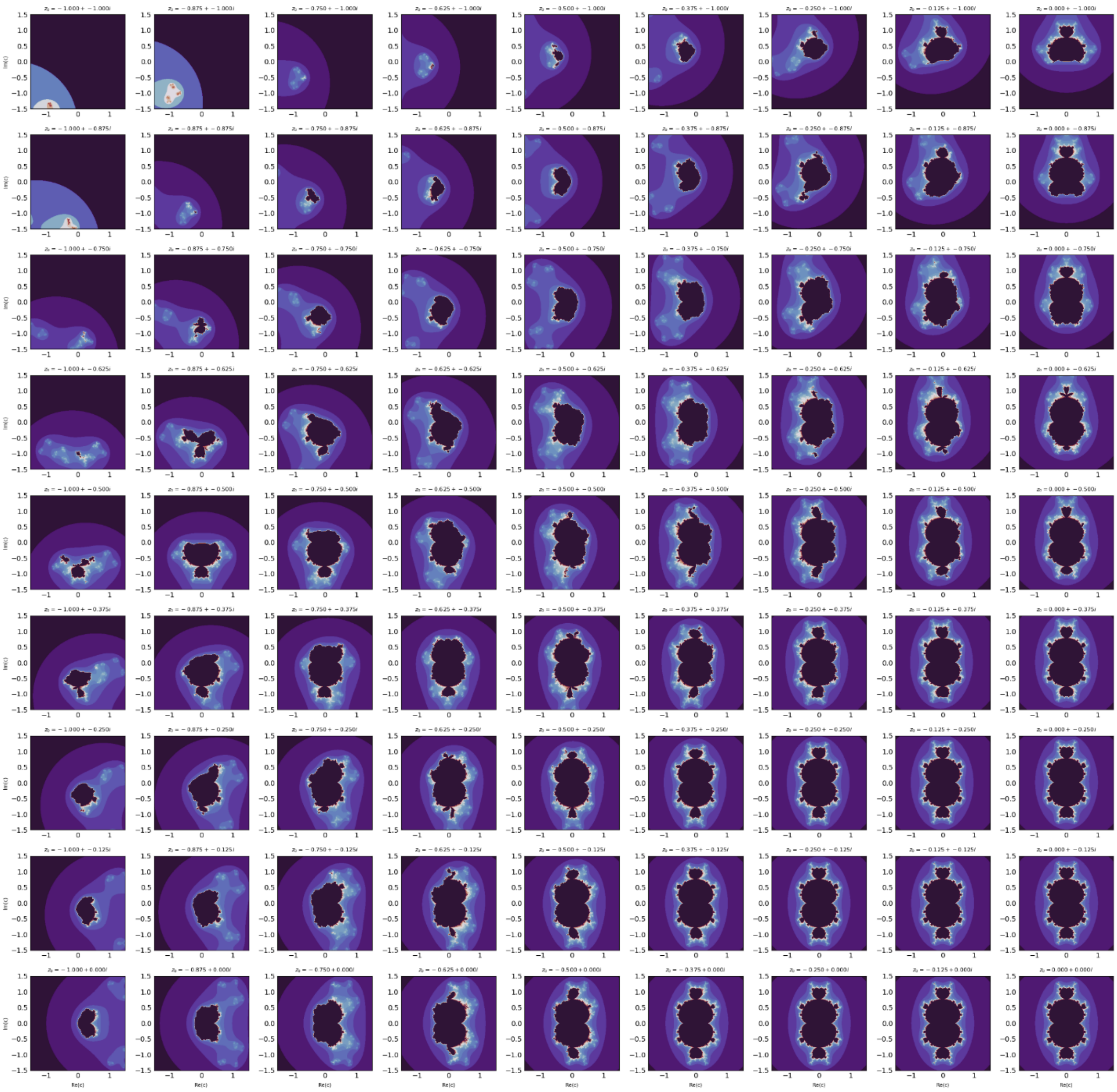
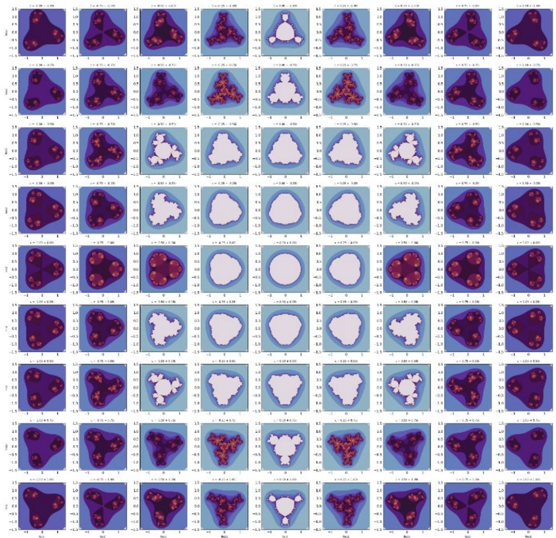


Рис. 2.1. Фракталы Мандельброта третьей степени для разных значений Z_0



а)

б)

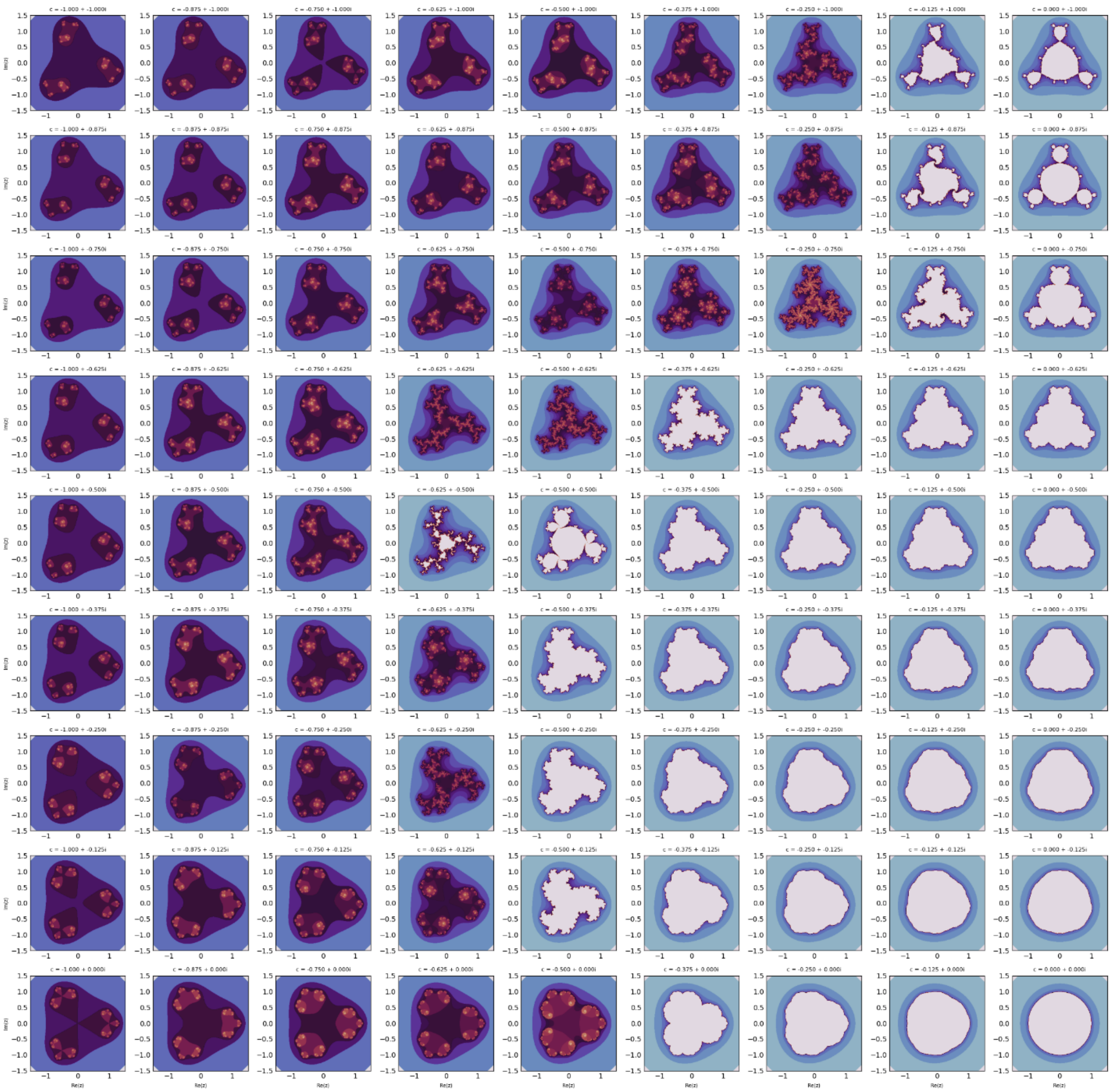
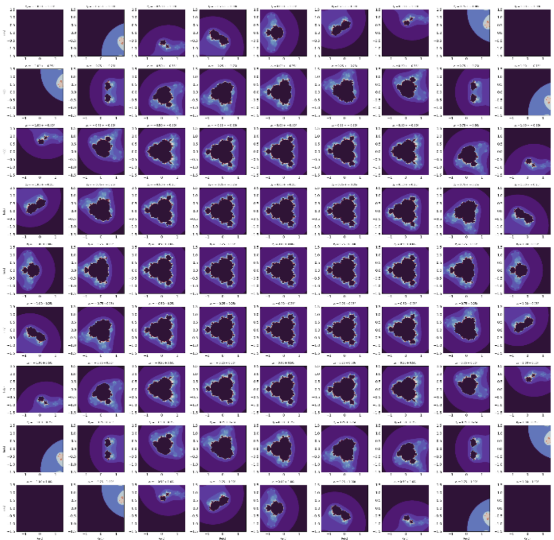


Рис. 2.2. Фракталы Жюлиа третьей степени для разных значений Z_0



а)

б)

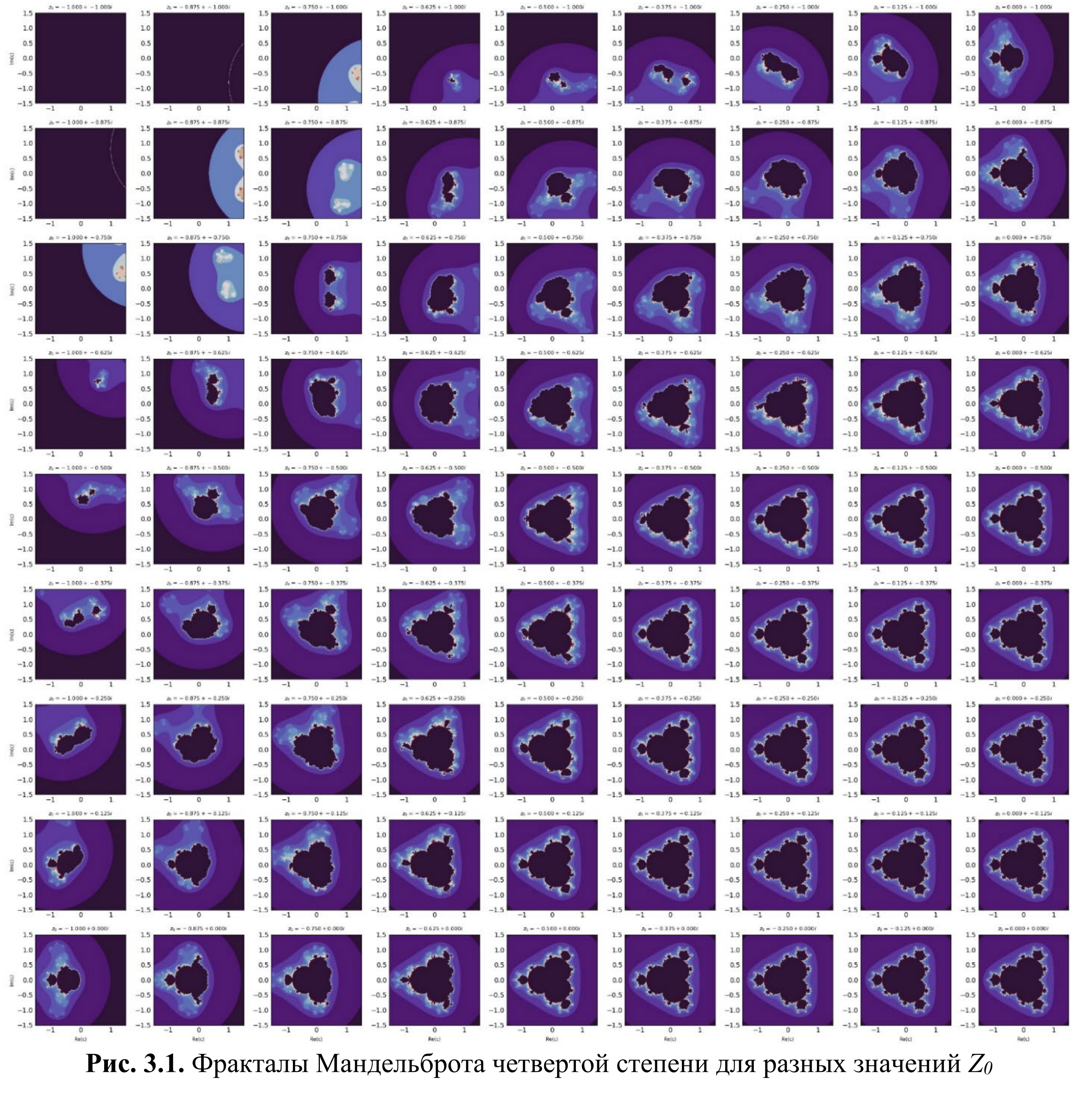


Рис. 3.1. Фракталы Мандельброта четвертой степени для разных значений Z_0

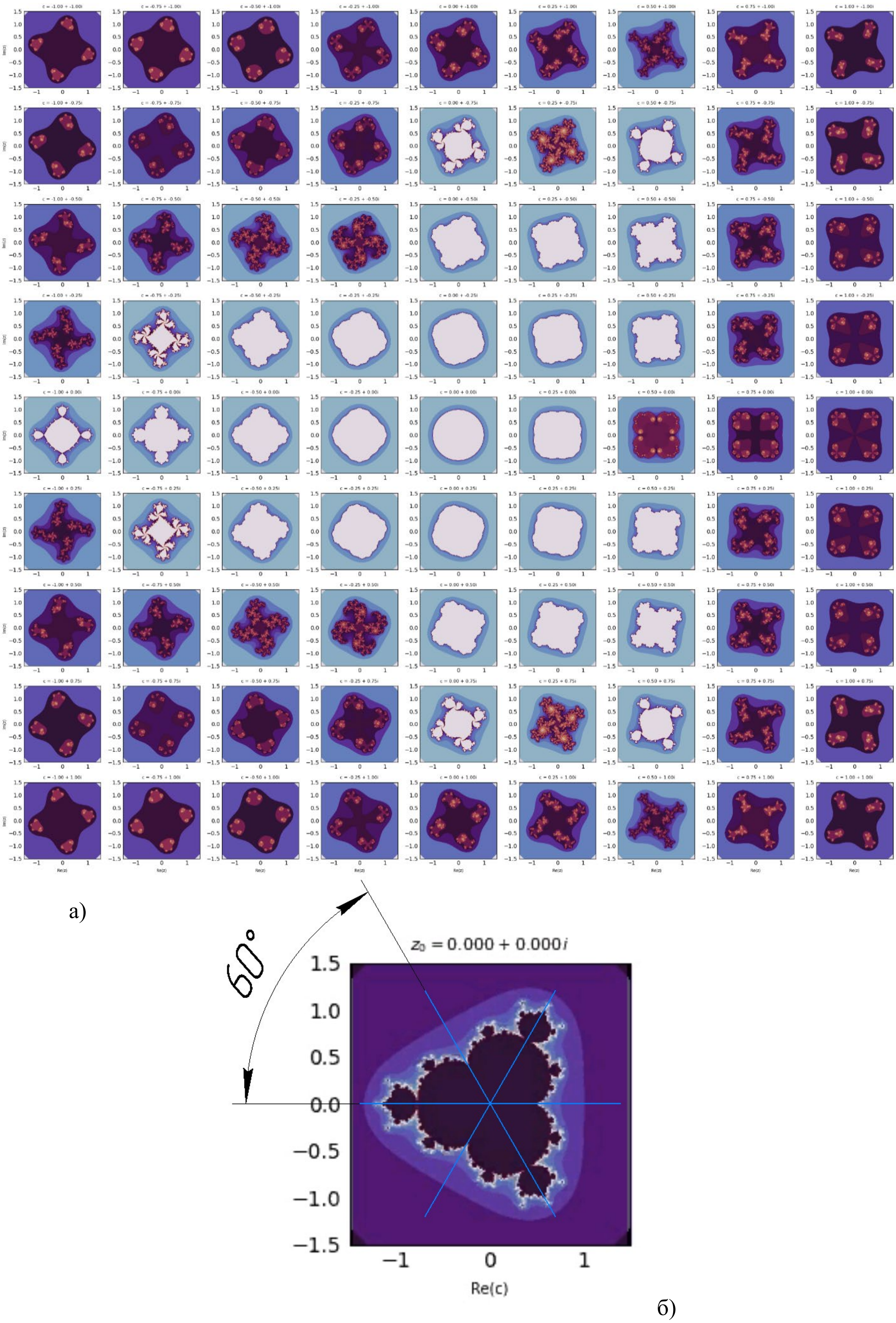
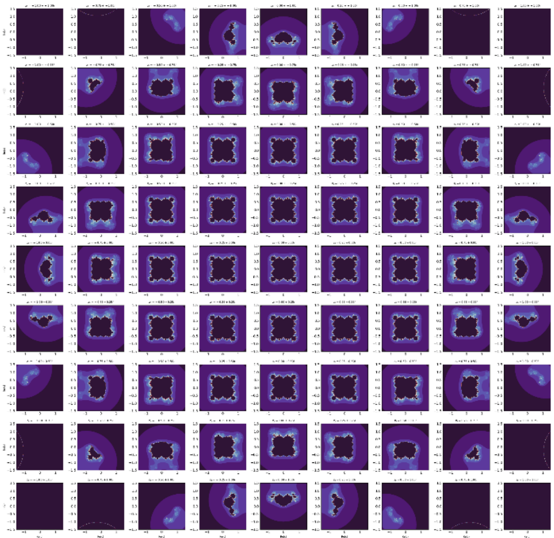


Рис. 3.2. Фракталы Жюлиа четвертой степени для разных значений Z_0



а)

б)

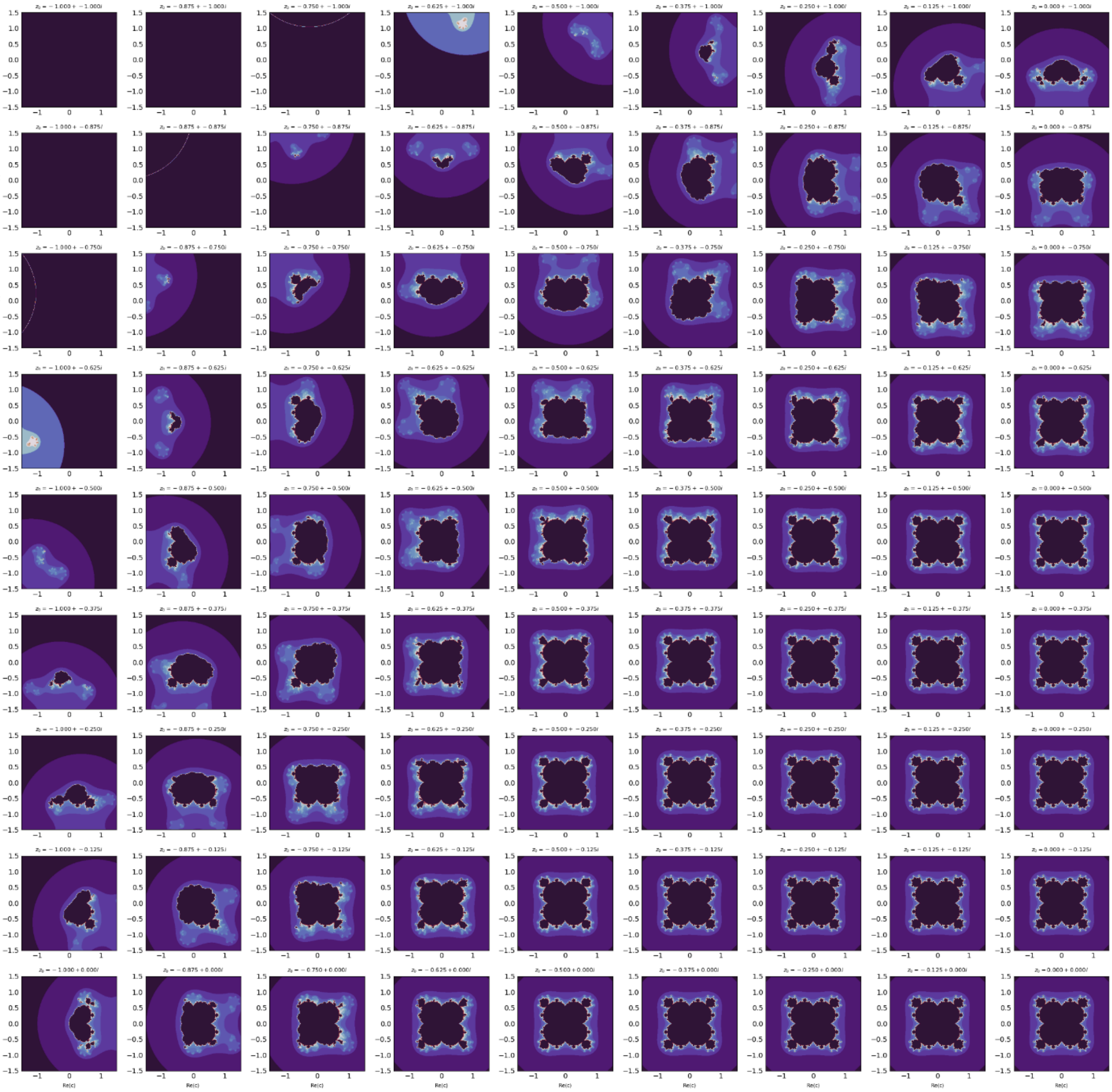
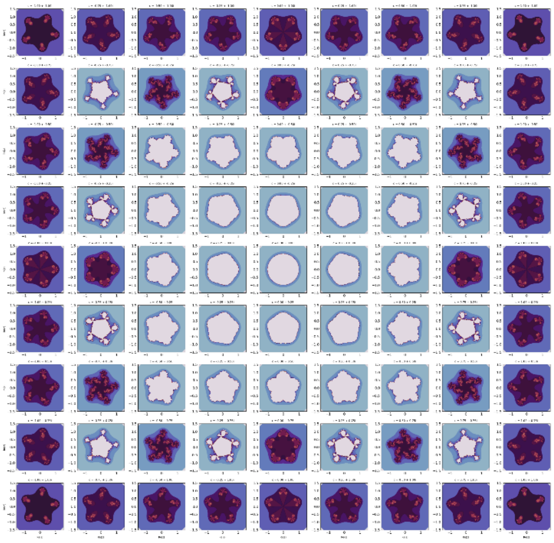


Рис. 4.1. Фракталы Мандельброта пятой степени для разных значений Z_0



а)

б)

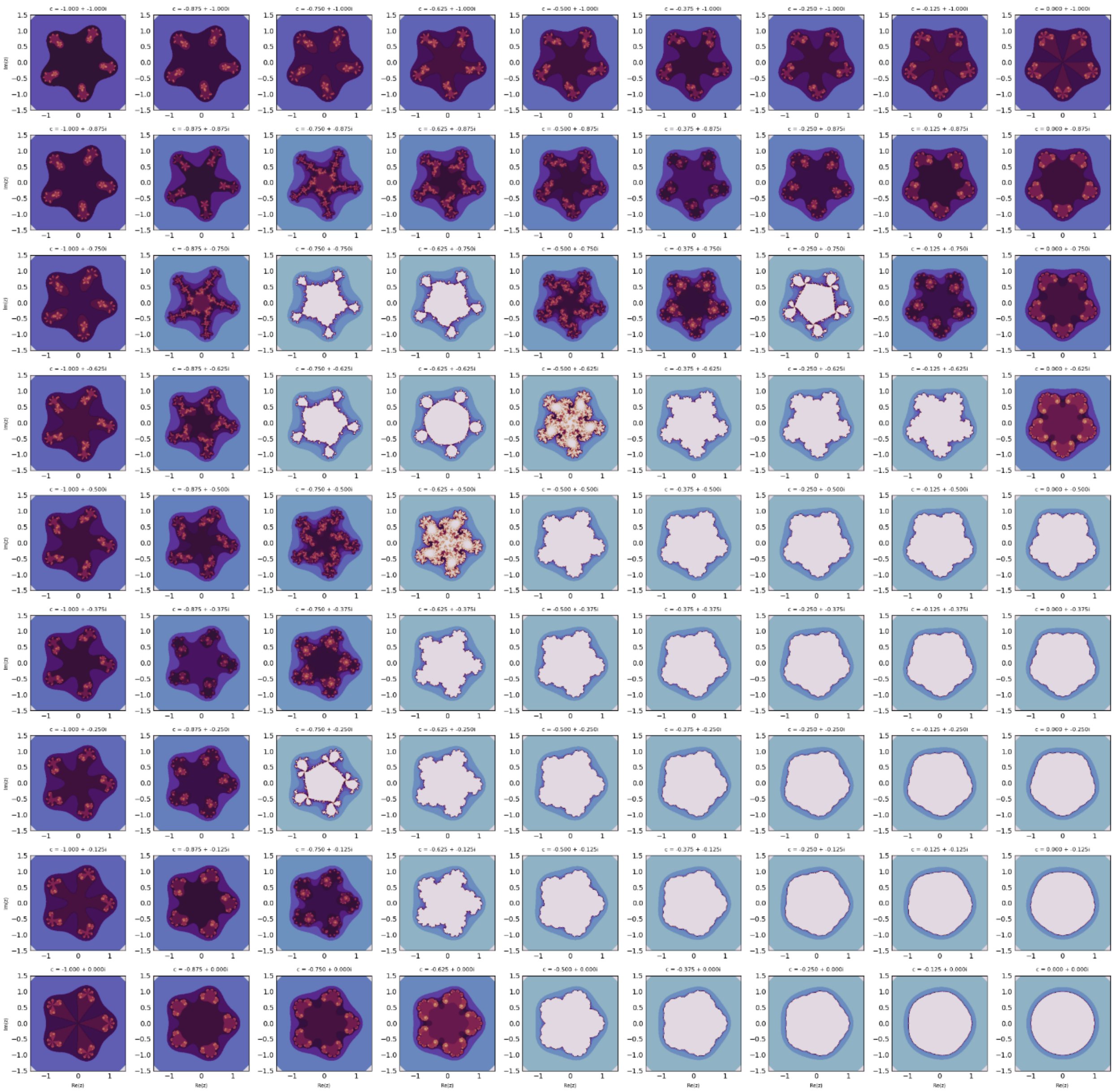
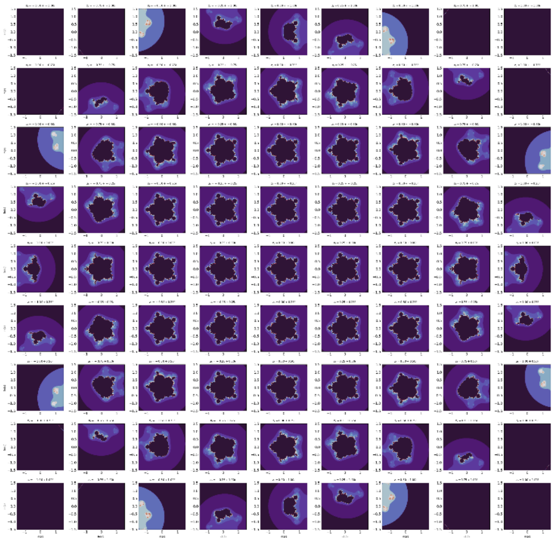


Рис. 4.2. Фракталы Жюлиа пятой степени для разных значений Z_0



а)

б)

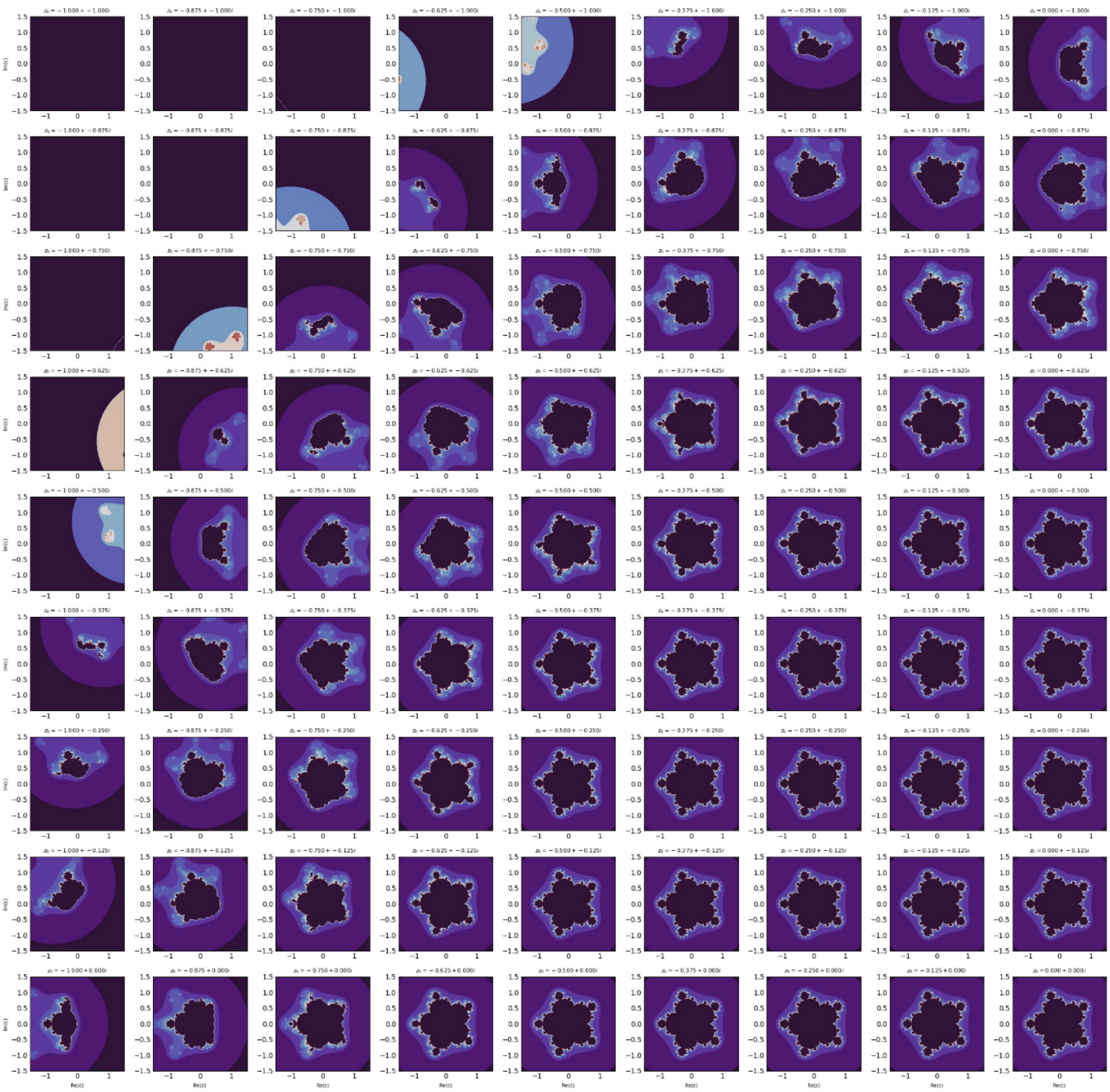


Рис. 5.1. Фракталы Мандельброта шестой степени для разных значений Z_0

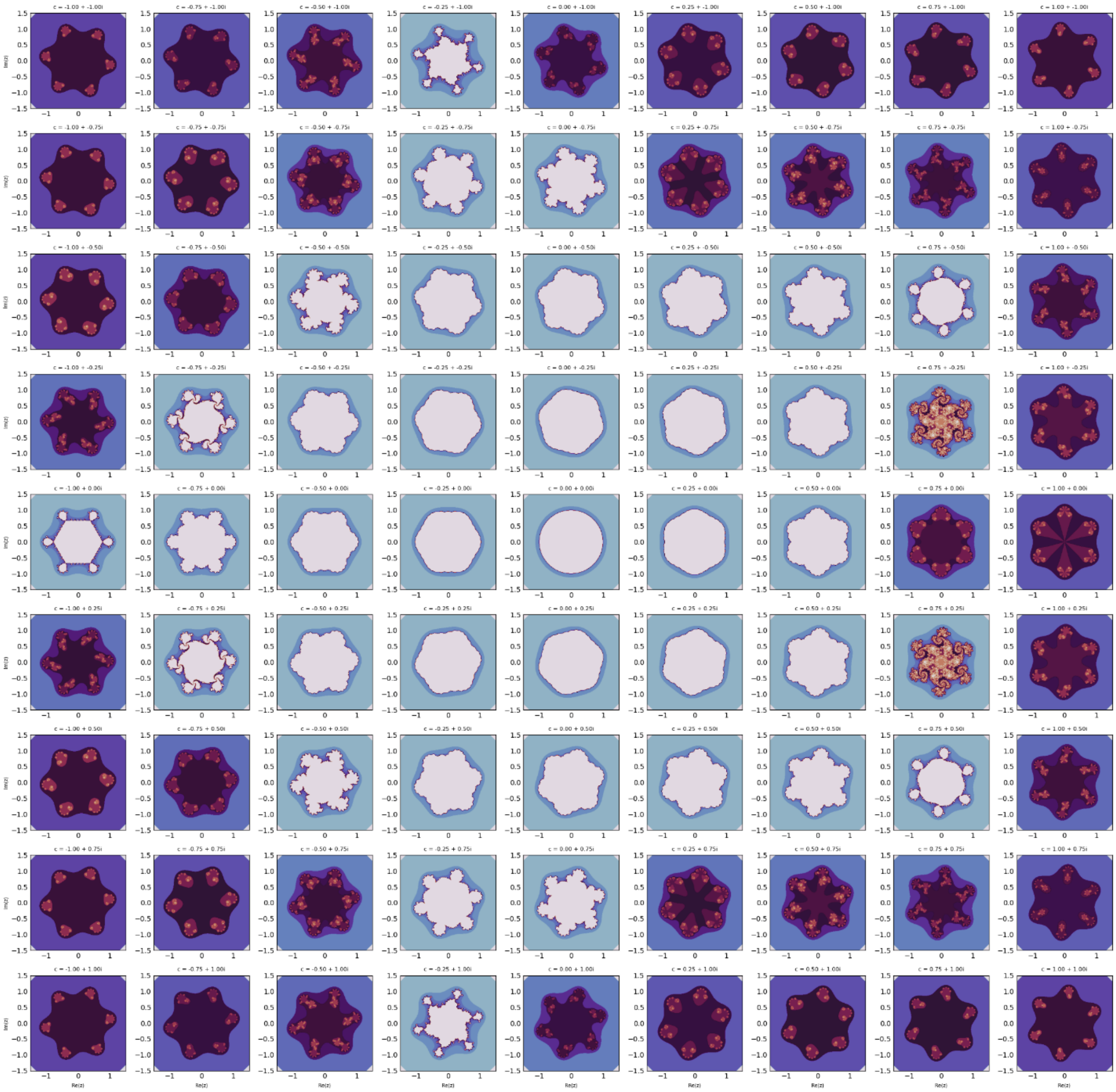


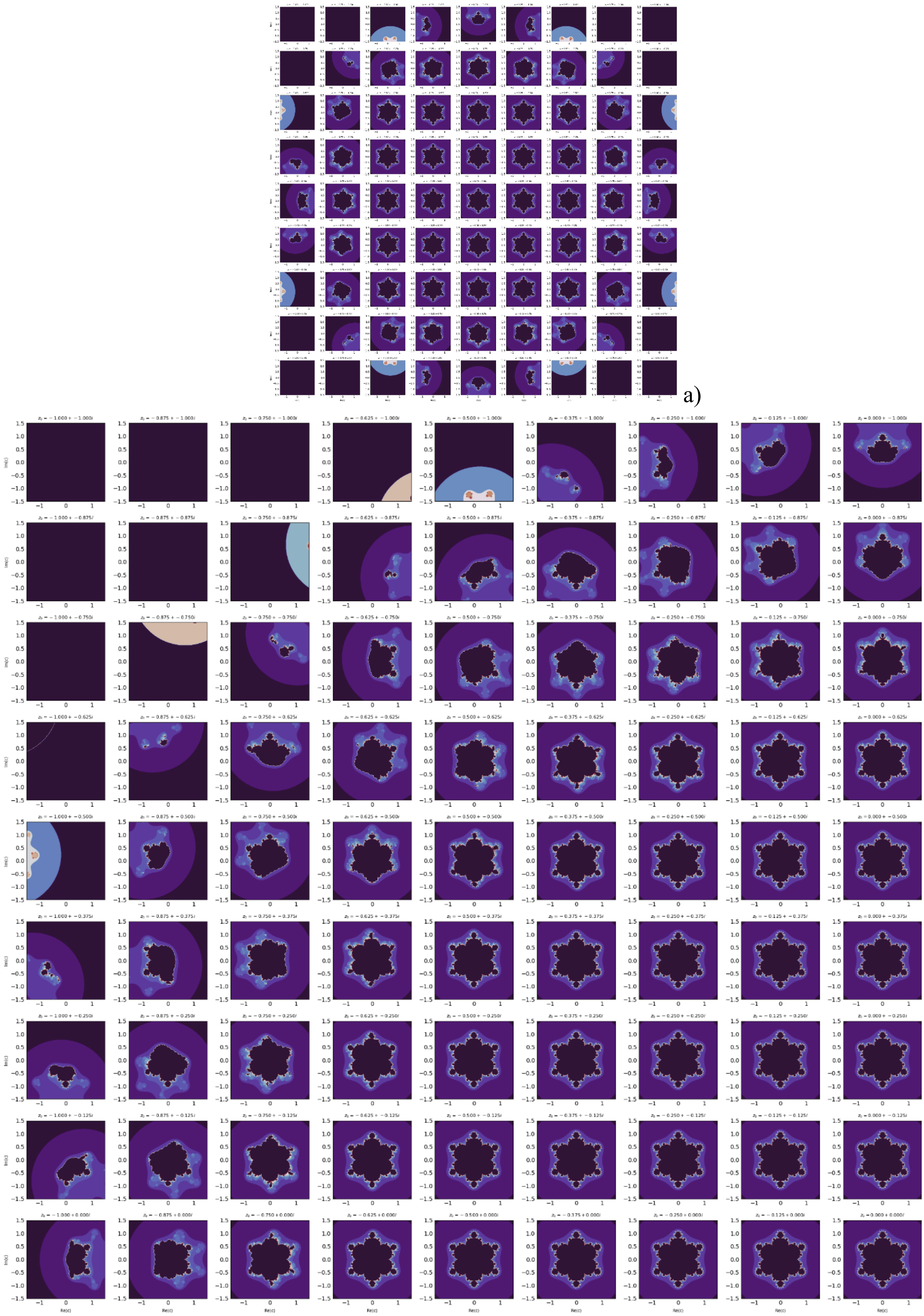
Рис. 5.2. Фракталы Жюлиа шестой степени для разных значений Z_0

Значение C принадлежало отрезку $[-1.5 - 1.5i;\ 1.5 + 1.5i]$.

Для ФЖ (рис. 4.2,а) значение C менялось в диапазоне от $-1 - i$ до $1 + i$ с шагом 1/4. Значение Z принадлежало отрезку $[-1.5 - 1.5i;\ 1.5 + 1.5i]$.

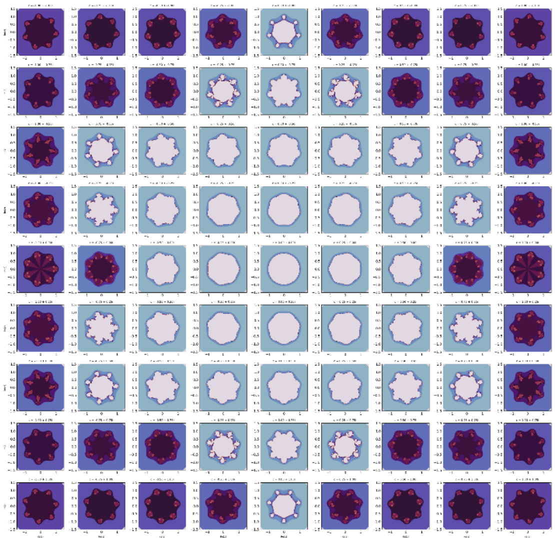
Ввиду симметричности полученного множества были дополнительно построены четверть ФМ (рис. 4.1,б, диапазон Z_0 от $-1 - i$ до 0 с шагом 1/8, $C \in [-1.5 - 1.5i;\ 1.5 + 1.5i]$.) и ФЖ (рис. 4.2,б, диапазон C от $-1 - i$ до 0 с шагом 1/8, $Z \in [-1.5 - 1.5i;\ 1.5 + 1.5i]$).

В действительности, ввиду наличия шестилучевой симметрии в главном ФМ (рис. 7,в) оригинальные изображения ФЖ следует искать лишь в одном из двенадцати соответствующих отсеков ФМ.

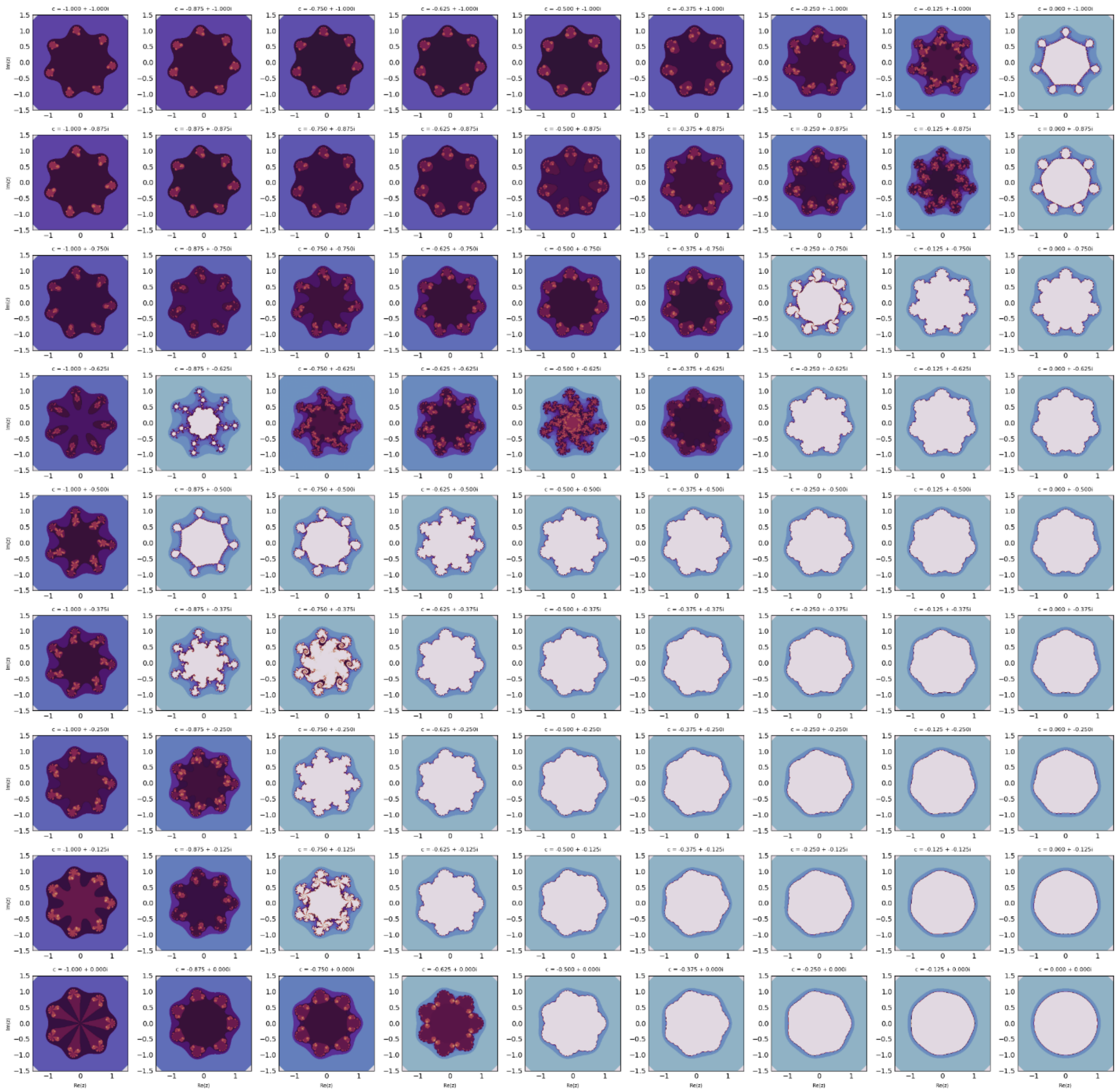


а) б)

Рис. 6.1. Фракталы Мандельброта седьмой степени для разных значений Z_0

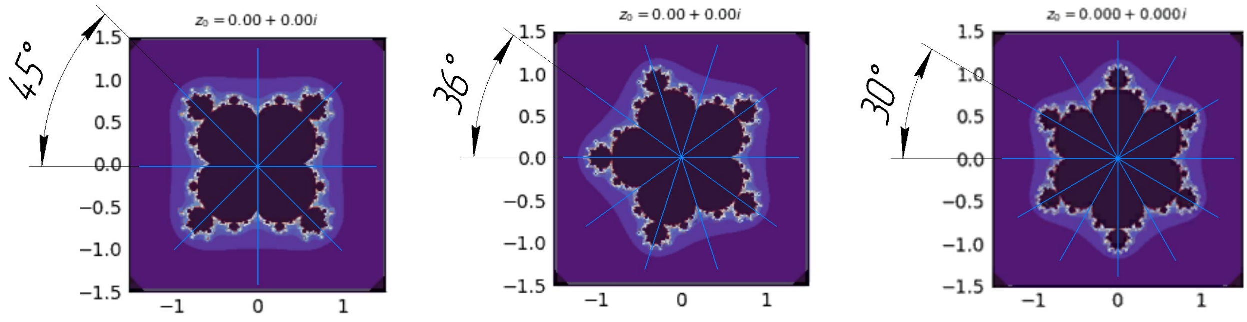


а)



б)

Рис. 6.2. Фракталы Жюлиа седьмой степени для разных значений Z_0



а) б) в)

Рис. 7. Лучевая симметрия базовых степенных ФМ

Заключение и выводы

Данная студенческая работа проводилась в соответствии с практико-ориентированной методикой, которая подробно излагается в работах [4, 5, 6].

В таблицах изображений степенных ФМ наблюдается центральная симметричность. Так, например, из таблиц (рис. 1.1, 2.1, 3.1 и т.д.) видно, что фракталы для $Z_0=+1-0.5i$ и $Z_0=-1+0.5i$ – одинаковы, и симметричны фракталам для $Z_0=+1+0.5i$ и $Z_0=-1-0.5i$. Все фракталы, кроме размещенных в центральной строке ($Z_0=a+0i$) и столбце ($Z_0=0+ai$), ассиметричны. Фракталы центральной строки – горизонтально симметричны, центрального столбца – вертикально симметричны. Лучевая симметрия, имеющаяся в базовых ФМ разных целых степеней, не повторяется для значений Z_0, кроме $0+0i$. Лучевая симметрия, имеющаяся в ФЖ, сохраняется для разных начальных значений C_0.

В работе были получены массивы фрактальных изображений для степеней 2–7, что позволяет легко произвести их оценку «в целом», в частности, делая выбор образа для задач дизайна. Указаны области базовых ФМ для степеней 4–7, в которых требуется построение ФЖ при создании атласов [7].

Всю построенную совокупность можно рассматривать как изображения гиперфрактала 5 порядка, если показатель степени считать отдельным свободным действительным параметром *m* (если *m* – комплексное число, гиперфрактал будет иметь 6 порядок)

$$F(z) = z^m + c$$

В этом случае миниатюры ФМ или ФЖ с одинаковой позицией в соответствующих таблицах представляют собой цепочку сечений (томограмм) обобщенного степенного гиперфрактала Жюлиа-Мандельброта параллельными плоскостями, которые отличаются только одной координатой. В этом смысле проведенное исследование продолжает и дополняет исследование [8]. Представляет интерес дополнение полученных в настоящей работе результатов исследованием обобщенного степенного гиперфрактала Жюлиа-Мандельброта для дробных и комплексных степеней.

Литература

1. Бойков А.А., Орлова Е.В., Чернова А.В., Шкилевич А.А. О создании фрактальных образов для дизайна и полиграфии и некоторых геометрических обобщениях, связанных с ними // Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации. Материалы VIII Международной научно-практической интернет-конференции, февраль – март 2019 г. – Пермь: ПНИПУ, 2019. – С. 325–339.
2. Бойков А.А., Ефремов А.В., Рустамян В.В. О студенческой научно-исследовательской работе на геометро-графических кафедрах // Геометрия и графика. 2023. №. 4. С. 61-75. DOI: 10.12737/2308-4898-2024-11-4-61-75.
3. Вышнепольский В.И., Бойков А.А., Егиазарян К.Т., Кадыкова Н.С. Методическая система проведения занятий на кафедре «Инженерная графика» РТУ МИРЭА // Геометрия и графика. 2023. №. 1. С. 23-34. DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-23-34.

4. Вышнепольский В.И., Бойков А.А., Егиазарян К.Т., Ефремов А.В. Научно-исследовательская работа на кафедре «Инженерная графика» РТУ МИРЭА // Геометрия и графика. 2023. №. 1. С. 70-85. DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-70-85.
5. Бойков А.А., Бойкова Н.А. О создании атласа гиперфрактала // Визуальная культура. Искусство. Дизайн. Медиатехнологии: материалы XXIII Всерос. науч.-практ. конф. (Омск, 15 мая 2024 г.). – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2024. – 1 CD-ROM (12,4 Мб). – С. 26–33.
6. Лабуть А. Снова о многомерности множества Мандельброта–Жюлиа [Электронный ресурс]. – URL: http://www.sciteclibrary.ru/texsts/rus/stat/st2526.htm. – Загл. с экрана (Дата обращения: 23.06.2025).
7. Орлова Е.В., Чернова А.В. Исследование алгебраических фракталов с позиции многомерной геометрии // Журнал естественнонаучных исследований. 2024. Т.9, №4. С. 64–71.
8. Шкилевич А.А. К исследованию фрактальных образов множеств Жулиа-Мандельброта // Журнал естественнонаучных исследований. 2024. Т. 9, №2. С. 31–37.