

## НАУЧНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИИ

УДК 514.83

DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-3-3-11

**Д.В. Неснов**

Канд. техн. наук, доцент,  
Самарский государственный технический университет,  
Россия, 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244

### Область правильной координации пространства нормальными коническими координатами

**Аннотация.** Теория поля широко представлена в сферической и цилиндрической системах координат, так как хорошо изучен математический аппарат данных систем координат. Источники поля с более сложными структурами требуют новых подходов к их изучению. В работе [11] была введена нормальная коническая система координат. Основная цель работы заключается в распространении области применения классических методов теории поля на новые формы источников (стоков) и граничных поверхностей благодаря применению таких координатных систем, в которых эти формы одновременно являются и поверхностями уровня поля, и координатными поверхностями системы координат. Поиск специальной координации пространства, а также определение тех условий, при которых параметризация позволяет распространить классические методы теории поля на нетрадиционные источники, стоки, наборы других условий, — задача актуальная. Такое распространение возможно на основе введения специальной координации пространства в условиях совпадения координатных поверхностей координации с поверхностями уровня поля или с поверхностями, которые являются предельными в рассматриваемом физическом процессе. Однако при применении на практике построений поверхностей уровня полей в нормальных конических координатах происходили бифуркации — нарушение дифференциально-геометрических свойств гладкости, как то: появление ребер возврата на поверхностях уровня и обратных переходов от нерезультативного к результативному действию знака абсолютной величины различных функций, пересечение поверхностей уровня с различными значениями параметра семьи. Чтобы избежать этих проблем, в работе были рассмотрены различные варианты координации пространства конусом-определителем. Были выявлены двузначности в зависимости от соотношения к различным полостям конуса-определителя и выбрана правильная координация пространства.

**Ключевые слова:** конические координаты, координация пространства, теория поля.

**D.V. Nesnov**

Ph.D. of Engineering, Associate Professor,  
Samara State Technical University,  
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia

### Area of Correct Space Coordination by Normal Conic Coordinates

**Abstract.** Field theory is widely represented in spherical and cylindrical coordinate systems, as the mathematical apparatus of these coordinate systems is well studied. Field sources with more complex structures require new approaches to their study. In [11], a normal conic coordinate system was introduced. The main purpose of the work is to extend the scope of application of classical methods of field theory to new forms of sources (sinks) and boundary surfaces through the use of coordinate systems in which these forms are both field-level surfaces and coordinate surfaces of the coordination system. The search for special coordination of space, as well as the determination of those conditions under which parametrization makes it possible to extend classical methods of field theory to non-traditional sources, sinks, and sets of other conditions is an urgent task. Such a distribution is possible on the basis of the introduction of special space coordination in conditions of coincidence of coordinate coordination surfaces with field-level surfaces or with surfaces that are marginal in the physical process under consideration. However, when using in practice constructions of field level surfaces in normal conic coordinates, bifurcations occurred — a violation of the differential geometric properties of smoothness, such as the appearance of return edges on level surfaces and reverse transitions from the ineffective to the effective action of the sign of the absolute value of various functions, the intersection of level surfaces with different values of the family parameter. In order to avoid these problems, various variants of space coordination by a cone-determinant were considered in the work. Ambiguities were revealed depending on the correlation to different cavities of the cone-determinant and the correct coordination of space was chosen.

**Keywords:** conic coordinates, space coordination, field theory.

### Введение

Анализ работ в области исследования физических полей методом геометрического моделирования приводит к двум выводам:

- если физическое поле имеет несложную структуру, например, световое поле, а точнее, его лучевая составляющая, то эти исследования часто проводились графическими методами [14; 15].
- поля более сложной структуры нуждались в привлечении математического аппарата теории поля, который описывает характеристики поля дифференциальными уравнениями в частных производных [4–6; 9; 10].

Работа базируется на:

- положениях классической общей теории поля в криволинейных координатах [1; 2];
- теории параметризации геометрических фигур и условий [3; 7; 8; 13];

- а также современных представлениях и исследованиях теории поля [16; 18; 19; 24].

Основным методом исследования был аналитический метод. Для визуализации полей и удобства изучения был применен графический метод [2].

При применении аналитического метода описания скалярных и векторных полей могут возникнуть несовпадения поверхностей уровня с координатными поверхностями применяемой системы координации пространства, а также проблема однозначности определения координат выбранной точки пространства.

Идеей работы является определение области существования введенной системы нормальных конических координат. Это необходимо для корректного применения формул теории поля изложенных в работе, а также предотвращения проблем визуализации скалярных и векторных полей [19].

Проблема определения трехортогональной системы координат имеет непосредственную связь с проблемой отнесения поверхности-определителя нормальной координации пространства к линиям кривизны [10], т.е. к интегрированию дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных [17; 22]. Следовательно, введение трехортогональной системы связано с поиском такой поверхности-определителя, для которой интегрирование возможно в конечном (не в числовом) виде, что является ограничением на форму источника или стока поля в контексте его геометрического моделирования [17].

### Основная часть

Нормальные конические координаты были введены в работе [11], теория поля в нормальных конических координатах изложена в статье [12]. Также были получены зависимости нормальных конических от прямоугольных декартовых координат.

$$\begin{aligned} x &= (u \cdot \sin \alpha + v \cdot \cos \alpha) \cos t; \\ y &= (u \cdot \sin \alpha + v \cdot \cos \alpha) \sin t; \\ z &= u \cdot \cos \alpha - v \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

Координатные поверхности нормальной конической системы:

$t = \text{const}$  — полуплоскость, которая проходит через ось конуса;

$u = \text{const}$  — коническая поверхность, соосная с опорным конусом, образующие которой перпендикулярны образующим опорного конуса;

$v = \text{const}$  — коническая поверхность, соосная с опорным конусом, образующие которой параллельны образующим опорного конуса.

Координатные линии нормальной конической системы:

$t$  — линия — окружность пересечения конусов  $u = \text{const}$  и  $v = \text{const}$ ;

$u$  — линия — прямая пересечения полуплоскости  $t = \text{const}$  и конуса  $v = \text{const}$ ;

$v$  — линия — прямая пересечения полуплоскости  $t = \text{const}$  и конуса  $u = \text{const}$ .

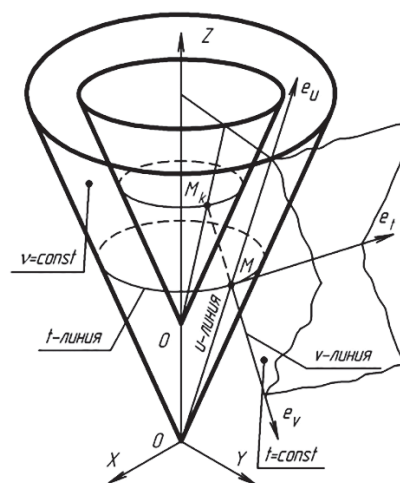


Рис. 1. Подвижный триэдр

В теории поля применяют подвижный триэдр, орт которого имеет направление роста координат локальной системы отнесения. На рис. 1 показан триэдр, орты которого  $e_t$ ,  $e_u$  и  $e_v$  построены в точке  $M$ . С целью предотвращения всевозможных особенностей и связанных с ними недоразумений будем рассматривать только правые системы как глобальных, так и локальных координат.

Определим область существования введенной системы нормальных конических координат, которую еще можно называть областью правильной координатации нормальными коническими координатами.

Поскольку на рис. 1 координатная точка  $M$  осуществлялась относительно луча образующей конуса (в дальнейшем его будем называть конусом — определителем системы нормальных конических координат, а угол  $\alpha$  — параметром системы), расположенного в полуплоскости. Далее переход от плоской системы к пространственной осуществлялся вращением этой полуплоскости вокруг оси  $Oz$ , область существования системы нормальных конических координат:

$$0 \leq t < 2\pi, \quad 0 < u < \infty, \quad -u \tan \alpha < v < \infty. \quad (2)$$

Эти формулы выражают область пространства, внешнюю по отношению к конусу  $u = 0$  (точнее, к его нижней полости). Вершина этого конуса — в начале координат (рис. 1), а образующая перпен-

дикулярна образующей конуса — определителя системы, она наклонена к оси  $Oz$  под углом  $\frac{\pi}{2} + \alpha$ . Кроме

того, из этой области следует исключить точки, принадлежащие оси  $Oz$ .

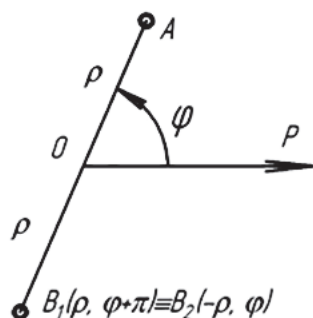


Рис. 2. Эквивалентная двузначность

Именно в этом месте возникает вопрос, весьма важный для дальнейших исследований: на каких принципах распространить область правильной координации нормальными коническими координатами на все пространство?

Сформулируем требования к специальной координации пространства:

- специальная параметризация должна быть правильной для всего пространства или, по крайней мере, для его значительной части;
- глобальная и локальная системы должны быть правыми;
- функции (1) зависимостей между глобальными и локальными координатами должны быть однозначными или эквивалентно двузначными.

Понятие эквивалентной двузначности поясним на примере плоских полярных координат (рис. 2). Эта система представляется полюсом  $O$  и полярной осью  $P$ . Произвольная точка  $A$  имеет координаты  $\rho, \varphi$ . Точку  $B_1$ , симметричную относительно полюса точке  $A$ , можно определить двумя способами:  $B_1(\rho, \varphi + \pi)$  та  $B_2(-\rho, \varphi)$ . Поскольку эти точки совпадают, двузначность следует определить эквивалентной.

Рассмотрим известные функции зависимости прямоугольных декартовых координат от полярных

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$$

и обратной зависимости

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}.$$

Эквивалентность двузначности обеспечивается нижеприведенной формулой

$$\rho = \pm \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Относительно другой функции  $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$ , она

также двузначная при условии координации плоскости  $(0 \leq \varphi \leq 2\pi): \arctg \frac{y}{x} = \varphi = \varphi + \pi$ .

Важно то, чтобы глобальные координаты  $x, y$  были определены однозначно, независимо от выбора пары локальных координат.

Что взять за основу, чтобы распространить на все пространство область правильной координации функциями (1) при условии выполнения остальных сформулированных требований?

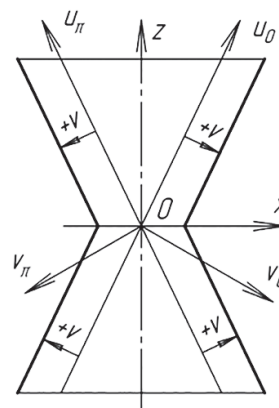


Рис. 3. Первый вариант координации пространства

Как первый вариант рассмотрим идею распространения на нижнюю полость конуса-определителя условия о совпадении положительного направления координаты  $v$  с направлением внешней нормали, принятой для верхней полости конуса-определителя. В этом случае (рис. 3) выполняется второе требование: глобальная и локальная системы правые. Но этот вариант имеет недостатки: лучи одной и той же образующей конуса  $v = 0$  принадлежат различным координатным полуплоскостям. Верхний луч плоскости  $t = 0$ , нижний —  $t = \pi$ . Сохранение постоянного направления  $v$  вдоль образующей конуса-определителя существует только по линии действия и только для правой верхней и нижней левой части сечения конуса-определителя. С другой стороны, в плоскости  $t = \text{const}$  расположены различные образующие конуса-определителя, которые пересекаются. В подобластях пространства  $u > 0$  и  $u < 0$  этой полуплоскости, направления координаты  $v$  не совпадают. Как следствие, возле точек, в которых поле меняет знак  $u$ , будем иметь разрыв, если  $v$  при этом также имеет нулевое значение, но после прохождения через начало координат знак не меняется при  $u = 0$ ,

$v \neq 0$ . Это следствие того, что координатной поверхностью  $v = \text{const}$  такой поверхности были бы два полуконуса, пересекающихся в плоскости  $xOy$  при  $v > 0$ .

Наконец, в таком варианте потребовало бы обоснования устранения двусмысленности при отнесении точек, внешних относительно координатного конуса  $u = 0$ : их можно отнести как к верхней, так и к нижней полости конуса, и от этого зависело бы направление координаты  $v$ .

Таким образом, этот вариант распространения области правильной координации пространства для изучения полей следует признать неприменимым.

Предложим другой вариант, в котором положительное значение координаты  $v$  будем отсчитывать во внешнюю сторону верхней, и внутрь нижней полости конуса-определителя. Подойдем к рассмотрению этого варианта с позиций преобразований.

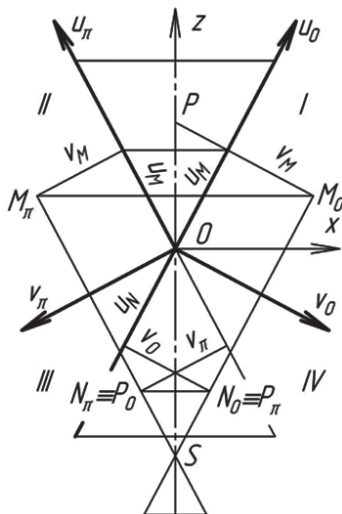


Рис. 4. Второй вариант координации пространства

Покажем сечение конуса-определителя плоскостью  $zOx$  (рис. 4). Зафиксируем относительно этого сечения две плоские системы координат с общим началом в вершине  $O$  конуса-определителя:  $xOz$  и  $v_0Ou_0$ . Ось  $Oz$  совпадает с осью конуса-определителя, ось  $Ou_0$  — с его образующей. Возьмем произвольную точку  $M_0$ , координаты которой в системе  $v_0Ou_0$  ( $v_m, u_m$ ).

Представляя оси  $0x0$  и  $0v0$  правыми, каждую в своей системе, имеем правую систему  $v_0Ou_0$ , повернутую на угол  $-\alpha$  относительно правой же системы  $xOz$ .

Знаку «минус» соответствует отсчет угла  $\alpha$  от оси  $0x$  до оси  $0v_0$  в направлении по ходу часовой стрелки.

Зависимость между координатами  $v, u$  произвольной точки  $M$  и координатами  $x, y$  этой же точки

$$\begin{aligned} x &= v \cos(-\alpha) - u \sin(-\alpha), \quad v = x \cos(-\alpha) + z \sin(-\alpha), \\ z &= v \sin(-\alpha) + u \cos(-\alpha), \quad u = -x \sin(-\alpha) + z \cos(-\alpha). \end{aligned}$$

Поскольку  $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ ,  $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ , остальные функции после перестановки слагаемых приобретают вид

$$\begin{aligned} x &= u \sin\alpha + v \cos\alpha, & v &= x \cos\alpha - z \sin\alpha, \\ z &= u \cos\alpha - v \sin\alpha, & u &= x \sin\alpha + z \cos\alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Вращение обеих плоских координатных систем вместе с точкой  $M$  вокруг оси  $Oz$  обладает следующими свойствами:

- координата  $z$  точки  $M$  в процессе вращения не меняется;
- не меняются также координаты  $v$  и  $u$  точки  $M$ , поскольку эта точка вращается вместе с системой  $v_0Ou_0$ ;
- в процессе вращения, направление движения какой-либо точки, расположенной справа от оси  $Oz$ , перпендикулярно плоскости чертежа относительно наблюдателя. Для точек, расположенных слева от оси  $Oz$  (см. рис. 1), это направление также перпендикулярно плоскости чертежа относительно наблюдателя;
- координировать точки будем относительно плоской системы  $v_0Ou_0$ , а не относительно нижней полости конуса, как это было в случае с верхней полостью.

Желая получить в качестве координатного конуса  $v = \text{const}$  две полости конуса, эквидистантных конусу-определителю, будем в первоначальном состоянии координировать положение точек относительно системы  $v_0Ou_0$ . Поскольку зависимости между нормальными коническими и декартовыми прямоугольными координатами можно получить при условии вращения системы  $v_0Ou_0$  вокруг оси  $Oz$ , необходимо так назначить параметр вращения, чтобы одному и тому же значению этого параметра отвечали оба луча образующей, которая принадлежит верхней и нижней полостям конуса-определителя, учитывая то, что они принадлежат разным координатным полуплоскостям.

Таким образом, параметр вращения должен учитывать разницу, равную  $\pi$ , при изменении знака координаты  $x$ , которая имеет выражение через  $v$  и  $u$  (3):

$$x = u \sin\alpha + v \cos\alpha. \quad (4)$$

Вернемся к рис. 4. Для точек, расположенных в первой и в третьей четверти системы  $v_0Ou_0$ , знак выражения  $x$  меняться не будет. Он может варьироваться лишь для точек, принадлежащих второй и четвер-



той четвертям, поскольку ось  $0v$  проходит именно через эти четверти. Изменение знака  $x$  эквивалентно смене знака выражений  $u \sin \alpha + v \cos \alpha$  или  $u \operatorname{tg} \alpha + v$  ( $\cos \alpha > 0$ ).

Учитывая всё сказанное, параметр вращения должен иметь вид

$$t + \frac{[1 - \operatorname{sign}(u \operatorname{tg} \alpha + v)]\pi}{2}.$$

Его сущность заключается в том, что для точек полупространства  $x > 0$  ( $u \sin \alpha + v \cos \alpha > 0$ , или  $u \operatorname{tg} \alpha + v > 0$ ) второе слагаемое равно нулю. Для точек  $x < 0$  ( $u \operatorname{tg} \alpha + v < 0$ ) к значению  $t$  будет прибавляться  $\pi$ .

С другой стороны, значению  $t = 0$  соответствует как луч образующей  $u > 0$ , так и другой луч той же образующей конуса-определителя  $u < 0$ .

Проверим выполнение других условий. Точке  $M_0$  соответствуют координаты  $v_M, u_M, t = 0$ . Точке  $M_\pi$ , полученной поворотом точки  $MM_0$  вместе с системой  $v_0 0 u_0$  вокруг оси  $0z$  на угол  $\pi$ , соответствуют координаты в системе  $v_\pi 0 u_\pi, u_\pi, t = \pi$ . Координаты  $v_M, u_M$  остались неизменными.

Точке  $N_0$ , симметричной точке  $M_0$  относительно оси  $v_0$ , соответствуют координаты  $v_N = v_M, u_N = -u_M, t = 0$ . В результате поворота на угол  $\pi$  она окажется в положении  $N_\pi$ . Координаты  $N_\pi$  в системе  $v_\pi 0 u_\pi$  такие же, как и координаты  $N_0$  в системе  $v_0 0 u_0$ .

Наконец, пусть точка  $P_0 \equiv N_\pi$ . К какой из полуосей  $-u_0$  или  $-u_\pi$  ее относить?

Значение параметра вращения  $t$  для этой точки, поскольку

$$x_{P_0} < 0, \quad u_{P_0} \operatorname{tg} \alpha + v_{P_0} < 0, \quad \operatorname{sign}(u_{P_0} \operatorname{tg} \alpha + v_{P_0}) = -1, \quad t = \pi.$$

Следовательно, она должна быть отнесена к полуоси  $-u_\pi$ . Из рис. 4 видно, что  $P_\pi$  совпадает с точкой  $N_0$ .

Таким образом, функции (1) зависимости прямоугольных декартовых координат от нормальных конических координат в случае их распространения на нижнюю полость конуса-определителя с учетом уточнения выражения параметра вращения принимают вид

$$\begin{aligned} x &= (u \cdot \sin \alpha + v \cdot \cos \alpha) \cos \left[ t + \frac{(1 - \operatorname{sign}(u \operatorname{tg} \alpha + v))\pi}{2} \right]; \\ y &= (u \cdot \sin \alpha + v \cdot \cos \alpha) \sin \left[ t + \frac{(1 - \operatorname{sign}(u \operatorname{tg} \alpha + v))\pi}{2} \right]; \\ z &= u \cdot \cos \alpha - v \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

Установим достоверность функций (5) конструктивным способом и покажем, что существует пара-

метризация нормальными коническими координатами, которая эквивалентна параметризации (5).

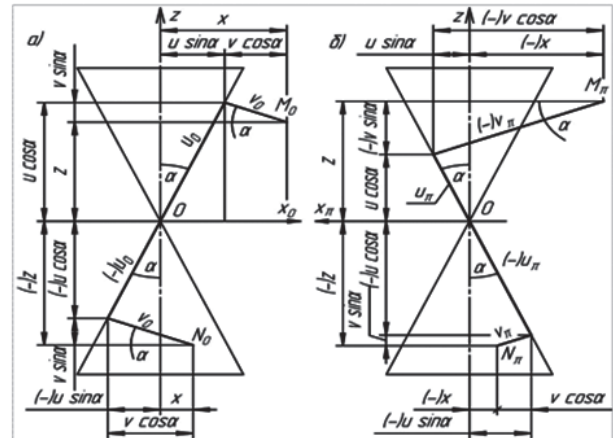


Рис. 5. Параметризация пространства нормальными коническими координатами

На рис. 5, а показаны точки  $M_0$  и  $N_0$ , координата которых осуществлялась относительно образующей  $t = 0$ . Ось  $0x_0$  направлена вправо. Слагаемые, входящие в функции (5), показаны на чертеже, что дает возможность удостовериться в их корректности.

На рис. 5, б показана та же точка  $M_\pi$ , но координированная относительно образующей  $t = \pi$ . Ось  $0x$ , которая возвращается вместе с системой  $z 0 x y$  вокруг оси  $0z$ , в этом случае направлена влево. Корректность функций (5) также подтверждается рис. 5, если принять во внимание другие множители в выражениях  $x$  и  $y$ , которые имеют отрицательные значения.

Перейдем к установлению функций обратной зависимости.

Очевидно, для распространения этих функций и на нижнюю полость конуса-определителя необходимо назначить знак  $x$  выражения. Таким образом, эти функции приобретают вид:

$$\begin{aligned} x = 0, \quad y > 0 &\Rightarrow t = \frac{\pi}{2}; \\ x = 0, \quad y < 0 &\Rightarrow t = \frac{3\pi}{2}; \\ x > 0, \quad y > 0 &\Rightarrow t = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \\ x < 0 &\Rightarrow t = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi; \\ x > 0, \quad y < 0 &\Rightarrow t = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi; \\ u &= \operatorname{sign}(x) \sqrt{x^2 + y^2} \sin \alpha + z \cdot \cos \alpha; \\ v &= \operatorname{sign}(x) \sqrt{x^2 + y^2} \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

Конструктивная проверка достоверности функций (6) представлена на рис. 6, который демонстрирует также возможную, эквивалентную (6) координацию пространства нормальными коническими координатами, которая осуществляется отнесением точки к той образующей конуса-определителя, которая принадлежит противоположной координатной полуплоскости  $t = \text{const}$ .

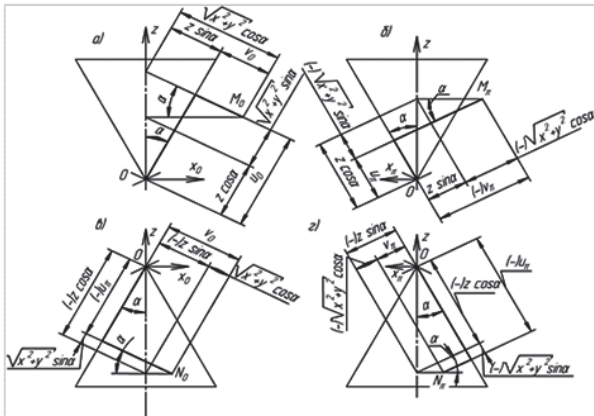


Рис. 6. Проверка достоверности функций

Покажем на конкретном примере область применения приведенного математического аппарата геометрического моделирования произвольно выбранного поля в нормальных конических координатах.

**Пример.** Определить и построить чертеж поверхности уровня, проходящего через точку  $M(x = 3, y = -1, z = 2)$ , скалярного поля, представленного в нормальных конических координатах функцией

$$F = e^{\frac{u}{3}} + 0,5 \sin 3t - v. \quad (7)$$

Привести чертеж еще поверхностей уровня с шагом  $\Delta C = 1$ , предшествующей поверхности, проходящей через точку  $M$ , и следующей за ней. Параметр  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  конуса-определителя системы.

**Решение.** По формулам (6) вычисляем конические нормальные координаты точки  $M(x = 3, y = -1, z = 2)$ .

$$t = \arctg\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi = 5,9375;$$

$$u = \sqrt{3^2 + 1^2} \sin \frac{\pi}{4} + 2 \cos \frac{\pi}{4} = 3,65;$$

$$v = \sqrt{3^2 + 1^2} \cos \frac{\pi}{4} - 2 \sin \frac{\pi}{4} = 0,82.$$

Вычисляем значение параметра  $C_M$  семьи поверхностей уровня при прохождении поверхности через точку  $M$ .

$$C_M = e^{\frac{3,65}{3}} + 0,5 \sin(3 \cdot 5,9375) - 0,82 = 2,1047.$$

Отталкиваясь от выражения  $F(t, u, v) = c$  ( $c = \text{const}$ ), решим его относительно  $v$  и представим уравнение семьи поверхностей уровня в виде

$$v = e^{\frac{u}{3}} + 0,5 \sin 3t - C_M + k \Delta C, \quad (8)$$

$\Delta C = 1$  — шаг  $k = -1, 0, 1$  — параметр семьи, включающей при  $k = 0$  поверхность, проходящую через точку  $M$ .

На рис. 7 показаны искомые поверхности уровня, построенные по уравнению (8). Каждая из поверхностей по отдельности показана на рис. 8.

Интервалы каждой из поверхностей

$$0 \leq t \leq 2\pi, \quad 3 \leq u \leq 5.$$

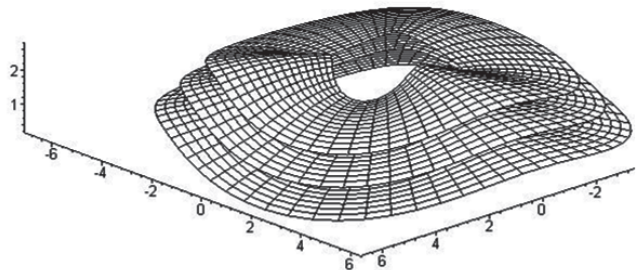


Рис. 7. Поверхности уровня  $v = e^{\frac{u}{3}} + 0,5 \sin 3t - C_M + k \Delta C$   
скалярного поля  $F = e^{\frac{u}{3}} + 0,5 \sin 3t - v$

с параметрами  $\Delta C = 1$ ;  $k = -1, 1, 1$ ;  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ;  $C = 2,1047$ ,  $u = 3 \dots 5$ ,  $t = 0 \dots 2\pi$ .

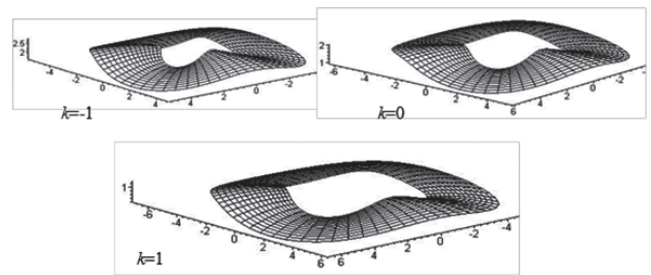


Рис. 8. Поверхности уровня при  $i = 1, 0, -1$

Завершая, сделаем три замечания.

1. Функции (5) и (6) содержат  $x, y, z$ , которые следует рассматривать как координаты глобальной неподвижной системы. Рисунок 6 можно трактовать как сечения конуса-определителя любой осевой плоскостью. Точки и оси подвижных систем  $z0x$  и  $v0u$  обозначены индексами 0 и  $\pi$  в зависимости от их расположения в той или иной координатной полуплоскости  $t = \text{const}$ , составляющих плоскость сечения.

2. Получена координация пространства нормальными коническими координатами: правая — для верхней полости конуса-определителя ( $u > 0$ ), левая — для нижней ( $u < 0$ ). Можно получить правую ориентацию координатной системы для нижней полости, но она неизбежно будет левой для верхней. Такое положение вытекает из необходимости иметь постоянное направление роста  $u$  вдоль обеих лучей одной и той же образующей конуса-определителя и противоположное направление роста  $t$  для этих лучей, поскольку они принадлежат разным координатным полуплоскостям  $t = \text{const}$  осевой плоскости.

3. При  $\alpha = 0$  система нормальных конических координат превращается в правую систему цилиндрических координат с радиальной координатой  $v$ , осевой  $u$ , угловой  $t$ .

При  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  система нормальных конических координат превращается в левую систему цилиндрических координат с радиальной координатой  $u$ , осевой  $v$ , угловой  $t$ .

## Выводы

1. Наиболее распространенными адаптациями теории поля в криволинейных координатах являются адаптации к их представлению в цилиндрической системе при прямолинейном источнике, в сферической системе — при точечном источнике, в эллипсоидальной системе — при двухточечном источнике [20].
2. Введение новых координатных систем необходимо при распространении области применения

классических методов теории поля на новые формы источников (стоков) и граничных поверхностей [11; 21; 23].

3. Изначально важно было правильно скоординировать пространство в выбранной конической системе координат для того, чтобы в дальнейшем получить верные дифференциально-геометрические характеристики скалярных и векторных полей, изложенных в статье [12].
4. Важность правильной координации пространства заключается еще и в том, чтобы исключить двусмысленность при отнесении точек к конусам-определителям, что, в свою очередь, ведет к возникновению разрывов и пересечений полей уровня при их визуализации средствами компьютерной графики.
5. На первый взгляд может показаться, что задача определения дифференциально-геометрических характеристик скалярных и векторных полей аналитическими методами несет на себе печать ретро: именно таким кажется возвращение к классическим методам в эпоху процветания и применения компьютерных технологий, быстрого и точного создания числовых моделей того или иного процесса. Такое представление переворачивает причину и следствие: именно на классических методах базируются методы числовые.
6. В дальнейших статьях по данной тематике будут представлены примеры расчетов теплопроводностей конических и тороидальных стенок теплоизоляционных обшивок (тефлон, рефразил, алюминиевых, никелевых и прочих сплавов) [22].

## Литература

1. Бердинский В.А. Об ортогональных криволинейных системах координат в пространствах постоянной кривизны [Текст] / В.А. Бердинский, И.П. Рыбников // Сибирский математический журнал. Сибирское отделение РАН, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН. — 2011 — Т. 52. — № 3 — С. 502–511.
2. Булах Е.Г. Основы векторного анализа и теории поля [Текст] / Е.Г. Булах, В.Н. Шуман. — Киев: Наукова думка, 1998. — 300 с.
3. Гирш А.Г. Окружности на комплексной плоскости [Текст] / А.Г. Гирш // Геометрия и графика. — 2020. — Т. 8. — № 4. — С. 3–12. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-8-4-3-12
4. Гузев М.А. Вывод уравнений градиентной теории в криволинейных координатах [Текст] / М.А. Гузев, Q.I. Chengzhi // Дальневосточный математический журнал.

Институт прикладной математики ДВО РАН. — 2013 — Т. 13. — № 1. — С. 35–42.

5. Ефремов А.В. Пространственные геометрические ячейки — квазимногогранники [Текст] / А.В. Ефремов, Т.А. Верещагина, Н.С. Кадыкова, В.В. Рустамян // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 3. — С. 30–38. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-3-30-38
6. Иващенко А.В. Общий анализ формы линии пересечения двух однотипных поверхностей второго порядка [Текст] / А.В. Иващенко, Д.А. Ваванов // Геометрия и графика. — 2020. — Т. 8. — № 4. — С. 24–34. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-8-4-24-34
7. Конопацкий Е.В. Точечные инструменты геометрического моделирования, инвариантные относительно параллельного проецирования [Текст] / Е.В. Конопацкий, А.А. Бездичный // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 4. — С. 11–21. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-11-21

8. Мальный В.В. Дифференциальные операции в криволинейных системах координат [Текст] / В.В. Мальный, Д.В. Мальный, В.С. Щелоков // Вестник Луганского государственного университета имени Владимира Даля. — 2021. — № 1. — С. 245–253.
9. Михайлова О.В. Об использовании криволинейных координат в векторном анализе [Текст] / О.В. Михайлова, М.М. Сержантова // Инженерный вестник. — 2015. — № 11. — С. 20.
10. Николаев М.О. Кратные интегралы в криволинейных системах координат [Текст] / М.О. Николаев, А.В. Николаева // Science time. — 2021. — № 5. — С. 54–58.
11. Неснов Д.В. Нормальные конические координаты [Текст] / Д.В. Неснов // Международная заочная научно-практическая конференция «Наука и образование в жизни современного общества». — 2016 — С. 189–192.
12. Неснов Д.В. Элементы теории поля в конических координатах [Текст] / Д.В. Неснов // Строительство и технологическая безопасность. — 2023. — № 28. — С. 45–52.
13. Неустроев Р.Н. Представление классических ортогональных криволинейных систем координат на плоскости квадратичными формами и характеристика эллиптических координат [Текст] / Р.Н. Неустроев // Вестник научных конференций. — 2015. — № 3–2. — С. 104–105.
14. Сальков Н.А. Общие принципы задания линейчатых поверхностей. Часть 2 [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2019. — Т. 7. — № 1. — С. 14–27. — DOI: 10.12737/article\_5c9201eb1c5f06.47425839
15. Сальков Н.А. Формирование поверхностей при кинетическом отображении [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 1. — С. 20–33. — DOI: 10.12737/article\_5ad094a0380725.32164760
16. Смирнов С.С. Параметрический метод автоматического задания координат сложной криволинейной поверхности [Текст] / С.С. Смирнов // Грузовик. — 2005. — № 5. — С. 35–37.
17. Степанов М.Е. Метод криволинейных координат в компьютерной геометрии [Текст] / М.Е. Степанов // Моделирование и анализ данных. — 2013. — № 1. — С. 157–192.
18. Francesco P. Conformal field theory / P. Francesco, P. Mathieu, D. Senechal // Springer-Verlag. New York, 2012.
19. Landau L.D. The classical theory of fields / L.D. Landau, E.M. Lifshitz // Elsevier. New York, 2013.
20. Pidgorny O.L. From the Theory of the Maps to Geometrical Modeling of Objects, Phenomena and Processes / O.L. Pidgorny // The Applied Geometry and Engineering Graphics, 2002, i. 70, pp. 32–38.
21. Nikitin M.N. J. of Physics: Conf. series 891, 12039 (2017), DOI: 10.1088/1742- 6596/891/1/012039
22. Nesnov D.V. Field theory in normal toroidal coordinates, MATEC Web of Conferences, v. 193, 003022, 2018.
23. Tsinaeva A.A., Nikitin M.N. Procedia Eng. 150, 2340–2344 (2016), DOI: 10.1016 / j.proeng. 2016.07.321
24. Quartieri J. WSEAS Int. conf. (EMESEG'08) / J. Quartieri, L. Sirignano, C. Guarnaccia // Heraklion, Greece, 2008.

## References

1. Berdinsky V.A., Rybnikov I.P. Ob ortogonal'nykh krivolinyeynykh sistemakh koordinat v prostranstvakh postoyannoy krivizny [On orthogonal curvilinear coordinate systems in spaces of constant curvature]. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal. Sibirskoye otdeleniye RAN, Institut matematiki im. S.L. Soboleva SO RAN* [Siberian Mathematical Journal. Siberian Department of the Russian Academy of Sciences, Institute of Mathematics named S.L. Sobolev SB RAS], 2011, v. 52, i. 3, pp. 502–511. (in Russian)
2. Bulakh E.G., Schuman V.N. *Osnovy vektornogo analiza i teorii polya* [Fundamentals of vector analysis and field theory]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1998. 300 p. (in Russian)
3. Girsh A.G. Okruzhnosti na kompleksnoy ploskosti [Circles in the complex plane]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics], 2020, v. 8, i. 4, pp. 3–12. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-8-4-3-12 (in Russian)
4. Guzev M.A., Chengzhi Q.I. Vyvod uravneniy gradiyentnoy teorii v krivolinyeynykh koordinatakh [Derivation of gradient theory equations in curvilinear coordinates]. *Dal'nevostochnyy matematicheskiy zhurnal. Institut prikladnoy matematiki DVO RAN* [Far Eastern Mathematical Journal. Institute of Applied Mathematics of the Far Eastern Federal District of the Russian Academy of Sciences], 2013, v. 13, i. 1, pp. 35–42. (in Russian)
5. Efremov A.V., Vereshchagina T.A., Kadykova N.S., Rustamyan V.V. Prostranstvennyye geometricheskiye yacheyki — kvazimnogogranniki [Spatial geometric cells — quasipolyhedra]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics], 2021, v. 9, i. 3, pp. 30–38. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-3-30-38 (in Russian)
6. Ivashchenko A.V., Vavanov D.A. Obshchiy analiz formy linii peresecheniya dvukh odnotipnykh poverkhnostey vtorogo poriyadka [General analysis of the shape of the line of intersection of two surfaces of the same type of the second order]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics], 2020, v. 6, i. 4, pp. 24–34. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-8-4-24-34 (in Russian)
7. Konopatsky E.V., Bezditny A.A. Tochechnyye instrumenty geometricheskogo modelirovaniya, invariantnyye ot nositel'no parallel'nogo proyetsirovaniya [Point geometric modeling tools invariant under parallel projection]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics], 2018, v. 9, i. 4, pp. 11–21. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-9-4-11-21 (in Russian)
8. Maly V.V., Maly D.V., Shchelokov V.S. Differentsial'nyye operatsii v krivolinyeynykh sistemakh koordinat [Differential operations in curvilinear coordinate systems]. *Vestnik Luganskogo gosudarstvennogo universiteta imeni Vladimira Dalia* [Bulletin of the Luhansk State University named after Vladimir Dalia], 2021, i. 1, pp. 245–253. (in Russian)
9. Mykhailova O.V., Serzhantova M.M. Ob ispol'zovanii krivolinyeynykh koordinat v vektornom analize [On the use of curvilinear coordinates in vector analysis]. *Inzhenernyy vestnik* [Engineering Bulletin], 2015, i. 11, pp. 20. (in Russian)



10. Nikolaev M.O., Nikolaeva M.O., Nikolaev, A.V. Kratnyye integraly v krivolineynykh sistemakh koordinat [Multiple integrals in curvilinear coordinate systems]. *Vremya nauki* [Science time], 2021, i. 5, pp. 54–58. (in Russian)
11. Nesnov D.V. Normal'nyye konicheskiye koordinaty [Normal conical coordinates]. *Mezhdunarodnaya zaochnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya «Nauka i obrazovaniye v zhizni sovremennogo obshchestva»* [International Correspondence Scientific and Practical Conference "Science and Education in the Life of Modern Society"], 2016, pp. 189–192. (in Russian)
12. Nesnov D.V. Elementy teorii polya v konicheskikh koordinatakh [Elements of field theory in conic coordinates]. *Stroitel'stvo i tekhnogennaya bezopasnost'* [Construction and technogenic safety], 2023, v. 28, pp. 45–52. (in Russian)
13. Neustroev R.N. Predstavleniye klassicheskikh ortogonal'nykh krivolineynykh sistem koordinat na ploskosti kvadratischnymi formami i kharakterizatsiya ellipticheskikh koordinat [Representation of classic orthogonal curvilinear coordinate systems on the plane by quadratic forms and characterization of elliptic coordinates]. *Vestnik nauchnykh konferentsiy* [Journal of Scientific Conferences], 2015, i. 3-2, pp. 104–105. (in Russian)
14. Sal'kov N.A. Obshchiye printsipy zadaniya lineychatykh poverkhnostey. Chast' 2 [General principles for defining ruled surfaces. Part 2]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics], 2019, v. 7, i. 1, pp. 14–27. DOI: 10.12737/article\_5c9201eb1c5f06.47425839 (in Russian)
15. Sal'kov N.A. Formirovaniye poverkhnostey pri kineticheskom otobrazhenii [Formation of surfaces in kinetic mapping]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics], 2018, v. 6, i. 1, pp. 20–33. DOI: 10.12737/article\_5ad094a0380725.32164760 (in Russian)
16. Smirnov S.S. Parametricheskii metod avtomaticheskogo zadaniya koordinat slozhnoy krivolineynoy poverkhnosti [Parametric method of automated assignment of coordinates of a complex curved surface]. *Gruzovik* [Truck], 2005, v. 5, pp. 35–37. (in Russian)
17. Stepanov M.E. Metod krivolineynykh koordinat v komp'yuternoy geometrii [Method of curvilinear coordinates in computer geometry]. *Modelirovaniye i analiz daniykh. Moskovskiy gosudarstvennyy psikhologo-pedagogicheskiiy universitet* [Modeling and data analysis], 2013, i. 1, pp. 157–192. (in Russian)
18. Francesco P., Mathieu P., Senechal D. Conformal field theory. Springer-Verlag, New York, 2012.
19. Landau L.D., Lifshitz E.M. The classical theory of fields. Elsevier, New York, 2013.
20. Pidgorny O.L. From the Theory of the Maps to Geometrical Modeling of Objects, Phenomena and Processes. The Applied Geometry and Engineering Graphic. Kiev, 2002, v. 70, pp. 32–38.
21. Nikitin M.N., J. of Physics: Conf. series 891, 12039 (2017), DOI: 10.1088/1742-6596/891/1/012039.
22. Nesnov D.V. Field theory in normal toroidal coordinates, MATEC Web of Conferences, Vol. 193, 003022, 2018.
23. Tsinaeva A.A., Nikitin M.N. Procedia Eng. 150, 2340-2344 (2016), DOI: 10.1016/j.proeng.2016.07.321
24. Quartieri J., Sirignano L., Guarnaccia C., WSEAS Int. conf. (EMESEG'08), Heraklion, Greece, 2008.