

# **Алгебраические поверхности квазивращения и аналитическое определение их порядка**

## **Algebraic surfaces of quasi-rotation and analytical determination of their order**

### **Антонова И.В.**

канд.пед. наук., доцент кафедры высшей и прикладной математики, МИРЭА – Российский технологический университет  
e-mail: irvikan@yandex.ru

### **Antonova I.V.**

Ph.D. in Philosophy, Associate Professor Department of Higher and Applied Mathematics, MIREA - Russian Technological University  
e-mail: irvikan@yandex.ru

### **Соломонова Е.В.**

старший преподаватель кафедры высшей и прикладной математики, МИРЭА – Российский технологический университет  
e-mail: katrin-vaso@yandex.ru

### **Solomonova E.V.**

Senior Lecturer, Department of Higher and Applied Mathematics, MIREA - Russian Technological University  
e-mail: katrin-vaso@yandex.ru

### **Кадыкова Н.С.**

канд. техн. наук, доцент кафедры инженерной графики, МИРЭА – Российский технологический университет  
e-mail: nkadykova@mail.ru

### **Kadykova N.S.**

Ph.D. of Engineering, Associate Professor Department of Engineering Graphics, MIREA - Russian Technological University  
e-mail: nkadykova@mail.ru

### **Аннотация**

В данной статье приведены исследования уравнений, описывающих поверхности квазивращения с целью определения их порядка, с использованием аналитического подхода. Рассматриваются уравнения сечения поверхности, лежащего в плоскости её гиперболической оси в одном частном случае, когда образующей линией является прямая, проходящая по действительной оси гиперболы, совпадающей с осью абсцисс. В анализе рассматриваются три области значений абсциссы, в том числе точка, лежащая в фокусе гиперболической оси. Также в данной работе приводятся условия получения алгебраических и трансцендентных поверхностей квазивращения. Так как соответствие квазивращению выстраивается относительно алгебраических кривых, то тип получаемых поверхностей зависит от типа образующей кривой, на форму образующей кривой при этом не накладывается каких либо ограничений.

**Ключевые слова:** циклические поверхности, квазивращение, алгебраические поверхности.

## Abstract

This article presents studies of equations describing quasi-rotation surfaces in order to determine their order using an analytical approach. The equations of the section of a surface lying in the plane of its hyperbolic axis are considered in one particular case, when the forming line is a straight line passing along the real axis of the hyperbola coinciding with the axis of the abscissa. The analysis considers three areas of abscissa values, including the point lying in the focus of the hyperbolic axis. Also in this paper, the conditions for obtaining algebraic and transcendental quasi-rotation surfaces are given. Since the quasi-rotation correspondence is built relative to algebraic curves, the type of surfaces obtained depends on the type of the generating curve, and no restrictions are imposed on the shape of the generating curve.

**Keywords:** cyclic surfaces, quasi-rotation, algebraic surfaces.

**Введение.** Ранее в работах [1-5] приведено аналитическое описание квазивращения – соответствия, при котором каждой точке плоскости приводится в соответствие четыре окружности. В работе [1] рассмотрены свойства образов точек в различных частных случаях расположения прообраза относительно эллиптической оси квазисимметрии. В статье [20] показано применение графического способа определения порядка поверхности квазивращения. Данный способ позволяет утверждать, что порядок уравнения, описывающего поверхность в неявном виде, будет не ниже того, который получен графически. Однако, смысл в определении порядка уравнения имеется только в случае с алгебраическими кривыми. Таким образом, необходимо обосновать то, что рассматриваемая поверхность является алгебраической, а затем аналитически определить её порядок, что позволит изучить её геометрические свойства.

Исследования аналитических свойств поверхностей [6-17, 21,23] проводятся с целью расширения возможностей их применения при решении прикладных задач и возможности применения их в технике и технологии.

## Постановка задачи

1. Определить условие образования алгебраической и трансцендентной поверхности квазивращения.

2. Определить порядок алгебраической поверхности квазивращения аналитическим способом в одном особом случае. Сопоставить результаты проведённых исследований с ранее полученными с использованием графического способа определения порядка поверхностей.

## Теория

Пересечение алгебраической поверхности плоскостью образует алгебраическую кривую. Следовательно, если плоская кривая, лежащая на поверхности, описывается трансцендентным уравнением, то уравнение такой поверхности не может описываться алгебраическим уравнением. Следовательно, такая поверхность является трансцендентной. То есть если в качестве образующей использовать трансцендентную кривую, то полученная поверхность будет трансцендентной. Однако, неочевидно, существуют ли плоские трансцендентные кривые на поверхностях квазивращения с алгебраическими образующими кривыми. Такая возможность возникает, так как в уравнениях, приведённых в работах [18, 19], присутствуют тригонометрические функции.

1. Для решения поставленных задач использовались результаты, представленные в статьях [18, 19]. В работе [19] приведена тройка параметрических уравнений и формулы расчёта их коэффициентов, описывающих поверхность квазивращения:

$$\begin{aligned}x &= r(\cos \beta + 1) \cos \theta + x_l, \\y &= r(\cos \beta + 1) \sin \theta + y_l, \\z &= r \sin \beta,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $x_l$  и  $y_l$  – это координаты точки, лежащей на образующей кривой,  $r$  – радиус образующихся окружностей,  $\theta$  – угол наклона плоскости, в которой лежит окружность к оси  $OX$ ,  $\beta$  – параметр, определяющий положение точки на образующейся окружности. На рис. 1 изображено построение двух окружностей  $k2'$  и  $k2''$ , образованных квазивращением точки  $L$  относительно гиперболической оси  $g$ .

Преобразуем уравнения (1) в уравнение с тремя переменными  $x, y, z$ , исключив  $\beta, \theta$ .

$$4r^2((x - x_l)^2 + (y - y_l)^2) = ((x - x_l)^2 + (y - y_l)^2 + z^2)^2 \quad (2)$$

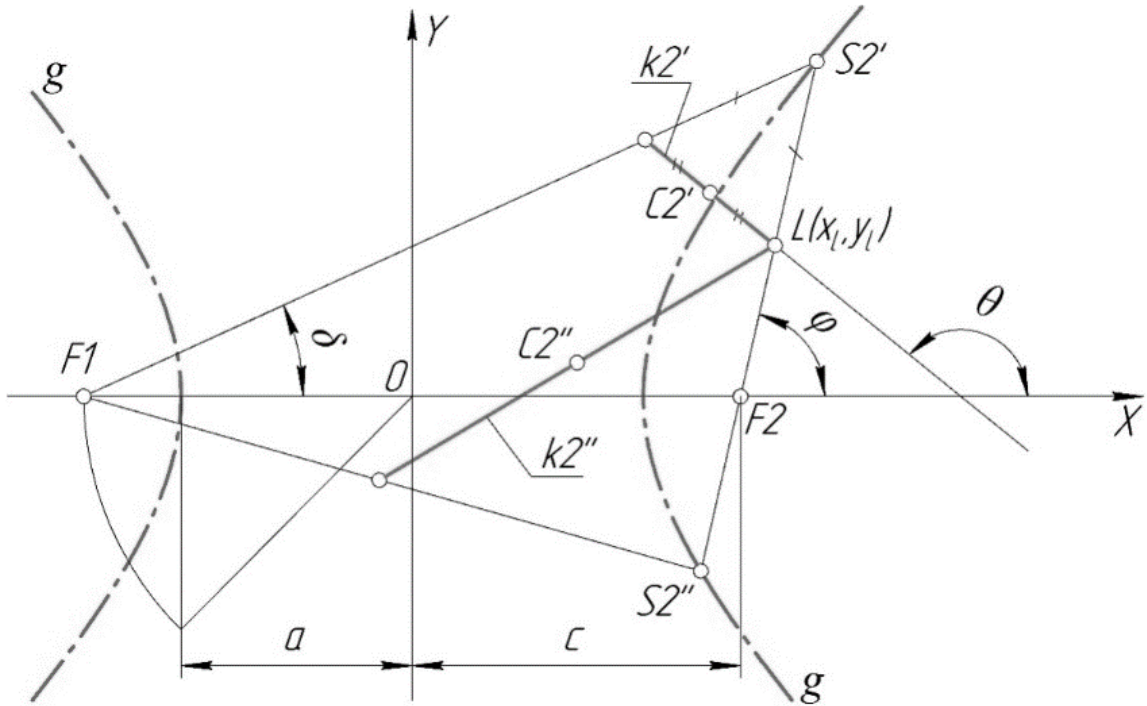


Рис. 1. Квазивращение точки  $L$  вокруг гиперболической оси  $g$  относительно фокуса  $F2$

Полученное уравнение является формулой образа кривой линии, описанной параметрическими уравнениями  $l(x_l, y_l)$  при её квазивращении относительно гиперболической оси. Однако формулы расчёта  $r$  и  $x_l, y_l$ , содержат трансцендентные функции, а значит уравнение (2) может описывать трансцендентную поверхность.

Докажем, что поверхность, описываемая уравнением (2), является алгебраической.

Уравнения (1) допускают исключение трансцендентных функций и преобразуются к алгебраическому уравнению

$$\left( \frac{y_l(x - x_l)}{y - y_l} + x_l - c \right)^2 = \varepsilon^2(y_l^2 + (x_l - c)^2) \quad (3)$$

Формулу расчёта величины радиуса  $r$  из работы [19] можно преобразовать в формулу:

$$r = \left( \frac{p}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)} - \sqrt{y_l^2 + (x_l - c)^2} \right) \sqrt{\frac{a - c \cos \varphi}{2a + v}}, \quad (4)$$

$$\text{где } \cos \varphi = \frac{x_l - c}{\sqrt{y_l^2 + (x_l - c)^2}} \quad (5)$$

Так как правая часть уравнения (5) является алгебраическим выражением, то и уравнение (4), а следовательно, и (3) являются алгебраическими, если  $x_l$  и  $y_l$  – алгебраические. Трансцендентные поверхности квазивращения могут быть получены только с использованием трансцендентных образующих кривых.

Как известно, числа, являющиеся корнями алгебраических уравнений с алгебраическими коэффициентами, являются алгебраическими. Общие формулы, выражающие корни алгебраических уравнений через их коэффициенты и содержащие только конечное число

сложений, вычитаний, умножений, делений и извлечений корня, существуют только для уравнений степени 1, 2, 3 и 4.

Таким образом, решения уравнения (2)  $x_l = x_l(x; y)$  являются алгебраическими. Подставляя найденные корни в уравнение окружности,

$$4r^2((x - x_l)^2 + (y - y_l)^2) = ((x - x_l)^2 + (y - y_l)^2 + z^2)^2$$

получим алгебраическое уравнение, которое определяет алгебраическую кривую.

Пусть криволинейная ось квазивращения находится на плоскости ХОУ. Тогда плоскости образующихся окружностей будут перпендикулярны плоскости ХОУ. Каждая из этих окружностей задается уравнениями (1).

Рассмотрим случай квазивращения относительно гиперболической оси. Здесь  $(x_l; y_l)$  – параметрические уравнения прямой, лежащей на оси ОХ:

$$\begin{cases} x_l = t \\ y_l = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Зададим значения параметров гиперболы. Пусть  $a = 2; c = 4$ .

Тогда

$$p = 6; \varepsilon = 2, \quad tg\varphi = \frac{y_l}{x_l - c} = 0 \text{ при } t \neq c.$$

Следовательно,  $\varphi = 0; \cos\varphi = 1$  или  $\varphi = \pi; \cos\varphi = -1$ .

Используя формулы, приведённые в работе [14], вычисляем

$$\text{При } \varphi = 0 \text{ получаем } v = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi} = -6, \text{ что не подходит, так как } v \geq 0.$$

При  $\varphi = \pi$  получаем  $v = 2$ . Итак,  $\varphi = \pi$ .

Рассмотрим также случай  $v = 6$ , так как  $v$  – это расстояние от фокуса до гиперболы. Для левой ветви гиперболы по рис. 1 получаем  $v = 6$ .

$$u = \sqrt{y_l^2 + (x_l - c)^2} = |x_l - c| = |t - 4|,$$

$$\cos\delta = \frac{2c + v\cos\varphi}{2a + v} = 1,$$

Следовательно,  $\delta = 0$  или  $\delta = 2\pi$ ;

$$\theta = \frac{\pi - \delta - \varphi}{2} = 0 \text{ или } \theta = \pi.$$

Для  $v = 2$

$$r = (v - u)\sin\left(\frac{\varphi - \delta}{2}\right) = (2 - |t - 4|)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - |t - 4|. \quad (7)$$

Для  $v = 6$

$$r = (v - u)\sin\left(\frac{\varphi - \delta}{2}\right) = (6 - |t - 4|)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6 - |t - 4|. \quad (8)$$

Теперь запишем уравнение поверхности квазивращения.

1) Случай  $v = 2$

Для этого подставим (6) и (7) в формулу (2). Получим:

$$4(2 - |t - 4|)^2((x - t)^2 + y^2) = ((x - t)^2 + y^2 + z^2)^2$$

Для получения алгебраического уравнения поверхности квазивращения преобразуем полученное уравнение к виду, не содержащего модуля  $|t - 4|$ . Для этого возводим первый множитель уравнения в квадрат. Получаем

$$4(4 - 4|t - 4| + (t - 4)^2)((x - t)^2 + y^2) = ((x - t)^2 + y^2 + z^2)^2$$

Раскрываем первую скобку в левой части уравнения:

$$16((x - t)^2 + y^2) - 16|t - 4| \cdot ((x - t)^2 + y^2) + 4(t - 4)^2 \cdot ((x - t)^2 + y^2) = ((x - t)^2 + y^2 + z^2)^2$$

Выражаем из полученного уравнения слагаемое, содержащее модуль  $|t - 4|$ :

$$-16|t - 4| \cdot ((x - t)^2 + y^2) = ((x - t)^2 + y^2 + z^2)^2 - 16((x - t)^2 + y^2) - 4(t - 4)^2 \cdot ((x - t)^2 + y^2)$$

Теперь возводим в квадрат обе части полученного уравнения. Получаем

$$256(t - 4)^2((x - t)^2 + y^2)^2 =$$

$$(((x-t)^2 + y^2 + z^2)^2 - 16((x-t)^2 + y^2) - 4(t-4)^2 \cdot ((x-t)^2 + y^2))^2 \quad (9)$$

Для определения степени полученного алгебраического уравнения поверхности квазивращения найдем  $t$  как функцию переменных.

Для этого подставим

$$\begin{aligned} x_l &= t, \\ y_l &= 0, \end{aligned}$$

и полученное значение  $\theta = \pi$  в уравнения (1). Тогда получаем:

$$\begin{cases} x = -r(\cos\beta + 1) + t \\ y = 0 \\ z = r\sin\beta \end{cases}$$

Выражаем из первого уравнения  $\cos\beta$ , из третьего уравнения  $\sin\beta$ . Получаем

$$\begin{cases} \cos\beta = \frac{x-t}{-r} - 1 \\ \sin\beta = \frac{z}{r} \end{cases}$$

Теперь возводим оба уравнения в квадрат, складываем и применяем основное тригонометрическое тождество. В результате получаем

$$\left(\frac{x-t}{-r} - 1\right)^2 + \left(\frac{z}{r}\right)^2 = 1 \quad (10)$$

Вычисляем радиус  $r$  по формуле (7):

$$r = 2 - |t - 4|.$$

При этом, так как  $r \geq 0$ , то  $2 \leq t \leq 6$ .

По определению модуля имеем

$$|t - 4| = \begin{cases} t - 4, & t \geq 4 \\ 4 - t, & t < 4 \end{cases}$$

Таким образом, целесообразно рассматривать три случая:

$$2 \leq t < 4, \quad 4 < t \leq 6, \quad t = 4.$$

Случай 1:  $2 \leq t < 4$

Тогда

$$r = 2 - 4 + t = t - 2.$$

Подставляем полученное значение  $r$  в уравнение (10). Получаем

$$\left(\frac{x-t}{2-t} - 1\right)^2 + \left(\frac{z}{t-2}\right)^2 = 1$$

В результате несложных преобразований получаем уравнение

$$t^2 - 4t - (x^2 - 4x + z^2) = 0,$$

корнями которого являются выражения:

$$t_1 = 2 + \sqrt{(x-2)^2 + z^2} \quad (11)$$

Учитывая  $t < 4$ , получаем, что это значение  $t_1$  реализуется при условии  $(x-2)^2 + z^2 < 4$ .

$$t_2 = 2 - \sqrt{(x-2)^2 + z^2} \quad (12)$$

Случай 2:  $4 < t \leq 6$

Тогда

$$r = 2 - t + 4 = 6 - t$$

Подставляем полученное значение  $r$  в уравнение (10). Получаем

$$\left(\frac{x-t}{t-6} - 1\right)^2 + \left(\frac{z}{6-t}\right)^2 = 1$$

В результате несложных преобразований получаем уравнение

$$3t^2 - 2t(2x+6) + (x^2 + 12x + z^2) = 0,$$

корнями которого являются выражения:

$$t_3 = \frac{2x + 6 + \sqrt{(x-6)^2 - 3z^2}}{3} \quad (13)$$

Учитывая  $t > 4$ , получаем, что это значение  $t_3$  реализуется при условии  $(x-2)^2 + z^2 < 4$ .

$$t_4 = \frac{2x + 6 - \sqrt{(x-6)^2 - 3z^2}}{3} \quad (14)$$

Учитывая, что  $t > 4$ , получаем, что  $t_4$  реализуется при условии  $(x-2)^2 + z^2 > 4$ .

Случай 3:  $t = 4$

В этом случае  $r = 2$ .

Теперь будем поочередно подставлять найденные значения  $t$  и  $r$  в (9).

Получаем:

При  $t_1 = 2 + \sqrt{(x-2)^2 + z^2}$  имеем двойную плоскость  $y^2 = 0$  и поверхность 4 порядка  $y^4 = 16(x-2)^4 + 16(x-2)^2z^2$ , которая реализуется при условии  $(x-2)^2 + z^2 < 4$ .

При  $t_2 = 2 - \sqrt{(x-2)^2 + z^2}$  получаем пустое множество.

При  $t_3 = \frac{2x+6+\sqrt{(x-6)^2-3z^2}}{3}$  имеем двойную плоскость  $y^2 = 0$  и поверхность 4 порядка  $400(x-6)^2((x-6)^2 - 3z^2) = (24z^2 + 9y^2 - 16(x-6)^2)^2$ , которая реализуется при условии  $(x-2)^2 + z^2 < 4$ .

При  $t_4 = \frac{2x+6-\sqrt{(x-6)^2-3z^2}}{3}$  имеем двойную плоскость  $y^2 = 0$  и поверхность 4 порядка  $400(x-6)^2((x-6)^2 - 3z^2) = (24z^2 + 9y^2 - 16(x-6)^2)^2$ , которая реализуется при условии  $(x-2)^2 + z^2 > 4$ ,  $x > 3$ .

При  $t = 4$  получаем поверхность 4 порядка  $((x-4)^2 + y^2 + z^2)^2 = 16((x-4)^2 + y^2)$ .

2) Случай  $v = 6$

Для этого подставим (6) и (8) в формулу (2). Получим:

$$4(6 - |t - 4|)^2((x-t)^2 + y^2) = ((x-t)^2 + y^2 + z^2)^2$$

Аналогичными преобразованиями получаем следующий результат.

При  $t < 4$  имеем 2 значения

$$t_5 = -2 + \sqrt{(x+2)^2 + z^2} \text{ и } t_6 = -2 - \sqrt{(x+2)^2 + z^2}.$$

$t_5$  дает двойную плоскость  $y^2 = 0$  и поверхность 4 порядка

$$y^4 = 16(x+2)^4 + 16(x+2)^2z^2, \text{ которая реализуется при условии } (x+2)^2 + z^2 < 36.$$

$t_6$  дает пустое множество.

При  $t > 4$  имеем 2 значения

$$t_7 = \frac{2x+10+\sqrt{(x-10)^2-3z^2}}{3} \text{ и } t_8 = \frac{2x+10-\sqrt{(x-10)^2-3z^2}}{3}.$$

$t_7$  дает двойную плоскость  $y^2 = 0$  и поверхность 4 порядка

$$400(x-10)^2((x-10)^2 - 3z^2) = (24z^2 + 9y^2 - 16(x-10)^2)^2, \text{ которая реализуется при условии } (x+2)^2 + z^2 < 36.$$

$t_8$  дает двойную плоскость  $y^2 = 0$  и поверхность 4 порядка

$$400(x-10)^2((x-10)^2 - 3z^2) = (24z^2 + 9y^2 - 16(x-10)^2)^2, \text{ которая реализуется при условии } (x+2)^2 + z^2 > 36.$$

**Выводы.**

В данной статье мы показали, что единственным условием образования алгебраической поверхности квазивращения является использование в качестве образующей - алгебраической кривой. Также можно сделать вывод о необходимости использования трансцендентных кривых для образования трансцендентных поверхностей квазивращения. Достаточность данного условия для получения трансцендентных поверхностей формально остаётся под вопросом. Выведены уравнения образов точек, принадлежащих образующей

прямой для случая, когда она лежит на действительной прямой оси гиперболы. Этими образами являются окружности, совокупность которых образует двойную плоскость при квазивращении относительно одного из фокусов коники. То есть по двум фокусам – четыре плоскости, что соответствует результатам, полученным методом синтетической геометрии в работах [20, 22]. Также показано особое свойство образующей точки, лежащей в фокусе. Квазивращение этой точки образует поверхность четвёртого порядка. Результаты исследований, приведённые в данной статье, могут использоваться при применении поверхностей квазивращения для моделирования поверхностей в решении прикладных задач.

### Список литературы

1. Антонова И.В. Математическое описание вращения точки вокруг эллиптической оси в некоторых частных случаях [Текст] / И.В. Антонова, И.А. Беглов, Е.В. Соломонова. // Геометрия и графика. – 2019. – Т. 7. – № 3. – С. 36-50 – DOI: 10.12737/article\_5dce66dd9fb966.59423840.
2. Антонова И.В. Математическое описание частного случая квазивращения фокуса эллипса вокруг эллиптической оси [Текст] / И.В. Антонова, Е.В. Соломонова, Н.С. Кадыкова // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 1. — С. 38-44. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-1-38-44.
3. Беглов И.А. Атлас поверхностей квазивращения: атлас [Текст] / И.А. Беглов. – М.: Инфра-М, 2022. – 76 с.
4. Беглов И.А. Математическое описание метода вращения точки вокруг криволинейной оси второго порядка [Текст] / И.А. Беглов, В.В. Рустамян, И.В. Антонова // Геометрия и графика. – 2018. – Т. 6. – № 4. – С. 39-46. – DOI: 10.12737/article\_5c21f6e832b4d2.25216268.
5. Беглов И.А. Метод вращения геометрических объектов вокруг криволинейной оси [Текст] / И.А. Беглов, В.В. Рустамян // Геометрия и графика. – 2017. – Т. 5. – № 3. – С. 45-50. – DOI: 10.12737/article\_59bfa4eb0bf488.99866490.
6. Бойков А.А. Разработка и применение языка геометрических построений для создания компьютерных геометрических моделей [Текст] / А.А. Бойков // Проблемы машиноведения: материалы V Международной научно-технической конференции, Омск, 16-17 марта 2021 года. – Омск: Омский государственный технический университет, 2021. – С. 423-429. – DOI: 10.25206/978-5-8149-3246-4-2021-423-429.
7. Вышнепольский В.И. Всероссийские научно-методическая конференция «Проблемы инженерной геометрии» и семинар «Геометрия и графика»: итоги 2021 г. [Текст] / В.И. Вышнепольский, Н.С. Кадыкова, Т.А. Верещагина // Геометрия и графика. – 2022. – Т. 10. – № 2. – С. 35 – 52. – DOI: 10. 12737 /2308 -4898-2022 -10-2 -35 -52.
8. Вышнепольский В.И. Геометрические места точек, равноотстоящих от двух заданных геометрических фигур. часть 4: геометрические места точек, равноудаленных от двух сфер [Текст] / В.И. Вышнепольский, Е.В. Заварихина, Д.С. Пех // Геометрия и графика. – 2021. – Т. 9. – № 3. – С. 12-29. – DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-3-12-29.
9. Вышнепольский В.И. Геометрические места точек, равноотстоящих от двух заданных геометрических фигур. часть 5: геометрические места точек, равноудаленных от сферы и плоскости [Текст] / В.И. Вышнепольский, Е.В. Заварихина, К.Т. Егиазарян // Геометрия и графика. – 2021. – Т. 9. – № 4. – С. 22-34. – DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-22-34.
10. Вышнепольский В.И. Научно-исследовательская работа на кафедре «Инженерная графика» РТУ МИРЭА [Текст] / В.И. Вышнепольский, А.А. Бойков, К.Т. Егиазарян, А.В. Ефремов // Геометрия и графика. – 2023. – Т. 11. – № 1. – С. 70-85. – DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-70-85.

11. Неснов Д.В. Область правильной координации пространства правильными коническими координатами [Текст] / Д.В. Неснов // Геометрия и графика. – 2023. – Т. 11. – № 3. – С. 2 – 11. – DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-2-7-17.
12. Панчук К.Л. Математические основы геометрического моделирования кривых линий [Текст] / К.Л. Панчук, В.Ю. Юрков, Н.В. Кайгородцева. – Омск: ОмГТУ, 2020. – 198 с.
13. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии: учебник для государственных университетов [Текст] / П.К. Рашевский. – М.: ЛКИ, 2008. – 428 с.
14. Рустамян В.В. Синтетическое представление преобразования «косая симметрия» на примере преобразования эллипса [Текст] / В.В. Рустамян, Е.В. Баянов, Р.Б. Славин // Геометрия и графика. – 2023. – Т. 11. – № 3. – С. 12 – 18. – DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-2-18-26.
15. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения [Текст] / А.А. Савелов. – М.: Либроком, 2014. – 294 с.
16. Сальков Н.А. Об одном способе формирования коник [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. – 2022. – Т. 10. – № 4. – С. 3-12. – DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-4-3-12.
17. Сунцов О.С. Исследование отражения от криволинейных зеркал на плоскости в программе Wolfram Mathematica [Текст] / О.С. Сунцов, Л.А. Жихарев // Геометрия и графика. – 2021. – Т. 9. – № 2. – С. 29-45. – DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-2-29-45.
18. Beglov I.A. Application of quasi-rotation surface segments in architectural prototyping [Text] / I.A. Beglov, V.V. Rustamyan, R.A. Verbitskiy // Journal of Physics: conference series, 15, Omsk, 9-11 November 2021. – Omsk, 2022. – V. 2182. – P. 012002. – DOI: 10.1088/1742-6596/2182/1/012002.
19. Beglov I.A. Computer geometric modeling of quasi-rotation surfaces [Text] / I.A. Beglov // Journal of physics: conference series: 5. Omsk, 16-17 March 2021. – Omsk, 2021. – V. 1915. – P. 012057. – DOI: 10.1088/1742-6596/1901/1/012057.
20. Beglov I.A. Generation of the surfaces via quasi-rotation of higher order [Text] / I.A. Beglov // Journal of physics: conference series: IV International Scientific and Technical Conference «Mechanical Science and Technology Update», MSTU 2020, Omsk, 17-19 March 2020. – Omsk: Institute of physics publishing, 2020. – V. 1546. – P. 012032. – DOI: 10.1088/1742-6596/1546/1/012032.
21. Beglov I.A. N-n-digit interrelations between the sets within the  $R^2$  plane generated by quasi-rotation of  $R^3$  space [Text] / I.A. Beglov // Journal of physics: conference series: IV International Scientific and Technical Conference «Mechanical Science and Technology Update», MSTU 2020, Omsk, 17-19 March 2020. – Omsk: Institute of physics publishing, 2020. – V. 1546. – P. 012033. – DOI: 10.1088/1742-6596/1546/1/012033.
22. Beglov I. Plane tangent to quasi-rotation surface [Text] / I. Beglov, K. Panchuk // CEUR Workshop Proceedings: 30, Saint Petersburg, 22-25 September 2020. – Saint Petersburg, 2020.
23. Panchuk K. Spline curves formation given extreme derivatives [Text] / K. Panchuk, T. Myasoedova, E. Lyubchinov // Mathematics. – 2021. – V. 9 (1). – P. 1-29. – DOI: 10.3390/math9010047.