

УДК 514

DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-4-61-75

А.А. Бойков

Ст. преподаватель,
Российский технологический университет МИРЭА,
Россия, 119571, Москва, пр-т Вернадского, 78

А.В. Ефремов

Ст. преподаватель,
Российский технологический университет МИРЭА,
Россия, 119571, Москва, пр-т Вернадского, 78

В.В. Рустамян

Ст. преподаватель,
Российский технологический университет МИРЭА,
Россия, 119571, Москва, пр-т Вернадского, 78

О студенческой научно-исследовательской работе на геометро-графических кафедрах

Аннотация. В статье обобщается опыт управления студенческой научной работой на кафедрах графики ИГЭУ и РТУ МИРЭА. Приводятся примеры тем, представляющих научный и прикладной интерес, разработку которых могут вести студенты младших курсов, приводится текущее состояние разработок по этим темам. В результате привлечения студентов к НИР, получены следующие научные результаты: введено понятие гиперфрактала, рассмотрено построение сечений гиперфрактала произвольно ориентированными плоскостями, сферами, рассмотрено конструирование гиперфрактала методом сложения интегральных формул; предложен алгоритм визуализации мнимых продолжений комплексных фигур с использованием технологий компьютерной графики, для моделирования комплексной плоскости используется четырехмерное пространство, которое отображается при помощи гиперэпюра в виде двух трехмерных ортогональных проекций; показано применение обыкновенных кривых Безье третьего порядка для представления квадратичных и кубических парабол, рациональных кривых Безье для представления конических кривых общего вида и обыкновенных кривых Безье, а также представление кубических сплайнов при помощи кривых Безье; рассмотрен экспериментальный и аналитический методы построения траекторий точек, жестко связанных с аналогом треугольника Рело, вращаемого в рамке заданной формы; сформулировано и рассмотрено на многочисленных примерах понятие квазимногогранников, описаны геометрические ячейки квазимногогранники, сформулирован и продемонстрирован подход к построению геометрических ячеек ограниченных конгруэнтными отсеками криволинейных поверхностей, разработаны и реализованы программно геометрические алгоритмы построения ведомой центриды, по заданной ведущей и местоположению осей вращения для некруглых зацеплений. Сформулированы темы и создан информационный задел для будущих перспективных направлений научно-исследовательской работы студентов на кафедре.

Ключевые слова: научно-исследовательская работа студентов, инженерная геометрия и компьютерная графика, практико-ориентированное обучение, многомерная фрактальная геометрия, мнимые продолжения комплексных фигур, сплайновое представление кривых, моноширинные фигуры, некруглые зацепления.

А.А. Boykov

Senior Lecturer,
MIREA — Russian Technological University,
78, Vernadsky Av., Moscow, 119571, Russia

A.V. Efremov

Senior Lecturer,
MIREA — Russian Technological University,
78, Vernadsky Av., Moscow, 119571, Russia

V.V. Rustamyan

Senior Lecturer,
MIREA — Russian Technological University,
78, Vernadsky Av., Moscow, 119571, Russia

About Student Research Work

Abstract. The article summarizes the experience of managing student scientific work at the Departments of graphics of IGEU and RTU MIREA. Examples of topics of scientific and applied interest, the development of which can be conducted by undergraduate students, are given, the current state of development on these topics is given. As a result of attracting students to research, the following scientific results were obtained: the concept of a hyperfractal was introduced, the construction of hyperfractal sections by arbitrarily oriented planes, spheres was considered, the construction of a hyperfractal by adding iterative formulas was considered; an algorithm for visualizing imaginary extensions of complex shapes using computer graphics technologies is proposed, a four-dimensional space is used to model the complex plane, which is displayed using a hyperepore in the form of two three-dimensional orthogonal projections; the use of ordinary Bezier curves of the third order to represent quadratic and cubic parabolas, rational Bezier curves to represent general conical curves and ordinary Bezier curves is shown, as well as the representation of cubic splines using Bezier curves; experimental and analytical methods for constructing trajectories of points rigidly connected to the analogue of the Reulot triangle rotated in a frame of a given shape are considered; the concept of quasi-monograniers is formulated and considered on numerous examples, geometric cells of quasi-monograniers are described, an approach to constructing geometric cells bounded by congruent sections of curved surfaces is formulated and demonstrated; software geometric algorithms for constructing a driven centroid, according to a given leading and location of the axes of rotation for non-circular meshes are developed and implemented. The topics were formulated and an information reserve was created for future promising areas of research work of students at the department.

Keywords: research work of students, engineering geometry and computer graphics, practice-oriented learning, multidimensional fractal geometry, imaginary continuations of complex shapes, spline representation of curves, monospaced shapes, non-circular meshes.

Введение

Привлечение студентов к научно-исследовательской работе на графических кафедрах отмечается уже с конца 60-х гг. прошлого века [39]. В 1974 г. приказом Минвуза СССР № 124 утверждается положение о научно-исследовательской работе студентов вузов и студенческая научно-исследовательская (творческая) работа приобретает массовый характер (см. [35; 37; 39]). Так как графические кафедры имеют дело пре-

имущественно со студентами младших курсов, понятие научно-исследовательской работы традиционно расширяется до подготовки рефератов, участия в олимпиадах по начертательной геометрии и инженерной графике, подготовки качественных учебно-методических материалов по заданию преподавателя с использованием новейших технических средств и, собственно, научно-исследовательской работы под руководством преподавателей кафедр [32; 37; 39].

Рассмотрим подробнее именно научно-исследовательскую составляющую творческой работы студентов. Имеется два подхода к постановке задач для научно-исследовательской работы студентов.

Ряд преподавателей и кафедр делает упор на необходимость привлечения студентов к геометро-графической деятельности, повышение общего геометрического уровня. В этом случае исследовательские темы состоят в более глубоком рассмотрении тех или иных геометрических тем — конструирование кривых и поверхностей, изучение свойств геометрических преобразований, изучение особенностей тех или иных проекционных моделей и т.п. [28].

Второй подход состоит в прикладной направленности исследований студентов — ставится прикладная задача из области физики, астрономии, физико-химического анализа, машиностроения, приборостроения и др. и предлагается решить ее с привлечением методов начертательной и прикладной геометрии, инженерной и машинной графики [32; 39].

В [19–22] подробно рассматривается методическая система обучения графическим дисциплинам, ориентированная на творческое развитие студентов, проходящих как этапы своей деятельности практико-ориентированное обучение, олимпиады по графическим дисциплинам, студенческую научно-исследовательскую деятельность с последующим формированием высококвалифицированных педагогических кадров в области геометро-графических дисциплин.

Отметим, что авторы настоящей статьи трактуют термин «практико-ориентированное обучение» наиболее широко — практическая деятельность студентов в ходе изучения геометро-графических дисциплин не обязательно должна быть связана с будущей профессиональной деятельностью, наоборот, она должна быть связана с начертательной и прикладной (инженерной) геометрией, инженерной и компьютерной (машинной) графикой. Если при этом удастся решать профессиональные задачи — отлично, но повышение именно геометро-графического уровня студента видится первоочередной задачей.

При этом задача научно-исследовательской деятельности студента обязательно видится в получении результатов, имеющих научную новизну. И на этом этапе обнаруживается противоречие: студенты млад-

ших курсов объективно не готовы не только к исследованиям должного уровня в рассматриваемой области, но и хотя бы к осознанию объема знаний, необходимого для таких исследований (см., например, монографии В.А. Пеклича [33; 34]).

Решение этого противоречия может быть достигнуто именно в прикладной направленности студенческих исследований — выбирая какую-то новую, сравнительно простую задачу из смежной области и решая ее методами инженерной геометрии и компьютерной графики, студент может получить новый результат. При этом от него не требуется иметь профессиональный геометро-графический уровень. Наоборот, постепенное углубление в поставленную прикладную задачу требует расширять знания из области геометрии, а простая задача в результате долгой и внимательной проработки позволяет выйти на ощутимые результаты как по научной новизне, так и по практической значимости.

Примеры таких тем приводятся в настоящей статье.

Темы НИРС под руководством авторов

Тема «Многомерная фрактальная геометрия и ее приложения в дизайне»

Термин «фрактальная геометрия» стал широко использоваться после выхода книги Б. Мандельброта «Фрактальная геометрия природы» [31]. В одной из глав этой книги рассматриваются модели, основанные на итерационном вычислении функций комплексного переменного $f = z(\dot{x})$. Действительная и мнимая части \dot{x} используются как координаты точки на плоскости, а результат вычислений кодируется определенным цветом (оттенком), в результате чего появляются фрактальные изображения, подобные показанным на рис. 1.

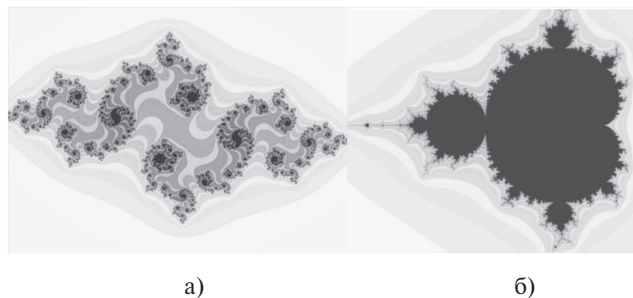


Рис. 1 Примеры фрактальных изображений — множество Жулиа (а) и Мандельброта (б)

Рассматривая не только компоненты в качестве координат точек фрактала, но и значения всех параметров итерационной формулы, можно прийти к понятию гиперфрактала — фрактального объекта,

расположенного в многомерном пространстве всех параметров итерационной формулы. Обычные фрактальные изображения оказываются его плоскими сечениями-«томограммами».

Это открывает чрезвычайно широкий выбор изображений для дизайна, поскольку кроме сечений плоскостями, параллельными координатным, многомерный подход позволяет строить сечения гиперфрактала произвольно ориентированными плоскостями и даже кривыми поверхностями. Многообразие получаемых при этом изображений оказывается безграничным.

В 2018 г. студент ИГЭУ А.А. Шкилевич в рамках НИРС должен был изучить следующее: возможно ли предсказать вид фрактального изображения функции, которая является простой комбинацией (сумма, произведение) двух заданных $\dot{z}_1(\dot{x})$ и $\dot{z}_2(\dot{x})$, если имеются их фрактальные изображения. В итоге была решена более простая задача – подход, рассматривающий фрактал Мандельброта как своеобразный обобщающий «каталог» фракталов Жулиа, был перенесен на фракталы типа Ньютона. Было рассмотрено несколько десятков итерационных формул и построено множество фрактальных изображений, в том числе новых и представляющих художественный интерес [41].

В 2019 г. эта работа получила неожиданное продолжение, когда, независимо от работ А. Лабутя [30] группой студентов ИГЭУ при участии одного из авторов был предложен метод получения фрактальных изображений способом рассечения гиперфрактала плоскостями общего положения, а также метод конструирования гиперфракталов способом сложения итерационных формул [7].

В 2020–2021 гг. работа была продолжена студентом РТУ МИРЭА И.И. Гудаевым и рассмотрен ряд частных задач – построение сферических сечений гиперфрактала [3], создание бесшовного фрактального изображения как развертки поверхности сферы, рассекающей гиперфрактал [9].

Проведенные исследования показали, что данная тема может служить основой для огромного числа оригинальных и перспективных научно-практических разработок.

При этом от студента требуется только базовый навык программирования, в качестве тестового задания предлагается программная реализация фрактального алгоритма Жулиа – Мандельброта на любом языке программирования, которая затем дорабатывается им с учетом поставленных целей и задач исследования.

Подзадача 1. Создание библиотеки гиперфракталов

Каждый гиперфрактал порождается той или иной итерационной формулой. Имея в своем распоряже-

нии множество формул, художник или дизайнер получает возможность выбора материала в своей разработке. Задача многократно решалась, но и разнообразие формул неисчерпаемо.

Подзадача 2. Создание атласа гиперфрактала

Гиперфрактал в общем случае заполняет пространство неравномерно. Большая часть пространства – вне фрактального объекта и внутри него – не представляет интереса для дизайнера. Наоборот, в окрестностях границы гиперфрактала наблюдается бесконечное многообразие форм. Представляется целесообразным специальное исследование окрестностей границы гиперфрактала и автоматическое формирование «атласа» фракталов, который может быть использован в процессе художественного поиска дизайнерами и художниками.

Подзадача 3. Создание средств навигации в многомерном пространстве гиперфрактала

В ранее рассмотренных работах сечения гиперфрактала задаются опосредованно через опорные (реперные) точки и объекты (гиперплоскости, гиперсферы) и не могут быть выбраны произвольно. Представляет интерес создание модели активного агента (шаттла), который способен перемещаться, поворачиваться и сжиматься в многомерном пространстве гиперфрактала. Прикрепленные к агенту плоскости будут использоваться для получения фрактальных изображений.

Подзадача 4. Создание секующих агентов гиперфрактала в виде замкнутых поверхностей

Использование не плоских, а кривых замкнутых поверхностей (сферы, цилиндра, тора и др.) позволяет строить фрактальные изображения на объемных предметах интерьера, а также получать фрактальные изображения-развертки – бесшовные в одном или двух направлениях (рис. 2).

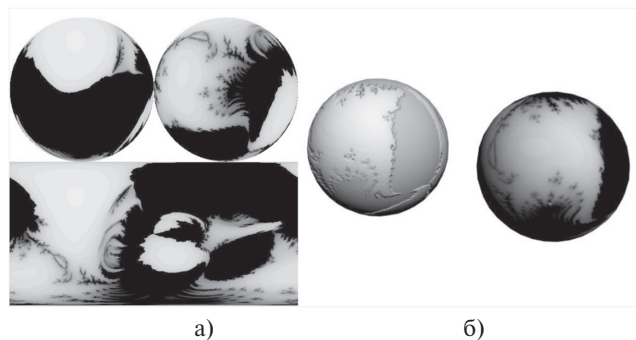


Рис. 2. Проекция и развертка сферического сечения гиперфрактала (а) и его компьютерные модели (б)

Подзадача 5. Создание фрактальных изображений по эскизу

Пусть на плоскости задан некоторый замкнутый контур, например, очертания буквы, логотипа и др.

Используя его в качестве направляющей некоторой составной поверхности в многомерном пространстве гиперфрактала, мы можем построить сечение (томограмму) гиперфрактала такой поверхностью и спроецировать его на плоскость. Если направляющая во всех точках проходит вблизи границы гиперфрактала, то полученное изображение будет напоминать исходный эскиз и при этом будет фрактальным. Представляет интерес разработка алгоритмов, реализующих этот общий подход, – выбор секущей поверхности, построение направляющей вблизи границы гиперфрактала, аппарат рассеечения гиперфрактала и аппарат проецирования точек секущей поверхности на плоскость картины.

Тема «Визуализация фигур комплексной плоскости»

Расширение числовой оси до комплексной плоскости в школьном курсе математики является ступенью к следующему обобщению – обыкновенная евклидова плоскость, содержащая точки, прямые, окружности и др. после введения на ней системы двух координат неминуемо расширяется до четырехмерного пространства. Понимание этого естественным образом возникает при изучении свойств геометрических фигур – так, окружность и прямая пересекаются в двух точках. Если прямая и окружность касаются – точки считают совпавшими. Если прямая лежит вне окружности – мнимыми. Это подтверждается вычислением корней соответствующего квадратного уравнения – корни оказываются комплексными. Наоборот, разрозненные ветви кривых, например гиперболы, оказываются в действительности соединены мнимыми продолжениями, а сама кривая (теперь уже гиперповерхность) – не распадается на две ветви, а остается единой и непрерывной.

Признавая расширенную при помощи мнимых компонент осей x и y обыкновенную плоскость, мы встаем перед проблемой понимания новых геометрических свойств привычных объектов, таких как точки, прямые и кривые линии, которые в результате такого расширения внезапно приобретают мнимые продолжения. Их исследование затрудняется невозможностью визуальной оценки, так как модель в этом случае оказывается многомерной. Актуальной оказывается задача визуализации точек, прямых и кривых для лучшего понимания их природы и свойств.

Впервые использование компьютерной графики для визуализации мнимых продолжений фигур комплексной плоскости в рамках НИРС рассмотрено студентом ИГЭУ Д.А. Шулайкиным в 2018 г. – создана программа, которая позволила строить массив точек фигуры в четырехмерном пространстве действительных и мнимых частей координат и отображать

их на экране компьютера. В 2019 г. работа была существенно расширена и при участии одного из авторов сделан доклад [2], показавший чрезвычайную перспективность данного направления исследований.

При этом от студента требуется знание основ программирования, а в качестве тестового задания предлагается реализовать визуализацию массива фигур трехмерного пространства – точек, кривых, поверхностей. Каркасы, состоящие из соответствующих элементов, используются для представления проекций мнимых продолжений фигур комплексной плоскости.

Подзадача 1. Построение плоских и трехмерных визуальных моделей кривых на комплексной плоскости, их взаимных свойств

Разработки в этом направлении позволяют ответить на вопросы – как выглядит та или иная известная линия на комплексной плоскости с учетом ее мнимых продолжений?

На рис. 3 показаны модели окружности, являющиеся трехмерными проекциями ее мнимых продолжений в пространства $xOy-x'$ и $xOy-y'$ (где x' и y' – мнимые компоненты координат) на комплексной плоскости в пространствах $xOy-x'$ (а) и $xOy-y'$ (б).

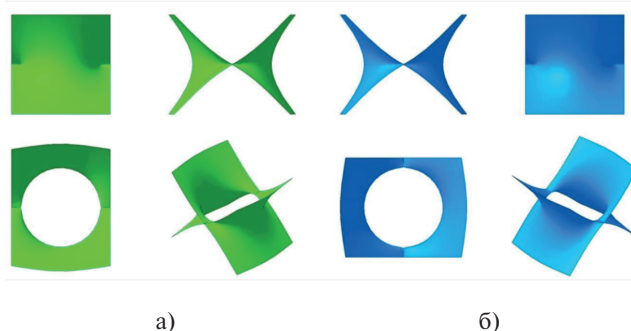


Рис. 3. Компьютерные модели трехмерных проекций мнимых продолжений окружности

Представление о том, как выглядит та или иная кривая, делает возможным понимание некоторых ее геометрических свойств. На рис. 4 показано пересечение прямой и окружности в мнимых точках на гиперэпюре из совмещенных проекций в пространствах $xOy-x'$ (сверху) и $xOy-y'$ (снизу). На рисунке слева мнимые точки показаны кружками со стрелками.

Подзадача 2. Разработка новых способов визуального представления фигур на комплексной плоскости

Показанные выше гиперэпюры имеют тот недостаток, что кривые на них представляются проекциями в виде двух- и более листовых поверхностей. Листы (отсеки) поверхностей перекрывают друг друга и затрудняют анализ трехмерной модели. В ряде

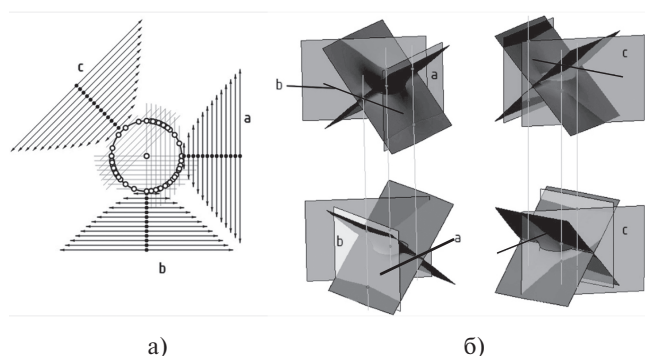


Рис. 4. Визуализация пересечения окружности и прямых в мнимых точках при помощи векторной проекции на плоскости (а) и при помощи трехмерных проекций (б)

случаев такая многолистность возникает в результате «схлопывания» одной из четырех координат при проецировании.

Представляет интерес разработка новых способов визуализации кривых на комплексной плоскости, лишенных этого недостатка, исследование их и применение к визуализации других кривых и их комбинаций.

Подзадача 3. Построение плоских и трехмерных визуальных моделей отношений и преобразований на комплексной плоскости

Разработки в этом направлении позволят ответить на вопросы – как выглядят фигуры, связанные тем или иным отношением (параллельность, перпендикулярность, касание и др.), например, мнимые касательные? А также – как выглядит (меняется) та или иная фигура, преобразованная при помощи поворота на комплексный угол, сжатия с комплексным коэффициентом, отражения от комплексной оси и т.п.?

Показанные в п. 5–6 темы студенческих научных работ связаны с многомерной геометрией. Несмотря на кажущуюся сложность этой темы для младшекурсников, в действительности, как было показано в [5], на достаточном уровне элементы многомерной начертательной геометрии несложно показать и понять студентам, разобравшимся с чертежом Монжа. Плоские гиперэпюры типа Радищева или Скоуте или трехмерный гиперэпюр типа Наумович, показанный на рис. 3–4, являются естественным обобщением чертежа Монжа и не встречают серьезных трудностей в понимании. Сложные геометрические построения можно упростить, сведя их к плоским в полях соответствующих проекций (см., к примеру, алгоритмы построения сечений гиперфракталя в работе [3]).

Тема «Сплайны Безье и их применение к построению алгебраических кривых»

Сплайны Безье (обыкновенные и рациональные) активно используются в системах автоматизации

проектирования (*CAD*-системах) и графических редакторах [23]. Известно, к примеру, что кривая Безье второго порядка является дугой обыкновенной параболы, а рациональная кривая Безье второго порядка является дугой конической кривой (окружности, эллипса, параболы или гиперболы).

Представляет интерес исследование математических моделей популярных сплайнов с целью выявления возможности представления ими тех или иных известных кривых, а также создание алгоритмов построения этих кривых по условиям.

В 2018 г. студентом ИГЭУ Д.А. Малаховым на основе множества вычислительных экспериментов было показано, что при определенной расстановке точек кривой Безье в редакторе «Компас-3D» (версии 10–15, где еще нет инструмента «Коническая кривая») можно получить дугу квадратичной параболы [12].

В 2022 г. студентом РТУ МИРЭА П.С. Сидневым на основе вычислительных экспериментов было показано, что при определенной расстановке управляющих вершин сегмента кривой Безье в редакторе «Компас-3D» можно получить дугу кубической параболы, заданной тем или иным набором условий [14].

В 2023 г. один из авторов обобщил результаты студенческих экспериментов и в докладе [4] привел доказательство и ряд конструктивных алгоритмов для построения дуг квадратичных и кубических парабол по заданным условиям, а также алгоритм построения сегментов кубических сплайнов при помощи кривых Безье.

Применение квадратичных парабол показано в работе студентки РТУ МИРЭА П.М. Захаровой [13] для реализации эквиобъемных (с сохранением объема) графических преобразований тел вращения.

Проведенные исследования показали большой потенциал данного направления исследований. От студентов требуется умение работать в программе «Компас-3D», проводить вычислительные эксперименты, автоматизировать расчеты программным путем и при помощи редактора *Excel*. В качестве тестового задания студент может по известной формуле сгенерировать набор точек некоторой известной кривой (например, окружности), в виде таблицы *Excel* или текстового файла загрузить этот набор в систему «Компас-3D» и создать сплайн, а затем выполнить оценку точности сплайнового представления (для этого достаточно сгенерировать еще один контрольный набор с удвоенным числом точек, загрузить эти точки в виде вершин ломаной в «Компас-3D» и далее средствами программы определить расстояние от контрольных точек до сплайна), выявить связь показателей точности с параметрами кривой и числом точек и т.п. На более поздних этапах (второй

курс и старше) могут понадобиться знания аналитической геометрии. В качестве помощника можно привлечь системы символьной математики (применение *Wolfram Mathematica* для НИР в области геометро-графических дисциплин описано в [29], а использование как инструмента в студенческой научной работе показано, например, в [17; 18; 38]).

Подзадача 1. Представление кривых при помощи сегментов кривой Безье

На рис. 5 показано представление дуг обыкновенной и кубической парабол при помощи одного сегмента кривой Безье третьего порядка.

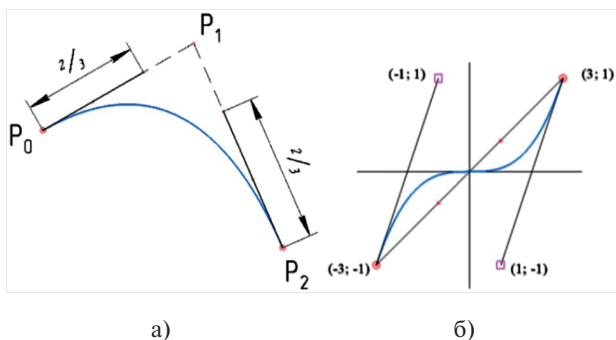


Рис. 5. Представление дуг квадратичной (а) и кубической (б) парабол при помощи сегмента обыкновенной кривой Безье

Исследования в этом направлении позволят ответить на вопросы, какие именно из известных кривых могут быть представлены при помощи сегментов обыкновенной кривой Безье третьего, четвертого и др. порядков и как их построить (как расставлять вершины)?

Подзадача 2. Представление кривых при помощи сегментов рациональной кривой Безье

Рациональные сплайны Безье задаются не только расстановкой управляющих вершин, но и указанием весов в вершинах. На рис. 6 показано задание дуги конической кривой общего вида, а также дуг окружностей и эллипсов с общим центром.

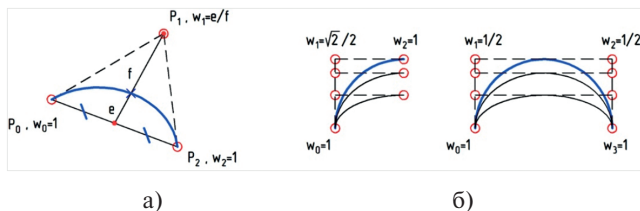


Рис. 6. Представление дуг конической кривой общего вида (а) и окружности/эллипса (б) при помощи сегментов рациональной кривой Безье

Исследования в этом направлении позволят ответить на вопросы – какие именно из известных кривых могут быть представлены при помощи сегментов рациональной кривой Безье третьего, чет-

вертого и др. порядков и как их построить (как расставлять вершины, как выбирать веса вершин)?

Подзадача 3. Представление сегментов известных сплайнов при помощи сегментов обыкновенных или рациональных кривых Безье

Так как тот или иной известный сплайн составляется из гладко сопряженных дуг некоторых кривых, например, кубических парабол, то задача перевода того или иного сплайна в представление при помощи сегментов кривой Безье состоит в расчете координат управляющих вершин сегментов кривой Безье (и весов – для рациональной кривой) на основе параметров сегментов сплайна.

На рис. 7 показано представление обыкновенного кубического сплайна при помощи сегментов кривой Безье третьего порядка.

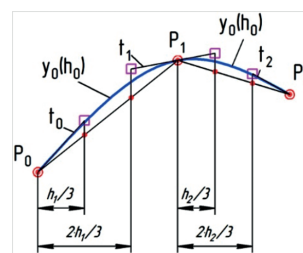


Рис. 7. Представление сегментов обыкновенного кубического сплайна при помощи сегментов обыкновенной кривой Безье третьего порядка

Исследования в этой области позволяют создать математические модели и алгоритмы переноса без потери точности других видов сплайнов в системы автоматизации проектирования и графические редакторы с поддержкой кривых Безье.

Тема «Геометрические ячейки, ограниченные криволинейными поверхностями»

Задача максимального заполнения пространства одинаковыми телами известна с давнейших времен и в широком смысле называется задачей упаковки. Полная упаковка двумерного пространства одинаковыми элементами, называется паркетом или мозаикой, а заполнение трехмерного пространства многогранниками – сотами. Элементарную ячейку сот называют также геометрической ячейкой. До сих пор рассматривались только соты – многогранники, ограниченные отсеками плоскостей [42]. Один из авторов предложил своей студентке Татьяне Купцовой тему «Моделирование аналогов архимедовых и платоновых тел, ограниченных отсеками криволинейных поверхностей».

Результатом выполнения данной работы стали выступление на ежегодной научно-технической конференции студентов и аспирантов РТУ МИРЭА и участие во Всероссийском студенческом конкурсе

«Инновационные разработки» в 2019 г. В дальнейшем студентка занималась научной работой уже на выпускающей кафедре, однако работа получила развитие, был найден подход к моделированию квази-многогранников ограниченных одинаковыми криволинейными псевдогранями, стыкующимися между собой, среди этих многогранников была выявлена геометрическая ячейка рис. 8 [26], а впоследствии разработан общий подход к моделированию высокосимметричных геометрических ячеек ограниченных одинаковыми криволинейными поверхностями рис. 9 [27].

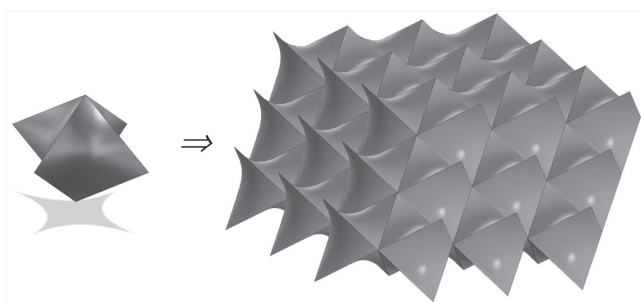


Рис. 8. Квазичетырехгранник, ограниченный одинаковыми отсеками гипара и геометрические соты с его использованием

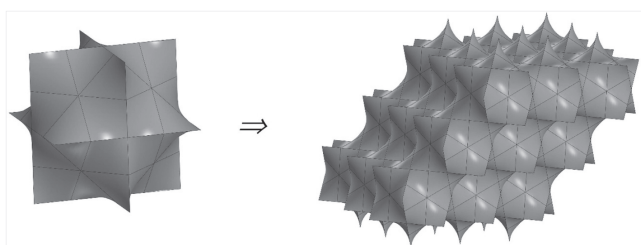


Рис. 9. Квазивосьмигранник, ограниченный одинаковыми отсеками сложной криволинейной поверхности и геометрические соты с его использованием

Тема «Анализ траектории материальной точки, жестко связанной с аналогом треугольника Рело, вращающимся в рамке заданной формы»

В 2020 г. в рамках подготовки к научно-технической конференции аспирантов и студентов РТУ МИРЭА один из авторов предложил своей студентке А.А. Игониной исследовательскую работу, посвященную аналитическому и экспериментальному определению траектории точки принадлежащей аналогу треугольника Рело, вращаемого в рамках разной формы. Для простого случая, вращения аналога треугольника Рело, образованного тремя парами противостоящих разновеликих дуг окружностей (рис. 10), были аналитически получены уравнения траекторий для следующих точек:

$$x = R_1 - r_B \cdot \cos(t_B - t); y = R_1 - r_A \cdot \sin(t_A - t); t \in [0; \pi/6]$$

$$x = R_1 - r_B \cdot \cos(t_B - t); y = R_2 - r_C \cdot \sin(t_C - t); t \in [\pi/6; \pi/3]$$

$$x = R_2 - r_A \cdot \cos(t_A - t); y = R_2 - r_C \cdot \sin(t_C - t); t \in [\pi/3; \pi/2]$$

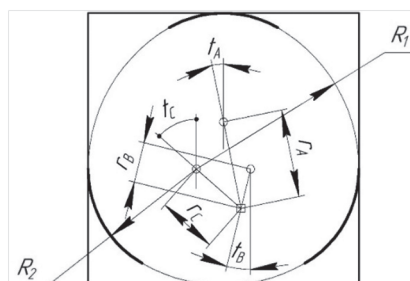


Рис. 10

Была создана параметрическая модель в САПР Компас-3D, позволяющая по координатам точки определять искомую траекторию. Результаты работы параметрической модели при разных параметрах представлены на рис. 11. Сложные случаи аналогов треугольника Рело, например, построенные на дугах параболы и их эквидистантах, анализу не поддались, но для таких случаев был разработан неаналитический метод определения траекторий (рис. 12). Результаты данной работы также были представлены на Всероссийском конкурсе «Инновационные разработки», была опубликована статья в научном журнале [25].

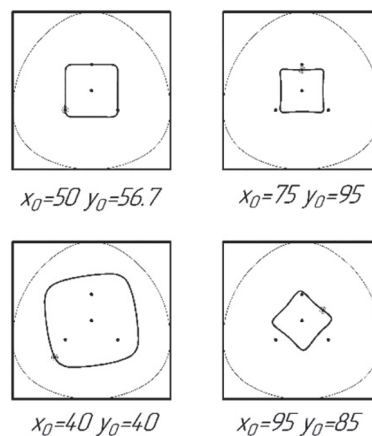


Рис. 11

Тема «Программная реализация графического алгоритма поиска ведомой центроиды по заданному набору координат точек ведущей центроиды и координатам осей вращения»

В 2021 г. один из авторов осознал, что ведущая центроида и ее ось вращения однозначно задает ведомую центроиду, если задана ее ось вращения.

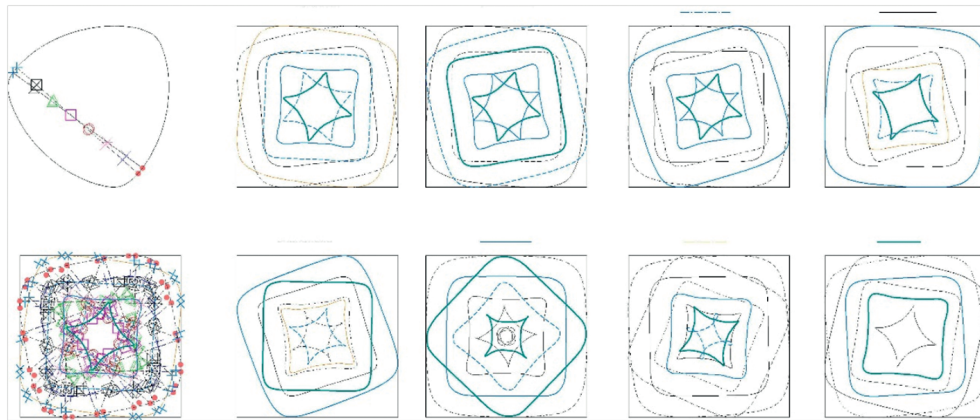


Рис. 12

Причем такое геометрическое соответствие обратимо — пара центроида/ось однозначно соответствует второй паре центроида/ось и наоборот. У такого соответствия есть все признаки геометрического преобразования. Простые варианты подобного преобразования давно описаны, но возникает вопрос как находить сложные, не поддающиеся аналитическим вычислениям соответствия. Был разработан алгоритм подобного преобразования, базировавшегося на следующем геометрическом допущении:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a_1^n / a_1'^n}{a_2^n / a_2'^n} = 1, \text{ где под } a \text{ понимается длина дуги, а под } a'$$

a' — длина хорды этой дуги (рис. 13). Программная реализация такого алгоритма была предложена студенту — будущему программисту Н.М. Глазунову. Студент разработал полноценную программу на языке программирования C++ (рис. 14), занял первые места на ежегодной научно-технической конференции студентов и аспирантов РТУ МИРЭА и на Всероссийском студенческом конкурсе «Инновационные разработки». Однако алгоритм давал приемлемую точность при разбиении исходной кривой на огромное количество участков. Через год студентке РТУ МИРЭА

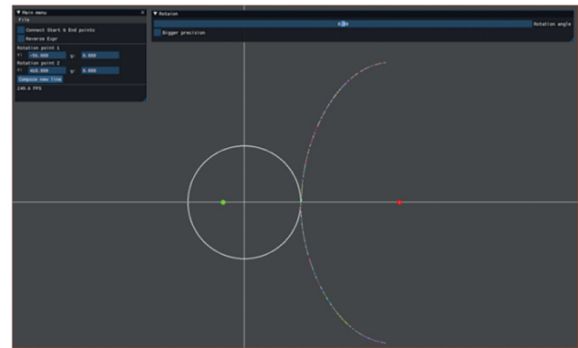


Рис. 14

Болотиной Екатерине была предложена работа по реализации другого алгоритма преобразования. Алгоритм базировался на следующем геометрическом допущении: $\lim_{\Delta a_n \rightarrow 0} \frac{\Delta \beta^n / \Delta a^n}{R_1^n / R_2^n} = 1$ (рис. 15) и был реализован в *Excel*. Было проведено сравнение двух алгоритмов и показано преимущество точности второго алгоритма при том же числе разбиений исходной центроиды при нескольких порядков. Эта работа была представлена на очередной научно-технической конференции студентов и аспирантов РТУ МИРЭА с результатом — первое место по секции, а также по результатам этой работы был опубликован доклад на

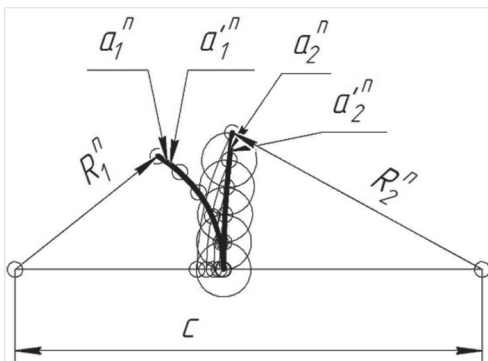


Рис. 13

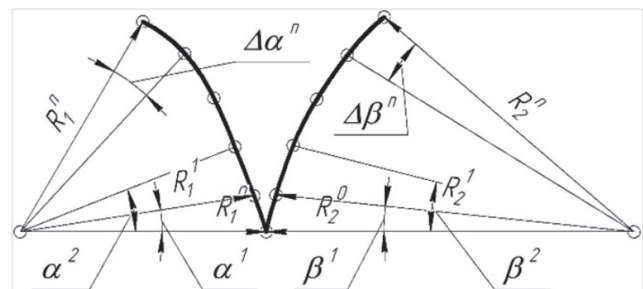


Рис. 14

Всероссийском научно-методическом семинаре «Геометрия и графика» 2023 г. [15]. Впоследствии алгоритм был программно реализован на языке программирования *Python*, в данный момент программа подана на регистрацию. Также готовится статья по возможному применению результатов работы данной программы.

Перспективы на будущее

Кроме рассмотренных выше, представляют интерес следующие направления, требующие, однако, от студентов более высокого уровня начальных знаний и некоторых специальных навыков:

- **разработка и применение языка геометрических построений к решению задач** (действующая версия интерпретатора размещена по адресу: <https://code.webtute.ru>). В рамках студенческих научных работ в 2017–2018 гг. на базе ИГЭУ рассматривалось конструктивное и аналитическое исследование одного семейства кривых четвертого порядка [1], реализация оригами-построений и использование их к решению задач [10], оценка точности графического интегрирования и дифференцирования [24]. От студента требуется более глубокое понимание методов конструктивной геометрии, некоторый опыт применения аналитической геометрии, а также изучение языка геометрических построений;
- **создание справочно-библиографической системы по инженерной геометрии и компьютерной графике** (действующая версия справочно-библиографической системы размещена по адресу: <https://cat.webtute.ru/>). Система начала функционировать в 2017 г. [6; 8], при участии студентов ИГЭУ были обработаны сведения пятидесяти сборников журнала «Прикладная геометрия и инженерная графика» [6], позднее студенты привлекались к решению задач анализа данных библиографической системы [11] или задач разработки компонентов системы [16; 40]. Для участия в научной работе по этой тематике от студентов требуется возможность и желание работать с библиотечным фондом, например, РГБ им. В.И. Ленина – заказывать издания, делать выписки, фотокопии, распознавать текст и представлять в формате, приемлемом для автоматической обработки в модулях библиографической системы или, наоборот, требуется владение технологиями программирования сценариев для сети Интернет, доступа к базам данных, обработки текстов и т.п.;
- **отработка методики использования современных систем компьютерной графики, расширенной, дополненной и виртуальной реальности**. Так как эта область интенсивно развивается, постоянно появляется новое программное обеспечение, то от студентов требуется самостоятельно изучать имеющиеся в сети Интернет материалы по созданию приложений расширенной (*XR*), дополненной (*AR*) и виртуальной (*VR*) реальности применительно к прикладным задачам, изучать и учиться программировать трехмерные игровые «движки» (*Unity3D*, *Unreal*, *SteamVR* и др.), требуется специальное оборудование (очки и шлемы, планшеты, голографические экраны и т.п.). Некоторые результаты были получены в рамках проводимых в РТУ МИРЭА курсовых работ и проектов и выросшей из них научной работы [22];
- автоматизация геометрических построений в *CAD*-системах – перспективное направление студенческой проектной деятельности, требующее при этом более глубокого знания приемов программирования приложений, скриптовых языков, интегрированных в *CAD*-системы (например, *Python* для работы с системой «Компас-3D»), а также изучения большого числа спецификаций на внутренние объекты *CAD*-системы. Решаемые задачи разнообразны – конструирование каркасов поверхностей, реализация геометрических преобразований в плоскости и пространстве, проверка чертежей и трехмерных моделей и т.п.

Выводы

За период 2017–2023 гг. на базе ИГЭУ и РТУ МИРЭА авторы настоящей статьи руководили научной работой 31 студента. Было опубликовано 18 тезисов докладов, 22 статьи в журналах и сборниках материалов конференций (в соавторстве и без).

Опыт показывает, что полноценная научно-исследовательская работа студентов-младшекурсников возможна, но при этом требует выполнения следующих условий.

1. Заинтересованность (мотивированность) студента, обеспечивается, как правило, личным обаянием преподавателя-наставника и личным желанием студента проявить себя, сделать больше, чем требует обычный учебный процесс. Для этого требуется, чтобы учебный процесс сохранял наставничество как форму взаимодействия учащегося и педагога.
2. Ответственность студента, который должен в условиях и без того высокой учебной нагрузки работать над поставленной задачей (изучать материал, писать программный код, проводить эксперименты), регулярно сообщать о своих результатах, советоваться, исправлять и дорабатывать, учиться оформлять в виде заметок и тезисов.

3. Активная научная деятельность преподавателя, который, с одной стороны, выступает как образец, с другой – имеет актуальное представление о том, что исследовать, где докладывать, где публиковать, лично участвует в редактировании докладов и публикаций.
4. Личная проработка студенческой научной темы преподавателем на один-два шага вперед, с тем чтобы ставить порциями подзадачи, доступные для решения студентом и складывающиеся в конечном итоге, как пазл, в законченный результат.

Легко заметить, что многие предлагаемые в статье темы НИРС требуют от студентов в той или иной степени навыков программирования. Это связано с тем, что, не имея на младших курсах глубоких геометрических знаний для подробного анализа поставленной преподавателем проблемы, для выявления и обоснования возникающих закономерностей, студент может двигаться к решению либо построением удачной визуализации, либо путем многочисленных экспериментов. И в том и в другом случае требуется механизация простейших геометрических процедур, которая может быть реализована в виде соответствующей вычислительной или графической программы.

Плохо ли это? Ведь может показаться, что мы отдаляем студента от геометрии и графики. Научная специальность 2.5.1 (ранее – 05.01.01) «Инженерная геометрия и компьютерная графика. Поддержка

жизненного цикла изделия» прошла долгий путь от первоначальной «Начертательной геометрии и инженерной графики» [36]. Уже в 70-х гг. прошлого века, став вместо «начертательной» «прикладной» геометрией, наша специальность объединяла множество задач автоматизации проектирования, которые решались именно разработкой программ.

Специалисты «2.5.1», таким образом, – это одновременно геометры, инженеры и программисты. В последние тридцать лет под автоматизацией проектирования понималось исключительно использование графических пакетов типа *CAD/CAE/CAM*-систем, а геометро-графические кафедры учили студентов работать в программах *AutoCAD*, «Компас-3D», *Inventor*, *T-Flex* и др. Сегодня уже стало очевидным, что ни одна готовая программа не позволяет решить всех практических или научных задач, наилучшее решение требует своего геометрического инструмента, который может быть только специально для этого запрограммирован. Этот инструмент имеет три составляющие – чертеж (в том числе на бумаге), компьютерную визуальную модель и работающую программу, а создаваемые при помощи него решения должны быть видимы (визуально представлены), управляемы и практически применимы (например, результаты расчетов передаются в *CAD*-систему, где становятся частью модели – кривой или поверхностью). С этой точки зрения все предлагаемые темы НИРС являются подходящими.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аленина Е.М. Исследование одного семейства кривых четвертого порядка [Текст] / Е.М. Аленина, А.А. Бойков // Сборник материалов Двенадцатой международной научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Энергия-2017». – Иваново, 2017. – Т. 5. – С. 184–185.
2. Бойков А.А. Визуализация геометрических фигур и отношений комплексной плоскости средствами компьютерной графики [Текст] / А.А. Бойков, Д.А. Шулайкин // Сборник материалов VIII Международной научно-практической интернет-конференции «Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации». – Пермь: Изд-во ПНИПУ, 2019. – С. 72–93.
3. Бойков А.А. Геометрические модели и алгоритмы построения сферических сечений гиперфрактала [Текст] / А.А. Бойков, И.И. Гудаев // Журнал естественно-научных исследований. – 2020. – Т. 5. – № 4. – С. 16–25.
4. Бойков А.А. Конструктивная геометрия некоторых алгебраических кривых в сплайновом представлении [Текст] / А.А. Бойков // Сборник трудов 33-й Между-
- нар. конф. по компьютерной графике и машинному зрению «GraphiCon-2023». – М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2023. – С. 758–770.
5. Бойков А.А. О построении моделей объектов пространства четырех и более измерений в учебном процессе [Текст] / А.А. Бойков // Геометрия и графика. – 2018. – Т. 5. – № 4. – С. 54–71. – DOI: 10.12737/article_5c21f96dce5de8.36096061.
6. Бойков А.А. О создании библиографической базы публикаций по инженерной геометрии [Текст] / А.А. Бойков, А.А. Варфоломеева, Ф.С. Идрисова, В.Р. Пентюрина // Сборник материалов IX Всероссийской научно-практической конференции «Надежность и долговечность машин и механизмов». – Иваново, 2018. – С. 404–407.
7. Бойков А.А. О создании фрактальных образов для дизайна и полиграфии и некоторых геометрических обобщениях, связанных с ними [Текст] / А.А. Бойков, Е.В. Орлова, А.В. Чернова, А.А. Шкилевич // Сборник материалов VIII Международной научно-практической интернет-конференции «Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе:

- традиции и инновации». — Пермь: Изд-во ПНИПУ, 2019. — С. 325–339.
8. *Бойков А.А.* О текущем состоянии справочно-библиографической системы по инженерной геометрии [Текст] / А.А. Бойков // Журнал технических исследований. — 2020. — Т. 6. — № 2. — С. 29–34.
 9. *Бойков А.А.* Об одном способе создания бесшовных фрактальных паттернов для дизайна на основе многомерного подхода [Текст] / А.А. Бойков, И.И. Гудаев // Сборник трудов Международной научно-практической конференции «Инновационные технологии в инженерной графике: проблемы и перспективы». — Брест, Республика Беларусь, Новосибирск, Российская Федерация. — Новосибирск: Изд-во НГАСУ (Сибстрин), 2021. — С. 35–39.
 10. *Бойков А.А.* Решение задач начертательной геометрии складыванием листа бумаги (оригами-геометрия) [Текст] / А.А. Бойков, П.А. Чернова // Сборник материалов VIII Всероссийской научно-практической конференции «Надежность и долговечность машин и механизмов». — Иваново, 2017. — С. 431–434.
 11. *Бойков А.А.* Справочно-библиографическая система по инженерной геометрии и ее применение в научной работе студентов [Текст] / А.А. Бойков, А.А. Варфоломеева // Сборник трудов Международной научно-практической конференции «Инновационные технологии в инженерной графике: проблемы и перспективы». — Брест, Республика Беларусь, Новосибирск, Российская Федерация. — Новосибирск: Изд-во НГАСУ (Сибстрин), 2019. — С. 37–41.
 12. *Бойков А.А.* Точное представление параболы в САПР «Компас-3D» при помощи кривой Безье [Текст] / А.А. Бойков, Д.А. Малахов // Сборник материалов IX Всероссийской научно-практической конференции «Надежность и долговечность машин и механизмов». — Иваново, 2018. — С. 407–411.
 13. *Бойков А.А.* Эквиобъемные графические преобразования некоторых тел вращения [Текст] / А.А. Бойков, П.М. Захарова // Сборник трудов Международной научно-практической конференции «Инновационные технологии в инженерной графике: проблемы и перспективы». — Брест, Республика Беларусь, Новосибирск, Российская Федерация. — Брест: Изд-во БрГТУ, 2020. — С. 32–37.
 14. *Бойков А.А.* Экспериментальная проверка конструктивных алгоритмов построения кубических парабол при помощи кривых Безье в САПР «Компас-3D» [Текст] / А.А. Бойков, П.С. Сиднев // Журнал естественно-научных исследований. — 2022. — Т. 7. — № 3. — С. 57–64.
 15. *Болотина Е.В.* Улучшенный графический алгоритм построения преобразования «кривой качения», и его реализация в Компас-3D [Видео и аудио] / Е.В. Болотина, А.В. Ефремов. — URL: <https://www.youtube.com/watch?v=1SXUJPbV00U&list=PLrbLY3c-IbZ0W1KRfGUuem8H5mbL4v-kZ&index=19>.
 16. *Васнев И.П.* Вопросы автоматизации обработки библиографических ссылок для справочно-библиографической системы по инженерной геометрии [Текст] / И.П. Васнев // Журнал естественно-научных исследований. — 2020. — Т. 6. — № 4. — С. 57–61.
 17. *Вышнепольский В.И.* Геометрические места точек, равноотстоящих от двух заданных геометрических фигур. часть 4: геометрические места точек, равноудаленных от двух сфер / В.И. Вышнепольский, Е.В. Заварихина, Д.С. Пех // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 3. — С. 12–29. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-3-12-29.
 18. *Вышнепольский В.И.* Геометрические места точек, равноотстоящих от двух заданных геометрических фигур. Часть 5: геометрические места точек, равноудаленных от сферы и плоскости / В.И. Вышнепольский, Е.В. Заварихина, К.Т. Егиазарян // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 4. — С. 22–34. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-22-34.
 19. *Вышнепольский В.И.* Методическая система проведения занятий на кафедре «Инженерная графика» РТУ МИРЭА [Текст] / В.И. Вышнепольский, А.А. Бойков, К.Т. Егиазарян, Н.С. Кадыкова // Геометрия и графика. — 2023. — Т. 11. — № 1. — С. 23–34. — DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-23-34.
 20. *Вышнепольский В.И.* Методические системы подготовки и проведения олимпиад и развития интеллектуальных способностей студентов в РТУ МИРЭА [Текст] / В.И. Вышнепольский, Н.С. Кадыкова, А.В. Ефремов, К.Т. Егиазарян // Геометрия и графика. — 2023. — Т. 11. — № 1. — С. 44–60. — DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-44-60.
 21. *Вышнепольский В.И.* Научно-исследовательская работа на кафедре «Инженерная графика» РТУ МИРЭА [Текст] / В.И. Вышнепольский, А.А. Бойков, К.Т. Егиазарян, А.В. Ефремов // Геометрия и графика. — 2023. — Т. 11. — № 1. — С. 70–85. — DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-70-85.
 22. *Вышнепольский В.И.* Организация практико-ориентированного обучения на кафедре «Инженерная графика» РТУ МИРЭА [Текст] / В.И. Вышнепольский, А.А. Бойков, А.В. Ефремов, Н.С. Кадыкова // Геометрия и графика. 2023. — Т. 11. — № 1. — С. 35–43. — DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-35-43.
 23. *Голованов Н.Н.* Геометрическое моделирование [Текст] / Н.Н. Голованов — М.: Изд-во Физ.-мат. литры, 2002. — 472 с.
 24. *Ермолаев А.Р.* Реализация алгоритмов графического дифференцирования и интегрирования средствами языка геометрических построений [Текст] / А.Р. Ермолаев, А.А. Бойков // Сборник материалов Тринадцатой международной научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Энергия-2018». — Иваново, 2018. — С. 117.
 25. *Ефремов А.В.* Анализ траектории движения точек аналогов треугольника Рело, вращаемых в рамках ква-

- дратной и ромбовидной форм [Текст] / А.В. Ефремов, Т.А. Верещагина, А.А. Игонина, Н.С. Кадыкова, В.В. Рустамян. // Журнал естественнонаучных исследований. — 2021. — Т. 7. — № 2. — С. 31–37.
26. *Ефремов А.В.* Правильные многопсевдогранники, образованные отсеками гиперболических параболоидов [Текст] / А.В. Ефремов // Журнал технических исследований. — 2020. — Т. 6. — № 2. — С. 21–28.
 27. *Ефремов А.В.* Пространственные геометрические ячейки — квазимногогранники [Текст] / А.В. Ефремов, Т.А. Верещагина, Н.С. Кадыкова, В.В. Рустамян // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 3. — С. 30–38. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-3-30-38.
 28. *Иванов Г.С.* О тематике НИРС по начертательной геометрии [Текст] / Г.С. Иванов // Сборник научно-методических статей по начертательной геометрии и инженерной графике. — М.: Высшая школа, 1990. — Вып. 16. — С. 7–11.
 29. *Игнатъев С.А.* Повышение наглядности представления изучаемых в начертательной геометрии объектов [Текст] / С.А. Игнатъев, Э.Х. Муратбаекеев, М.В. Воронина // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 9. — № 1. — С. 44–53. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-1-44-53.
 30. *Лабуть А.* Снова о многомерности множества Мандельброта–Жюлиа [Электронный ресурс] / А. Лабуть. — URL: <http://www.sciteclibrary.ru/texts/rus/stat/st2526.htm> (дата обращения: 11.09.2023).
 31. *Мандельброт Б.Б.* Фрактальная геометрия природы «The fractal geometry of nature» [Текст] / Б.Б. Мандельброт. — М.: Изд-во Ин-та компьютерных исследований, 2002. — 656 с.
 32. *Михайленко В.Е.* НИРС, начиная с первого курса [Текст] / В.Е. Михайленко, Л.В. Корниенко // Сборник научно-методических статей по начертательной геометрии и инженерной графике. — М.: Высшая школа, 1990. — Вып. 16. — С. 3–6.
 33. *Пеклич В.А.* Высшая начертательная геометрия [Текст] / В.А. Пеклич — М.: АСВ, 2000. — 344 с.
 34. *Пеклич В.А.* Мнимая начертательная геометрия [Текст] / В.А. Пеклич — М.: АСВ, 2007. — 104 с.
 35. *Розов С.В.* О научной работе студентов на младших курсах вузов [Текст] / С.В. Розов, И.И. Коваленко // Начертательная геометрия и инженерная графика: сб. научно-методических статей. — М.: Высшая школа, 1977. — Вып. 4. — С. 66–68.
 36. *Ротков С.И.* Проблема сокращения кафедр геометро-графической подготовки в университетах России [Текст] / С.И. Ротков, Е.В. Конопацкий, К.Л. Панчук // Омский научный вестник. — 2023. — № 4. — С. 29–37. — DOI: 10.25206/1813-8225-2023-188-29-37.
 37. Сборник научно-методических статей по начертательной геометрии и инженерной графике. Научно-исследовательская работа студентов. — М.: Изд-во МПИ, 1990. — Вып. 16. — 136 с.
 38. *Сунцов О.С.* Исследование отражения от криволинейных зеркал на плоскости в программе Wolfram Mathematica [Текст] / О.С. Сунцов, Л.А. Жихарев // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 2. — С. 29–45. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-2-29-45.
 39. *Филимонов Б.Н.* О студенческой научной работе по графическим дисциплинам [Текст] / Б.Н. Филимонов, А.А. Решетникова, А.Я. Степанов // Начертательная геометрия и инженерная графика: сб. научно-методических статей. — М.: Высшая школа, 1977. — Вып. 4. — С. 68–69.
 40. *Шибанов Д.Ю.* Об использовании средств распознавания речи в задаче обработки библиографических данных по инженерной геометрии [Текст] / Д.Ю. Шибанов, А.А. Бойков // Сборник материалов Тринадцатой международной научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Энергия-2018». — Иваново, 2018. — Т. 5. — С. 73.
 41. *Шкилевич А.А.* Графическое исследование функций комплексного переменного [Текст] / А.А. Шкилевич // Сборник материалов Тринадцатой международной научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Энергия-2018». — Иваново, 2018. — Т. 5. — С. 135.
 42. *Inchbald G.* The Archimedean honeycomb duals / G. Inchbald // The Mathematical Gazette. 1997. I. 81, pp. 213–219. DOI: 10.2307/3619198.

References

1. Alenina E.M., Bojkov A.A. Issledovanie odnogo semejstva krivykh chetvertogo poryadka [Investigation of a family of fourth-order curves]. *Sbornik materialov Dvenadtsatoy mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii studentov, aspirantov i molodyh uchenyh «Energiya 2017»* [Collection of materials of the Twelfth International Scientific and Technical Conference of Students, Postgraduate Students and Young Scientists «Energy-2017»]. Ivanovo. 2017, V. 5, pp. 184–185. (in Russian)
2. Bojkov A.A., SHulajkin D.A. Vizualizaciya geometricheskikh figur i otnoshenij kompleksnoj ploskosti sredstvami komp'yuternoj grafiki [Visualization of geometric shapes and relations of a complex plane by means of computer graphics]. *Sbornik materialov VIII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy internet-konferentsii «Problemy kachestva graficheskoy podgotovki studentov v tehnikeskom vuze: traditsii i innovatsii»* [Collection of materials from the VIII International Scientific and Practical Internet Conference «Problems of the quality of graphic training of students in a technical university: traditions and innovations»]. Perm, PNRPU Publ., 2019, pp. 72–93. (in Russian)
3. Bojkov A.A., Gudaev I.I. Geometricheskie modeli i algoritmy postroeniya sfericheskikh sechenij giperfraktala [Geometric models and algorithms for constructing spherical hyperfractal sections]. *Zhurnal yestestvenno-nauchnykh issledovanij* [Journal of Natural Science Research]. 2020, V. 5, I. 4, pp. 16–25. (in Russian)

4. Bojkov A.A. Konstruktivnaya geometriya nekotoryh algebraicheskikh krivykh v splajnovom predstavlenii [Constructive geometry of some algebraic curves in the spline representation]. *Sbornik trudov 33-y Mezhhdunar. konf. po komp'yuternoy grafike i mashinnomu zreniyu «GraphiCon 2023»* [Collection of proceedings of the 33rd International. conf. in Computer Graphics and Computer Vision «GraphiCon 2023»]. Moscow, M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences Publ., 2023, pp. 758–770. (in Russian)
5. Bojkov A.A. O postroenii modelej ob"ektov prostranstva chetyrekh i bolee izmerenij v uchebnom processe [On the construction of models of objects of space of four or more dimensions in the educational process]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2018, V. 5, I. 4, pp. 54–71. DOI: 10.12737/article_5c21f96dce5de8.36096061. (in Russian)
6. Bojkov A.A., Varfolomeeva A.A., Idrisova F.S., Pentyurina V.R. O sozdanii bibliograficheskoy bazy publikacij po inzhenernoj geometrii [On the creation of a bibliographic database of publications on engineering geometry]. *Sbornik materialov IX Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Nadezhnost' i dolgovechnost' mashin i mehanizmov»* [Collection of materials from the IX All-Russian Scientific and Practical Conference «Reliability and Durability of Machines and Mechanisms»]. Ivanovo. 2018, pp. 404–407. (in Russian)
7. Bojkov A.A., Orlova E.V., Chernova A.V., Shkilevich A.A. O sozdanii fraktal'nykh obrazov dlya dizajna i poligrafii i nekotorykh geometricheskikh obobshcheniyah, svyazannykh s nimi [On the creation of fractal images for design and printing and some geometric generalizations related to them]. *Sbornik materialov VIII Mezhhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy internet-konferentsii «Problemy kachestva graficheskoy podgotovki studentov v tekhnicheskoy vuzze: traditsii i innovatsii»* [Collection of materials from the VIII International Scientific and Practical Internet Conference «Problems of the quality of graphic training of students in a technical university: traditions and innovations»]. Perm, PNRPU Publ., 2019, pp. 325–339. (in Russian)
8. Bojkov A.A. O tekushchem sostoyanii spravochno-bibliograficheskoy sistemy po inzhenernoj geometrii [On the current state of the reference and bibliographic system for engineering geometry]. *Zhurnal tekhnicheskikh issledovaniy* [Journal of Technical Research]. 2020, V. 6, I. 2, pp. 29–34. (in Russian)
9. Bojkov A.A., Gudaev I.I. Ob odnom sposobe sozdaniya besshovnykh fraktal'nykh patternov dlya dizajna na osnove mnogomernogo podhoda [On one way to create seamless fractal patterns for design based on a multidimensional approach]. *Sbornik trudov Mezhhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Innovatsionnyye tehnologii v inzhenernoy grafike: problemy i perspektivy»* [Collection of proceedings of the International Scientific and Practical Conference «Innovative Technologies in Engineering Graphics: Problems and Prospects»]. Brest, Respublika
- Belarus', Novosibirsk, Rossiyskaya Federatsiya. Novosibirsk: NGASU (Sibstrin). 2021, pp. 35–39. (in Russian)
10. Bojkov A.A., Chernova P.A. Reshenie zadach nacheratatel'noy geometrii skladyvaniem lista bumagi (origami-geometriya) [Solving problems of descriptive geometry by folding a sheet of paper (origami geometry)]. *Sbornik materialov VIII Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Collection of materials of the VIII All-Russian Scientific and Practical Conference «Reliability and Durability of Machines and Mechanisms»]. Ivanovo. 2017, pp. 431–434. (in Russian)
11. Bojkov A.A., Varfolomeeva A.A. Spravochno-bibliograficheskaya sistema po inzhenernoj geometrii i ee primenenie v nauchnoy rabote studentov [Reference and bibliographic system for engineering geometry and its application in the scientific work of students]. *Sbornik trudov Mezhhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Innovatsionnyye tehnologii v inzhenernoy grafike: problemy i perspektivy»* [Collection of proceedings of the International Scientific and Practical Conference «Innovative Technologies in Engineering Graphics: Problems and Prospects»]. Brest, Respublika Belarus', Novosibirsk, Rossiyskaya Federatsiya. Novosibirsk: NGASU (Sibstrin). 2019, pp. 37–41. (in Russian)
12. Bojkov A.A., Malahov D.A. Tochnoe predstavlenie paraboly v SAPR «Kompas-3D» pri pomoshchi krivoj Bez'e [Accurate representation of a parabola in the Compass-3D CAD using the Bezier curve]. *Sbornik materialov VIII Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Collection of materials of the VIII All-Russian Scientific and Practical Conference «Reliability and Durability of Machines and Mechanisms»]. Ivanovo. 2018, pp. 407–411. (in Russian)
13. Bojkov A.A., Zaharova P.M. Ekvio"emnye graficheskie preobrazovaniya nekotorykh tel vrashcheniya [Equi-volumetric graphical transformations of some bodies of rotation]. *Sbornik trudov Mezhhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Innovatsionnyye tehnologii v inzhenernoy grafike: problemy i perspektivy»* [Collection of proceedings of the International Scientific and Practical Conference «Innovative Technologies in Engineering Graphics: Problems and Prospects»]. Brest, Respublika Belarus', Novosibirsk, Rossiyskaya Federatsiya. Brest, BrGTU. 2020, pp. 32–37. (in Russian)
14. Bojkov A.A., Sidnev P.S. Eksperimental'naya proverka konstruktivnykh algoritmov postroeniya kubicheskikh parabol pri pomoshchi krivykh Bez'e v SAPR «Kompas-3D» [Experimental verification of constructive algorithms for constructing cubic parabolas using Bezier curves in CAD «Compass-3D»]. *Zhurnal yestestvenno-nauchnykh issledovaniy* [Journal of Natural Science Research]. 2022, V. 7, I. 3, pp. 57–64. (in Russian)
15. Bolotina E.V., Efremov A.V. Uluchshennyj graficheskij algoritm postroeniya preobrazovaniya «krivoj kacheniya», i ego realizatsiya v Kompas-3D [An improved graphical algorithm for constructing the "rolling curve" transformation,

- and its implementation into a 3D Compass]. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=1SXUJPbV00U&list=PLrbLY3c-IbZ0W1KRfUuem8H5mbL4v-kZ&index=19>.
16. Vasnev I.P. Voprosy avtomatizatsii obrabotki bibliograficheskikh ssylok dlya spravochno-bibliograficheskoy sistemy po inzhenernoy geometrii [Questions of automation of processing bibliographic references for a reference and bibliographic system for engineering geometry]. *Zhurnal yestestvenno-nauchnykh issledovaniy* [Journal of Natural Science Research]. 2020, V. 6, I. 4, pp. 57–61. (in Russian)
 17. Vyshnepol'skij V.I., Zavarihina E.V., Pekh D.S. Geometricheskie mesta toчек, ravnootstoyashchih ot dvuh zadannykh geometricheskikh figur. CHast' 4: Geometricheskie mesta toчек, ravnoudalennykh ot dvuh sfer [Geometric locations of points equidistant from two given geometric shapes. Part 4: Geometric locations of points equidistant from two spheres]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2021, V. 9, I. 3, pp. 12–29. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-3-12-29. (in Russian)
 18. Vyshnepol'skij V.I., Zavarihina E.V., Egiazaryan K.T. Geometricheskie mesta toчек, ravnootstoyashchih ot dvuh zadannykh geometricheskikh figur. CHast' 5: geometricheskie mesta toчек, ravnoudalennykh ot sfery i ploskosti [Geometric locations of points equidistant from two given geometric shapes. Part 5: Geometric locations of points equidistant from the sphere and plane]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2021, V. 9, I. 4, pp. 22–34. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-22-34. (in Russian)
 19. Vyshnepol'skij V.I., Bojkov A.A., Egiazaryan K.T., Kadykova N.S. Metodicheskaya sistema provedeniya zanyatij na kafedre «Inzhenernaya grafika» RTU MIREA [Methodical system of conducting classes at the Department of Engineering Graphics of RTU MIREA]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2023, V. 11, I. 1, pp. 23–34. DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-23-34. (in Russian)
 20. Vyshnepol'skij V.I., Kadykova N.S., Efremov A.V., Egiazaryan K.T. Metodicheskie sistemy podgotovki i provedeniya olimpiad i razvitiya intellektual'nykh sposobnostej studentov v RTU MIREA [Methodological systems for the preparation and conduct of Olympiads and the development of students' intellectual abilities at RTU MIREA]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2023, V. 11, I. 1, pp. 44–60. DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-44-60. (in Russian)
 21. Vyshnepol'skij V.I., Bojkov A.A., Egiazaryan K.T., Efremov A.V. Nauchno-issledovatel'skaya rabota na kafedre «Inzhenernaya grafika» RTU MIREA [Research work at the Department of Engineering Graphics of RTU MIREA]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2023, V. 11, I. 1, pp. 70–85. DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-44-60. (in Russian)
 22. Vyshnepol'skij V.I., Bojkov A.A., Efremov A.V., Kadykova N.S. Organizatsiya praktiko-orientirovannogo obucheniya na kafedre «Inzhenernaya grafika» RTU MIREA [Organization of practice-oriented training at the Department of Engineering Graphics of RTU MIREA]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2023, V. 11, I. 1, pp. 35–43. DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-35-43. (in Russian)
 23. Golovanov N.N. *Geometricheskoe modelirovanie* [Geometric modeling]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 2002. 472 p. (in Russian)
 24. Ermolaev A.R., Bojkov A.A. Realizatsiya algoritmov graficheskogo differencirovaniya i integrirovaniya sredstvami yazyka geometricheskikh postroenij [Implementation of algorithms for graphical differentiation and integration by means of the language of geometric constructions]. *Sbornik materialov Trinadtsatoy mezhdunarodnoy nauchno-tehnicheskoy konferentsii studentov, aspirantov i molodykh uchennykh «Energiya 2018»* [Collection of materials of the Thirteenth International Scientific and Technical Conference of Students, Postgraduate Students and Young Scientists «Energy-2018»]. Ivanovo. 2018, V. 5, p. 117. (in Russian)
 25. Efremov A.V., Vereshchagina T.A., Igonina A.A., Kadykova N.S., Rustamyan V.V. Analiz traektorii dvizheniya toчек analogov treugol'nika Relo, vrashchaemykh v ramkakh kvadratnoj i rombovidnoj form [Analysis of the trajectory of the points of the analogues of the Reulot triangle rotated within the framework of square and diamond shapes]. *Zhurnal yestestvenno-nauchnykh issledovaniy* [Journal of Natural Science Research]. 2021, V. 7, I. 2, pp. 31–37. (in Russian)
 26. Efremov A.V. Pravil'nye mnogopsevdogranniki, obrazovannye otsekami giperbolicheskikh paraboloidov [Regular multipolytic boundaries formed by compartments of hyperbolic paraboloids]. *Zhurnal tekhnicheskikh issledovaniy* [Journal of Technical Research]. 2020, V. 6, I. 2, pp. 21–28. (in Russian)
 27. Efremov A.V., Vereshchagina T.A., Kadykova N.S., Rustamyan V.V. Prostranstvennye geometricheskie yachejki — kvazimnogogranniki [Spatial geometric cells are quasi-polyhedra]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2021, V. 9, I. 3, pp. 30–38. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-3-30-38. (in Russian)
 28. Ivanov G.S. O tematike NIRS po nachertatel'noy geometrii [On the subject of research on descriptive geometry]. *Sbornik nauchno-metodicheskikh statey po nachertatel'noy geometrii i inzhenernoy grafike* [Collection of scientific and methodological articles on descriptive geometry and engineering graphics]. Moscow, Higher School Publ., 1990, V. 16, pp. 7–11. (in Russian)
 29. Ignat'ev S.A., Muratbakeev E.H., Voronina M.V. Povyshenie naglyadnosti predstavleniya izuchaemykh v nachertatel'noy geometrii ob'ektov [Increasing the visibility of the representation of objects studied in descriptive geometry]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2022, V. 10, I. 1, pp. 44–53. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-1-44-53. (in Russian)
 30. Labut' A. *Snova o mnogomernosti mnozhestva Mandel'brot–Zhyulia* [Again about the multidimensionality of the

- Mandelbrot–Julia set]. URL: <http://www.sciteclibrary.ru/texts/rus/stat/st2526.htm>. Title from the screen (accessed 11 September 2023).
31. Mandel'brot B.B. *Fraktal'naya geometriya prirody* [Fractal geometry of nature]. Moscow, Institute of Computer Sciences Publ., 2002. 656 p. (in Russian)
 32. Mihajlenko V.E., Kornienko L.V. NIRS, nachinaya s pervogo kursa [RWS, starting from the first year]. *Sbornik nauchno-metodicheskikh statey po nachertatel'noy geometrii i inzhenernoy grafike* [Collection of scientific and methodological articles on descriptive geometry and engineering graphics]. Moscow, Higher School Publ., 1990, V. 16, pp. 3–6. (in Russian)
 33. Peklich V.A. *Vysshaya nachertatel'naya geometriya* [Higher descriptive geometry.] Moscow, ASV Publ., 2000. 344 p. (in Russian)
 34. Peklich V.A. *Mnimaya nachertatel'naya geometriya* [Imaginary descriptive geometry.] Moscow, ASV Publ., 2007. 104 p. (in Russian)
 35. Rozov S.V., Kovalenko I.I. O nauchnoj rabote studentov na mladshih kursah vuzov [On the scientific work of students in the junior courses of universities]. *Sbornik nauchno-metodicheskikh statey po nachertatel'noy geometrii i inzhenernoy grafike* [Collection of scientific and methodological articles on descriptive geometry and engineering graphics]. Moscow, Higher School Publ., 1977, V. 4, pp. 66–68. (in Russian)
 36. Rotkov S.I., Konopackij E.V., Panchuk K.L. Problema sokrashcheniya kafedr geometro-graficheskoy podgotovki v universitetah Rossii [The problem of reducing the departments of geometric and graphic training in Russian universities]. *Omskiy nauchnyy vestnik* [Omsk Scientific Bulletin]. 2023, I. 4, pp. 29–37. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-188-29-37. (in Russian)
 37. *Sbornik nauchno-metodicheskikh statey po nachertatel'noy geometrii i inzhenernoy grafike. Nauchno-issledovatel'skaya rabota studentov* [Collection of scientific and methodological articles on descriptive geometry and engineering graphics. Student research work]. Moscow, MPI Publ., 1990, V. 16. 136 p. (in Russian)
 38. Suncov O.S., ZHiharev L.A. Issledovaniye otrazheniya ot krivolinyeynyh zerkal na ploskosti v programme Wolfram Mathematica [Studying reflection from curved mirrors on a plane in Wolfram Mathematica]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2021, V. 9, I. 2, pp. 29–45. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-2-29-45. (in Russian)
 39. Filimonov B.N., Reshetnikova A.A., Stepanov A.YA. O studencheskoj nauchnoj rabote po graficheskim disciplinam [About student scientific work in graphic disciplines]. *Sbornik nauchno-metodicheskikh statey po nachertatel'noy geometrii i inzhenernoy grafike* [Collection of scientific and methodological articles on descriptive geometry and engineering graphics]. Moscow, Higher School Publ., 1977, V. 4, pp. 68–69. (in Russian)
 40. Hibanov D.YU., Bojkov A.A. Ob ispol'zovanii sredstv raspoznavaniya rechi v zadache obrabotki bibliograficheskikh dannyh po inzhenernoj geometrii [On the use of speech recognition tools in the task of processing bibliographic data on engineering geometry]. *Sbornik materialov Trinadtsatoy mezhdunarodnoy nauchno-tehnicheskoy konferentsii studentov, aspirantov i molodyh uchenykh «Energiya-2018»* [Collection of materials of the Thirteenth International Scientific and Technical Conference of Students, Postgraduate Students and Young Scientists «Energy-2018»]. Ivanovo. 2018, V. 5, P. 73. (in Russian)
 41. SHkilevich A.A. Graficheskoe issledovanie funktsij kompleksnogo peremennogo [Graphical study of the functions of a complex variable]. *Sbornik materialov Trinadtsatoy mezhdunarodnoy nauchno-tehnicheskoy konferentsii studentov, aspirantov i molodyh uchenykh «Energiya 2018»* [Collection of materials of the Thirteenth International Scientific and Technical Conference of Students, Postgraduate Students and Young Scientists «Energy-2018»]. Ivanovo. 2018, V. 5, P. 135. (in Russian)
 42. Inchbald G. The Archimedean honeycomb duals. *The Mathematical Gazette*. 1997, I. 81, pp. 213–219. DOI: 10.2307/3619198.