Исследование алгебраических фракталов с позиции многомерной геометрии

Study of algebraic fractals from the perspective of multidimensional assessment

Орлова Е.В.
главный инженер по разработке ПАО «Сбербанк»
e-mail: kate.orlova.37@gmail.com

Чернова А.В.
ведущий инженер-тестировщик ГК «Иннотех»
e-mail: nstchernova@yandex.ru

Аннотация
В статье представлены результаты студенческой научной работы, которые могут представлять интерес для исследователей в области алгебраических фракталов, а также разработчиков программ для графического и предметного дизайна. С позиции многомерной геометрии исследованы некоторые известные и предложены новые фрактальные формулы.
Ключевые слова: алгебраические фракталы, множество Мандельброта, множество Жулиа.

Abstract
The article presents the results of student scientific work, which may be of interest to researchers in the field of algebraic fractals, as well as graphic and object design software developers. From the perspective of multidimensional geometry, some well-known fractal formulas are studied and new ones are proposed.
Keywords: algebraic fractals, Mandelbrot set, Julia set.

Введение

Результаты, представленные в настоящей статье, были получены в 2018–2020 гг. в рамках студенческой научной работы в ИГЭУ [6]. Некоторые результаты впоследствии были опубликованы в докладе. Тем не менее, многие из полученных результатов до сих пор сохраняют оригинальность и могут представлять интерес для исследователей алгебраических фракталов и разработчиков в области графического и предметного дизайна.

1. В работе [3] (более подробно в [4]) было предложено для фракталов типа множества Мандельброта (ФМ) строить серию изображений соответствующих фракталов Жулиа (ФМ).

На первом этапе были построены соответствующие изображения ФМ и ФЖ для известных и новых фрактальных формул.

На рис. 1 показаны ФМ и миниатюры ФЖ «классического» фрактала Мандельброта для формулы $F(z)=z^2+C$, $z_0=0$.

На рис. 2 показаны ФМ и миниатюры ФЖ фрактала «паук», который является обобщением формулы «классического» ФМ для переменного значения C_k.

$$z_{k+1} = z_k^2 + c_k, k = 0,1,2, \dots, z_0 = 0$$

$$c_{k+1} = c_k/2 + z_{k+1}$$

На рис. 3 показана еще одна известная модификация «классического» ФМ – фрактал «горящий корабль».

$$z_{k+1} = |z_k|^2 + c, k = 0,1,2, \dots, z_0 = 0$$

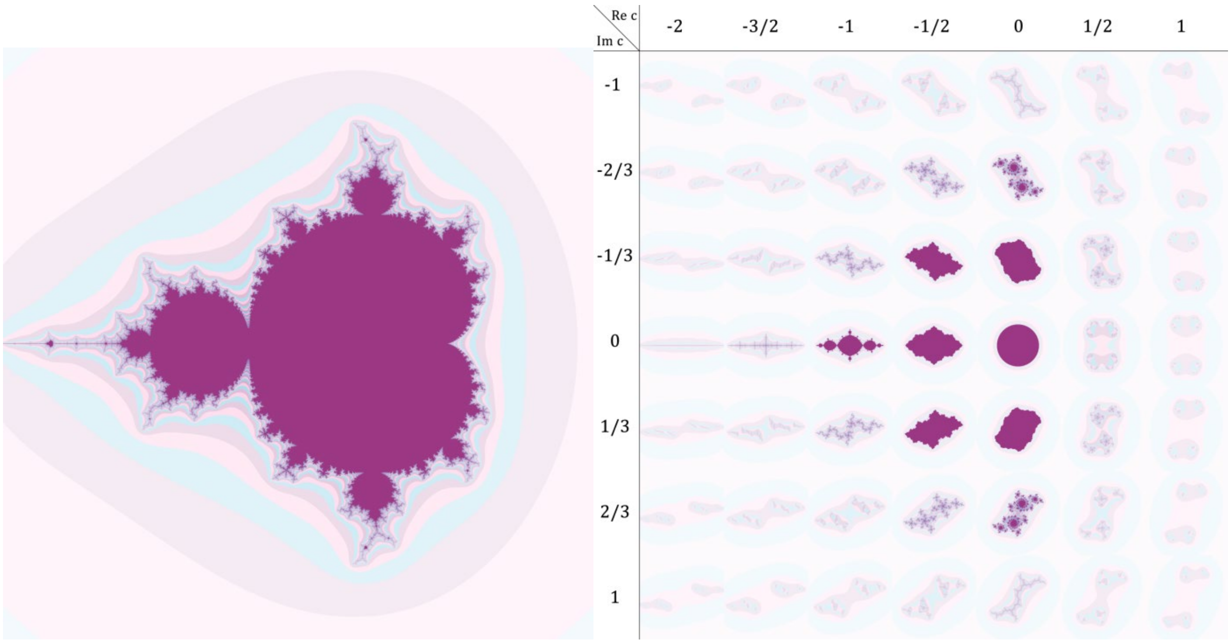


Рис. 1. Фрактал на основе множества Мандельброта (слева)
и набор фракталов на основе множества Жюлиа для разных значений C_0 (справа)

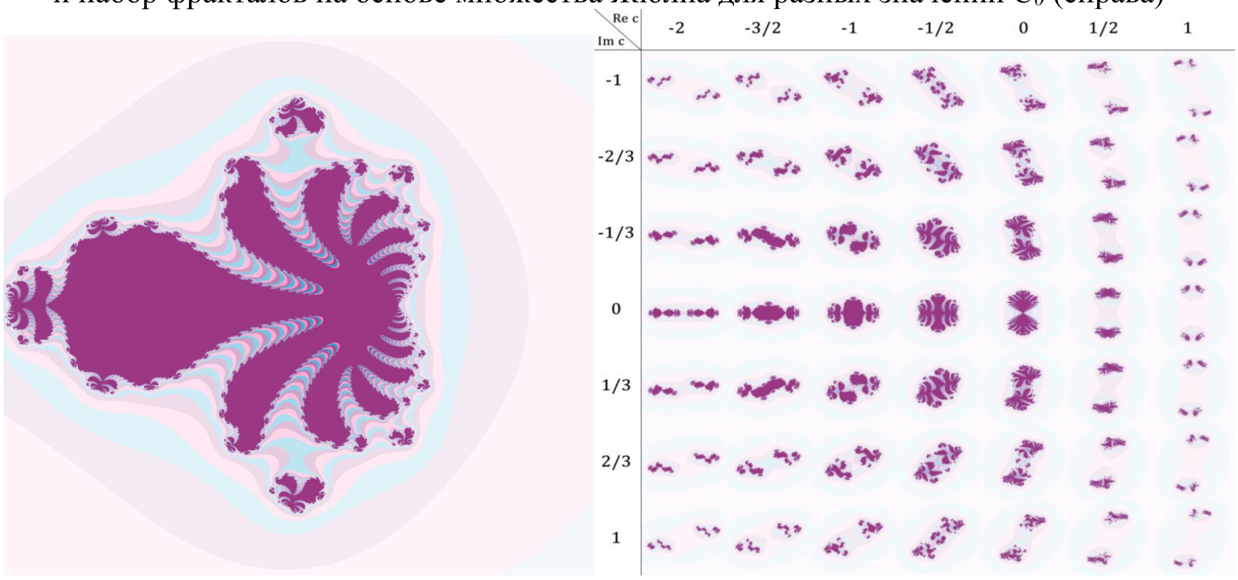


Рис. 2. Фрактал «паук» (слева) и его фракталы Жулиа (справа)

2. На рис. 4–8 показаны ФЖ и миниатюры ФМ для различных формул, ранее не встречавшихся в публикациях.

Рис. 4,а – $\begin{cases} Re(z_{k+1}) = |Re(z_k)^2 - Im(z_k)^2 + Re(c)| \\ Im(z_{k+1}) = 2 * Re(z_k) * Im(z_k) + Im(c) \end{cases}$

Рис. 4,б – $\begin{cases} Re(z_{k+1}) = Re(z_k)^2 - Im(z_k)^2 + Re(c) \\ Im(z_{k+1}) = |2 * Re(z_k) * Im(z_k) + Im(c)| \end{cases}$

Рис. 5,а – $\begin{cases} Re(z_{k+1}) = -1 * (Re(z_k)^2 - Im(z_k)^2 + Re(c)) \\ Im(z_{k+1}) = -2 * (2 * Re(z_k) * Im(z_k) + Im(c)) \end{cases}$

Рис. 5,б – $\begin{cases} Re(z_{k+1}) = \sin(Re(z_k)^2 - Im(z_k)^2 + Re(c)) \\ Im(z_{k+1}) = 2 * Re(z_k) * Im(z_k) + Im(c) \end{cases}$

Рис. 5,в – $\begin{cases} Re(z_{k+1}) = Re(z_k)^2 - Im(z_k)^2 + Re(c) \\ Im(z_{k+1}) = \cos(2 * Re(z_k) * Im(z_k) + Im(c)) \end{cases}$

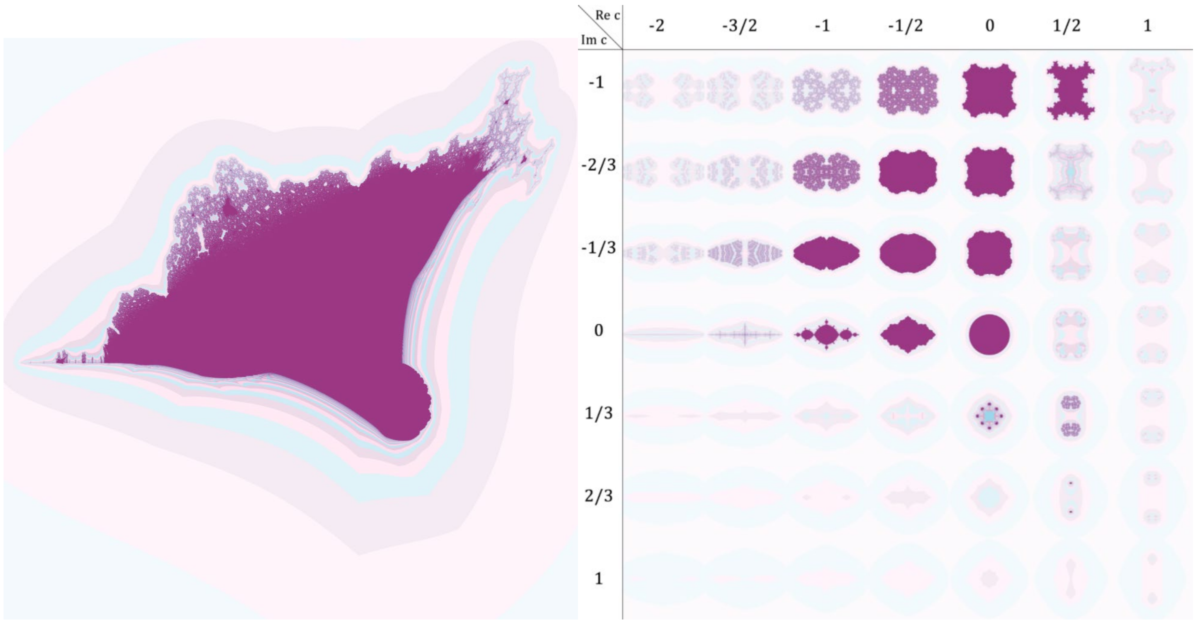
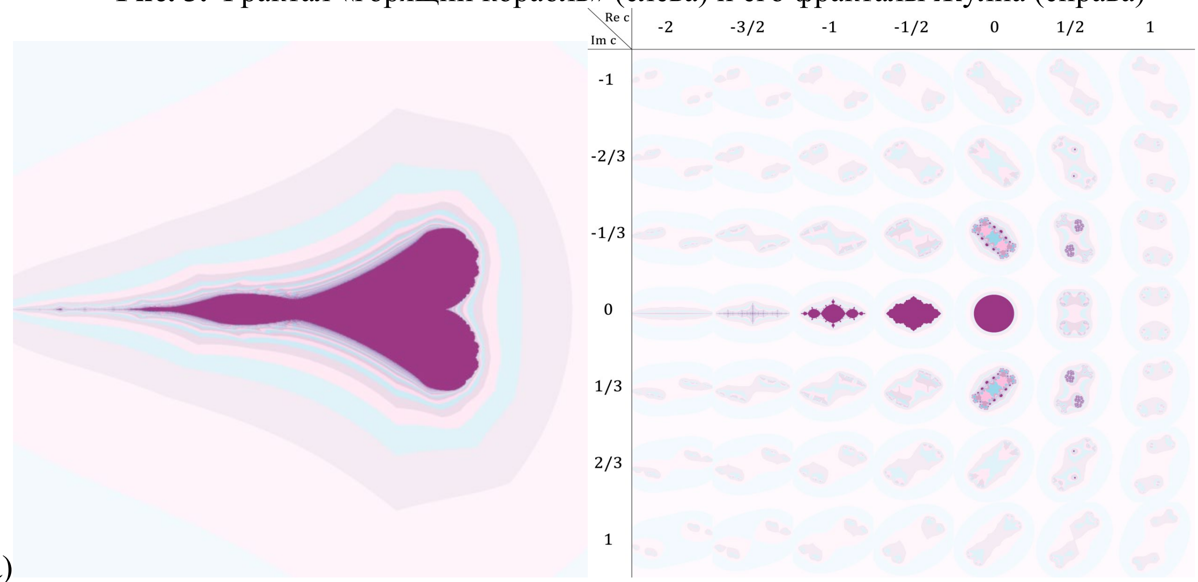
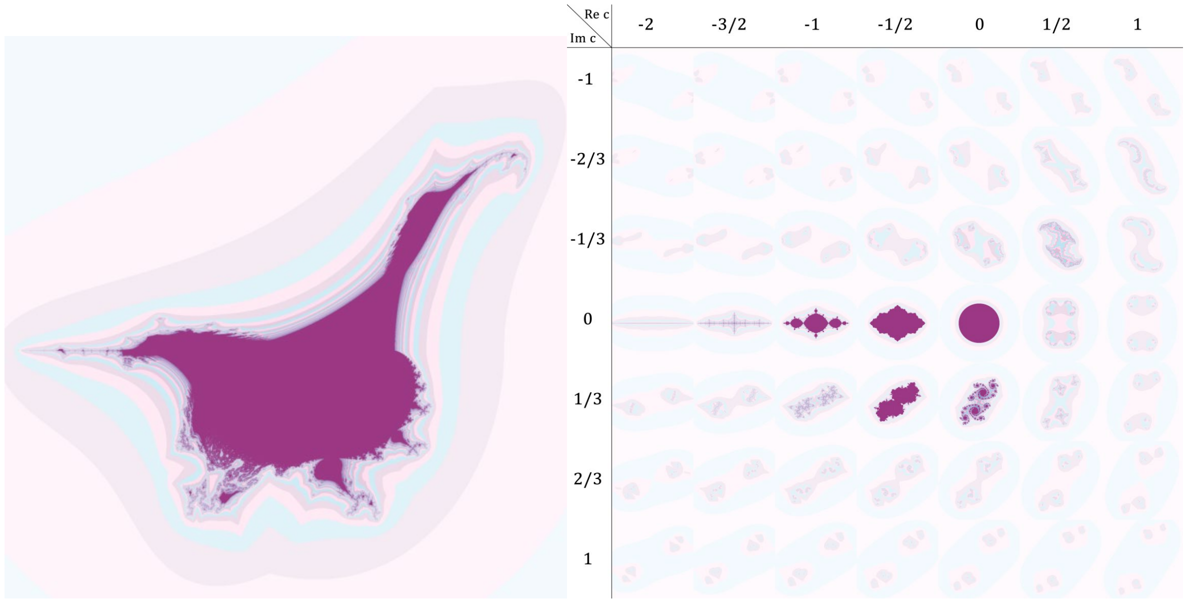


Рис. 3. Фрактал «горящий корабль» (слева) и его фракталы Жулиа (справа)



а)



б)

Рис. 4. Фракталы Мандельброта (слева) и Жулиа (справа) для оригинальных формул

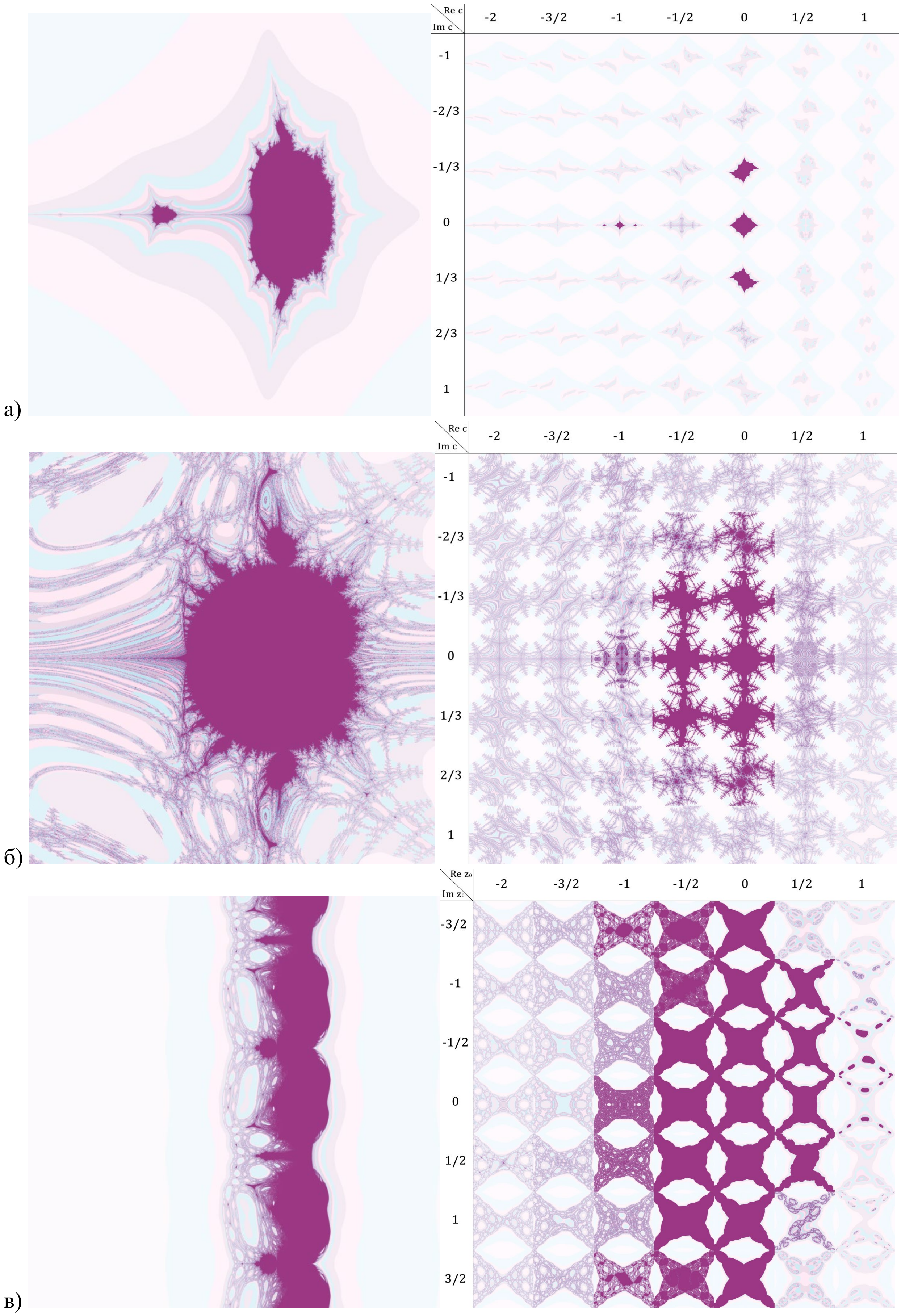


Рис. 5. Фракталы Мандельброта (слева) и Жулиа (справа) для оригинальных формул

Отметим, что фракталы типа показанных на рис. 5,б–в, основанные на использовании тригонометрических функций, представляют интерес в связи с необходимостью создания фрактальных бесшовных текстур и фрактальных сеток [5].

3. Поскольку фрактал «бассейны Ньютона» является частным случаем ФМ для формул специального вида, было рассмотрено построение ФЖ для некоторых таких фракталов.

На рис. 6,а – показаны фракталы Жулиа для формулы $F(z)$=z−$f(z)/f'(z)$, где $z_{k+1} = z_k^3 + c$.

На рис. 6,б – для формулы $F(z)$=z−$f(z)/f'(z)$, где $z_{k+1} = z_k^2 + pz_k + q$.

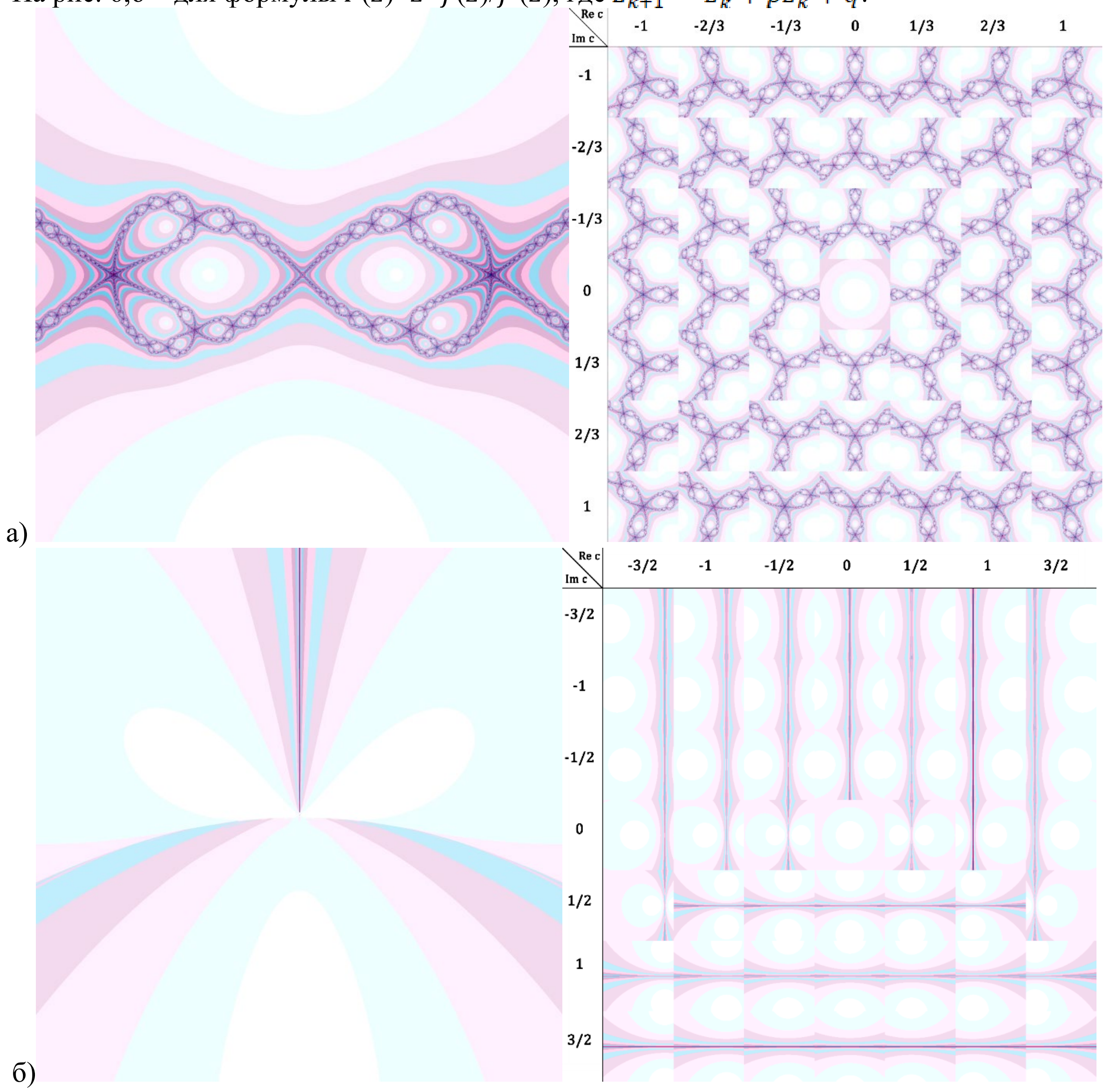


Рис. 6. Фракталы Мандельброта для формул поиска корней Ньютона (слева) и соответствующие фракталы Жулиа (справа)

4. На последнем этапе были построены ФМ и ФЖ для оригинальных формул из работы [4], сконструированными на основе итерационной формулы Ньютона.

Рис. 7,а – $z_{k+1} = z_k - (z_k^4 + c)/(4 * z_k^2)$.

Рис. 7,б – $z_{k+1} = z_k - (z_k^3 + c)/(4 * z_k)$.

Рис. 7,в – $z_{k+1} = z_k - (z_k^5 + c)/(5 * z_k^3)$.

Рис. 8 – $z_{k+1} = z_k - (z_k^5 + c)/((5 + 3i) * z_k^3)$.

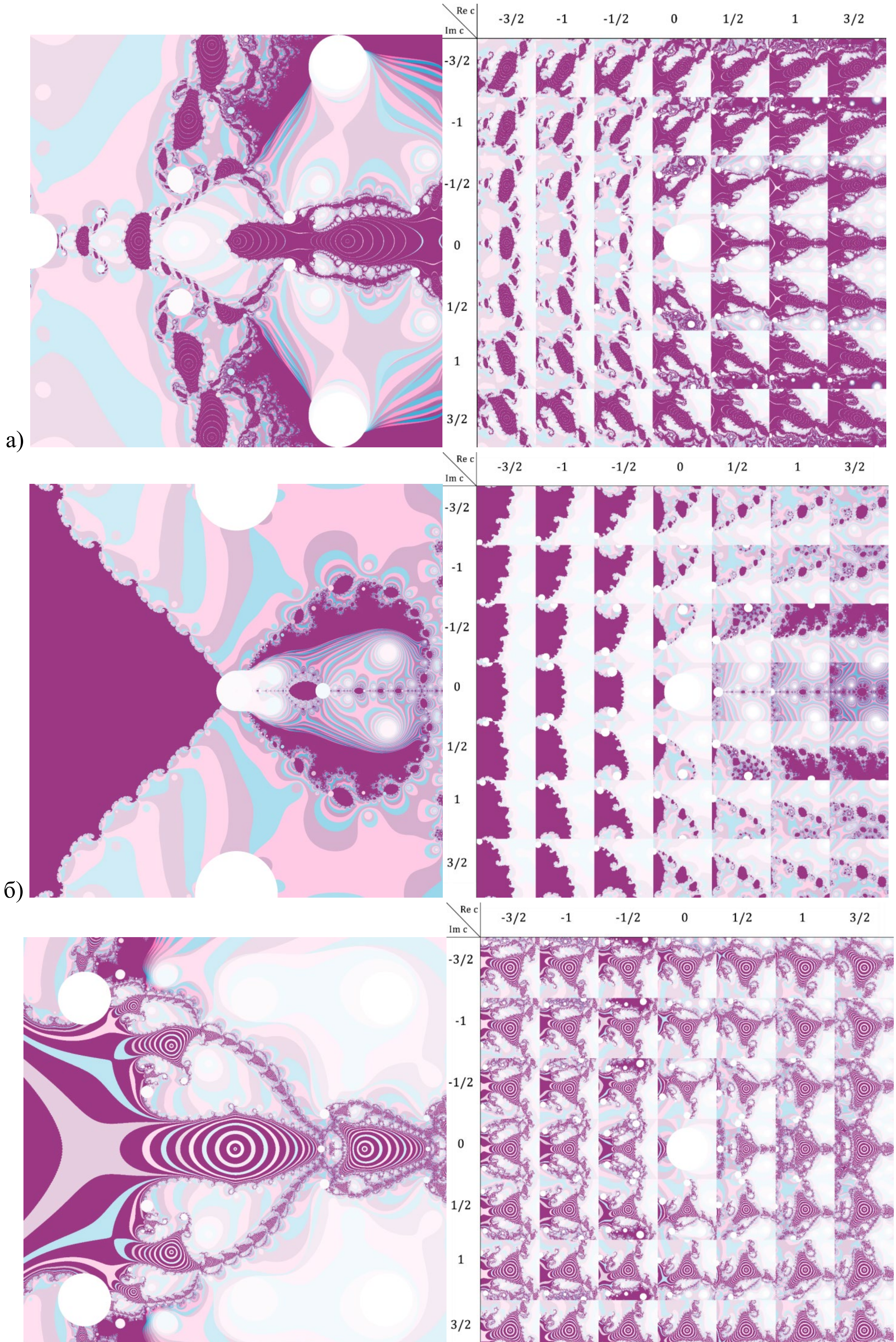
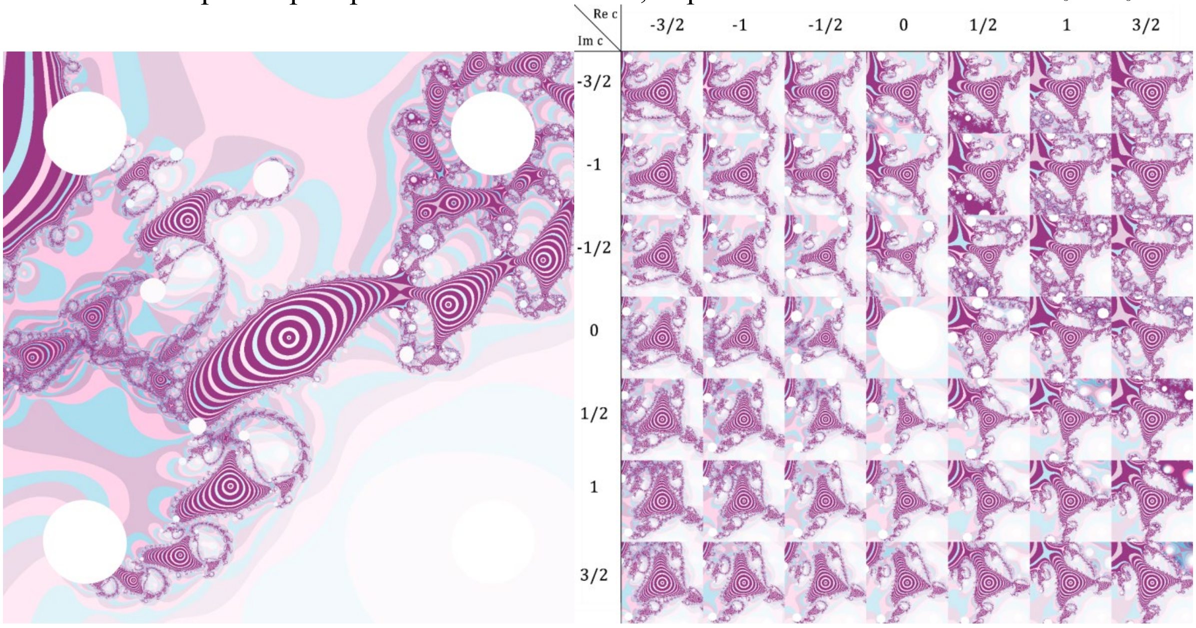


Рис. 7. Фракталы Мандельброта (слева) и Жулиа (справа) для формул из [4]

Рассмотренные фракталы позволили сделать вывод о целесообразности совместного использования ФМ и ФЖ, в том числе для фракталов типа Ньютона, для поиска подходящих визуальных образов. В качестве функций – источников фрактальных изображений могут использоваться функции комплексного переменного вида *F(z, C)* или *F(Z, p, q)*, где *C* – комплексное число, *p* и *q* – действительные числа. Выбирая функцию *F(z)*, содержащую только одну константу *C* (*F(z, C)* или *F(z, p+iq)*), можно получить ∞^2 различных фрактальных изображений типа ФЖ, каждое из которых можно увеличивать, выбирая наиболее удачные фрагменты. Подставляя функцию *F* в формулу Ньютона в качестве *f(z)*, можно получить еще ∞^2 новых изображений (итерационная формула – $F^*(z, C)=z - F(z, C)/F'(z, C)$).

2. Естественным образом этот подход обобщается, если рассматривать ФМ и ФЖ с позиций многомерной геометрии. Если изображения ФМ и ФЖ представляют собой массивы цветных точек, которые получаются при помощи одного и того же алгоритма для разных начальных значений двух комплексных чисел Z_0 и C_0, тогда цветные точки имеет смысл рассматривать помещенными в 4-мерное пространство независимых компонент Z_0^{re}, Z_0^{im}, C_0^{re}, C_0^{im}. Тогда изображения ФМ и ФЖ являются сечениями гиперфрактального объекта, помещенного в это 4-мерное пространство плоскостями, параллельными плоскостям Z_0^{re}–Z_0^{im} или



а)

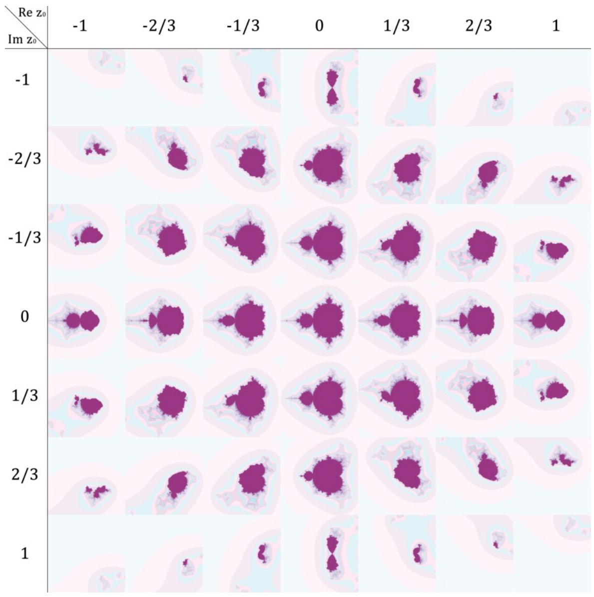


Рис. 8. Фракталы Мандельброта и Жулиа для оригинальной формулы (сверху) и фракталы Мандельброта для разных значений z_0 (снизу)

C_0^{re}–C_0^{im}. Это позволяет строить также множества сечений гиперфрактального объекта, «параллельных» обыкновенному ФМ для различных значений z_0. (рис. 8,б). Таким образом, близкие по внешнему виду изображения для ФМ можно получить, изменяя значения z_0. Это дает еще ∞^2 различных фрактальных изображений типа ФМ. Дальнейшим обобщением подхода является возможность построения фрактальных изображений как сечений гиперфрактального объекта произвольно ориентированными плоскостями, сферами и т.д. [2, 6].

Заключение

Данная студенческая научно-исследовательская работа проводилась в соответствии с практико-ориентированной методикой, которая подробно излагается в работах [6, 8].

В работе показана связь между основными алгоритмами построения изображений алгебраических фракталов (фрактал Жюлиа, фрактал Мандельброта, бассейны Ньютона), предложены новые фрактальные изображения (формулы), представляющие интерес для дизайна.

Литература

1. Орлова Е.В., Чернова А.В. Геометрическое обобщение некоторых алгебраических фрактальных алгоритмов // Энергия–2019 Материалы Четырнадцатой всероссийской (международной) научно–технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. В 6–ти томах. – Иваново, 2019. – Т. 5. – С. 99.
2. Бойков А.А., Орлова Е.В., Чернова А.В., Шкилевич А.А. О создании фрактальных образов для дизайна и полиграфии и некоторых геометрических обобщениях, связанных с ними // Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации. Материалы VIII Международной научно-практической интернет-конференции, февраль – март 2019 г. – Пермь: ПНИПУ, 2019. – С. 325–339.
3. Шкилевич А.А. Графическое исследование функций комплексного переменного // Тринадцатая международная науч.–техн. конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Энергия–2018»: Материалы конференции. Т. 5. Иваново: ФГБОУ ВО «Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина», 2018. С. 135.
4. Шкилевич А. А. К исследованию фрактальных образов множеств Жулиа-Мандельброта // Журнал естественнонаучных исследований. 2024. Т. 9, №2. С. 31–37.
5. Бойков А.А. О фрактальных сетках // Инновационные технологии в инженерной графике: проблемы и перспективы : сборник трудов Международной научно-практической конференции 24 апреля 2024 года Брест, Республика Беларусь Новосибирск, Российская Федерация. Брест : БрГТУ, 2024. С. 17–20.
6. Бойков А. А., Ефремов А. В., Рустамян В. В. О студенческой научно-исследовательской работе на геометро-графических кафедрах // Геометрия и графика. 2023. №. 4. С. 61-75. DOI: 10.12737/2308-4898-2024-11-4-61-75
7. Вышнепольский В. И., Бойков А. А., Егиазарян К. Т., Кадыкова Н. С. Методическая система проведения занятий на кафедре «Инженерная графика» РТУ МИРЭА // Геометрия и графика. 2023. №. 1. С. 23-34. DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-23-34
8. Вышнепольский В. И., Бойков А. А., Егиазарян К. Т., Ефремов А. В. Научно-исследовательская работа на кафедре «Инженерная графика» РТУ МИРЭА // Геометрия и графика. 2023. №. 1. С. 70-85. DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-70-85.