

# Математические методы в изучении инвестиций с фиксированным доходом

## Mathematical Methods in the Study of Fixed Income Investments

### **Гринюк О.Н.**

Канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная техника и информационные технологии» Новомосковский институт (филиал) ФГБОУ ВО «Российский химико-технологический университет имени Д.И. Менделеева»

**e-mail** [Olgrinyk@mail.ru](mailto:Olgrinyk@mail.ru)

### **Лобанов М.А.**

Ведущий инженер-программист, ООО НПО «РТС»,

**e-mail** [mishanyalobanov@gmail.com](mailto:mishanyalobanov@gmail.com)

### **Grinyuk O.N.**

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Computer Science and Information Technologies Mendeleev"

**e-mail** [Olgrinyk@mail.ru](mailto:Olgrinyk@mail.ru)

### **Lobanov M.A.**

Leading Software Engineer, LLC NPO «RTS»,

**e-mail** [mishanyalobanov@gmail.com](mailto:mishanyalobanov@gmail.com)

### **Аннотация**

Статья посвящена анализу цикла статей канд. физ.-мат. наук Н.В. Поповой, посвященных применению математических методов в изучении инвестиций с фиксированным доходом в условиях определенности, подготовленных в ходе преподавания дисциплины «Математические методы финансового анализа». Дисциплина, разработанная на основе междисциплинарного подхода на кафедре высшей математики РЭУ им. Г.В. Плеханова, посвящена изучению инвестиций в условиях определенности с помощью математических методов. Статьи содержат формулировки и математические доказательства инвестиционных свойств облигаций, ранее отсутствующие в литературе, а также выводы автора о роли прикладных математических дисциплин в экономическом вузе. Приведенный в данной работе анализ статей может представлять интерес для специалистов и преподавателей, применяющих математические методы в изучении финансовых инвестиций.

**Ключевые слова:** математические методы, облигации, инвестиции с фиксированным доходом, междисциплинарные курсы.

### **Abstract**

The article is devoted to the analysis of a series of articles by Ph.D. N.V. Popova (Phys.-Math. Sciences) devoted to the application of mathematical methods in the study of investments with fixed income under certainty, prepared in the course of teaching the discipline "Mathematical Methods of Financial Analysis". The discipline, developed on the basis of an interdisciplinary approach at the Department of Higher Mathematics of Plekhanov Russian University of Economics, is devoted to the study of investments under certainty using mathematical methods. The articles contain formulations and mathematical proofs of the investment properties of bonds

that were previously absent in the literature, as well as the author's conclusions about the role of applied mathematical disciplines in an economic university. The analysis of articles presented in this paper may be of interest to specialists and teachers who apply mathematical methods in the study of financial investments.

**Keywords:** bonds, mathematical methods, fixed income investments, interdisciplinary courses.

Теория финансовых инвестиций с фиксированным доходом в условиях определенности является основой современной теории финансовых инвестиций. Основным объектом изучения теории – инвестиции в облигации, как наиболее распространенный инструмент для инвестиций с фиксированным доходом. Однако эта часть теории, будучи в основном разработанной и доказанной, остается незавершенной. На начало исследований в теории оставались неизученные вопросы. В частности, не вполне было рассмотрено влияние основных и второстепенных параметров облигации на цену, дюрацию и процентный риск облигации. Из основных параметров это срок до погашения и доходность к погашению. Влияние еще одного основного параметра, купонной ставки, в литературе рассмотрено достаточно подробно. Влияние второстепенных параметров на инвестиционные свойства облигации в литературе практически не рассматривалось. Второстепенные параметры – это число купонных платежей в году и параметр «тау», измеряющий время между купонными выплатами. Цена, дюрация и процентный риск облигации это важнейшие характеристики облигации как объекта инвестирования. Поэтому задачи о факторах, влияющих на цену, дюрацию и процентный риск облигации, представляют как теоретический, так и практический интерес.

Известно, что математические методы - это основной инструментарий, используемый для изучения финансов и инвестиций. В работах [1-3] показана решающая роль математических методов в развитии теории финансовых инвестиций. Обосновываются следующие выводы: применение математических методов позволяет систематизировать рыночные наблюдения, иногда их объяснять, а также получать дополнительную информацию об инвестиционных свойствах облигации.

В приведенных ниже работах изложены математические доказательства изучаемых зависимостей, ранее известных лишь по рыночным наблюдениям или недостаточно изученных в теории. Справедливость доказанных утверждений подтверждается вычислениями. Для доказательства большей части утверждений применялись методы дифференциального исчисления.

В работах [4-6] рассмотрено влияние уровня доходности рынка на изменчивость цены облигации и величину изменения цены облигации при изменении срока до погашения на один купонный период. Изменчивостью цены облигации называют относительное (процентное) изменение цены облигации при изменении ее доходности. Под доходностью облигации, или рыночной доходностью, понимается доходность к погашению. По величине процентного изменения цены облигации при изменении ее доходности оценивают чувствительность цены облигации к изменению рыночной процентной ставки на заданную величину, т.е. процентный риск облигации. Установлено, что чем выше уровень процентных ставок рынка, тем ниже изменчивость цены облигации. Из доказательства следует, что данное свойство цены облигации объясняется выпуклостью зависимости «цена – доходность».

Для величины изменения цены облигации при изменении срока до погашения на один купонный период установлено, что для облигаций, продающихся с премией, абсолютное и относительное изменения цены облигации являются убывающими функциями доходности рынка; для облигаций, продающихся с дисконтом, существуют точки максимумов абсолютного и относительного изменений цены облигации. Данный результат означает, что если на рынке имеются облигации одинакового качества, все параметры которых совпадают, кроме сроков до погашения, которые отличаются на один

купонный период, то цены облигаций будут отличаться на величину, зависящую от уровня процентных ставок рынка по установленному в работах [4-6] закону.

Довольно много внимания уделено автором изучению процентного риска облигации и свойств показателя дюрации. В работах [7-10] рассмотрено влияние срока до погашения на процентный риск и дюрацию облигаций. Установлено, что для облигаций, продающихся с премией или по номиналу, процентный риск и дюрация являются возрастающими функциями срока до погашения. Для облигаций, продающихся с дисконтом, существует срок максимума процентного риска и дюрации. Установлены приблизительные значения сроков максимума показателей. Для решения задачи о зависимости дюрации облигации от срока до погашения рассматривались числовые последовательности и свойства сходящихся монотонных последовательностей.

В работе [10] задача о зависимости процентного риска облигации от срока до погашения рассмотрена в контексте изменяющейся ключевой процентной ставки. Рост ключевой ставки в 2021 г. сопровождался ростом доходностей на рынке облигаций. Ранее купленные облигации оказались подверженными процентному риску. Согласно рыночным наблюдениям, процентный риск долгосрочных облигаций больше по сравнению с краткосрочными. В работе [10] получено математическое доказательство зависимости процентного риска облигации от срока до погашения, согласующееся с рыночными наблюдениями.

Подчеркнем, что в работах [7-10] рассматривались цена и дюрация облигации, не содержащей накопленного купонного дохода, т.е. рассматривались значения цены и дюрации облигации на моменты сразу после купонной выплаты. Поведение цены и дюрации облигации между купонными выплатами не учитывалось.

В работах [11, 12] рассмотрено поведение дюрации Маколея между купонными выплатами. Установлено, что в течение купонного периода дюрация Маколея изменяется по линейному закону и в конце периода испытывает скачок, величина которого зависит от срока до погашения. Поскольку дюрация является мерой процентного риска облигации, то тем самым установлено поведение процентного риска облигации между купонными выплатами. В литературе по инвестициям поведение процентного риска и дюрации облигации между купонными выплатами ранее практически не рассматривалось.

В работе [13] установлена зависимость дюрации Маколея от числа купонных платежей в году. Установлено, что дюрация облигации уменьшается с увеличением числа купонных платежей в году. Для получения доказательства использовалось разложение функций в степенные ряды, а также действия с рядами - сложение, перемножение. В связи с этим можно говорить о расширении математического аппарата, применяемого в финансовом анализе в условиях определенности. Такие операции, как разложение сложных функций в степенные ряды, перемножение рядов ранее не применялись в решении задач теории финансовых инвестиций в условиях определенности.

В работах [14, 15] рассмотрено влияние числа купонных платежей в году на цену облигации. В работе [15] показано, что результат решения этой задачи зависит от вида показателя доходности к погашению. При использовании доходности к погашению в виде эффективной процентной ставки установлено, что цена облигации увеличивается с увеличением числа купонных платежей в году, что согласуется с рыночными наблюдениями. Использование доходности к погашению в виде годовой номинальной процентной ставки, принятой на многих рынках, не позволило получить результаты, имеющие экономический смысл.

Работа [16] посвящена влиянию вида показателя доходности к погашению облигации на результаты исследований инвестиционных свойств облигации. Установлено, что показатель доходности к погашению в виде номинальной процентной ставки в некоторых исследованиях может приводить к некорректным результатам в отличие от показателя доходности в виде эффективной процентной ставки.

Работа [17] посвящена влиянию числа купонных платежей по облигации на доходность инвестиции в облигацию. Показано, что доходность инвестиции в облигацию увеличивается с увеличением частоты купонных платежей при любой ставке реинвестирования.

Работы [18, 19] посвящены портфелю облигаций, не имеющих кредитного риска. Рассмотрены свойства портфеля и управление портфелем облигаций в стратегии иммунизации.

Инвестиционный проект в условиях определенности – это тоже инвестиции с фиксированным доходом. В работе [20] рассмотрено влияние ставки дисконтирования проекта классического характера (расходы инвестора предшествуют доходам от проекта) на его эффективность.

Результаты исследований работ [1-20] дополняют теорию финансовых инвестиций с фиксированным доходом и могут быть полезны в задачах долгосрочного и портфельного инвестирования. Применение математических методов способствует развитию теории. В результате увеличивается способность теории выполнять основную свою функцию – возможность понимать, объяснять и прогнозировать поведение облигации как объекта инвестирования.

Работа выполнена в ходе преподавания дисциплины «Математические методы финансового анализа», разработанной на основе междисциплинарного подхода, в РЭУ имени Г.В. Плеханова. Проведено исследование влияния прикладных математических дисциплин на уровень подготовки выпускника экономического вуза. Основные выводы: междисциплинарные экономико-математические курсы, базирующиеся на фундаментальных разделах высшей математики, фактически продолжают математическое образование экономиста, способствуют пониманию будущими экономистами роли математики в экономическом образовании, позволяют сформировать у выпускников экономических вузов необходимые компетенции в области применения математических методов в экономике, что повышает качество подготовки экономистов и их конкурентоспособность. По результатам исследований опубликованы работы [21-25].

Для изучения дисциплины и формирования соответствующей математической подготовки опубликованы учебники [26, 27] и учебные пособия [28-32] для студентов экономических вузов.

## Список литературы

1. Попова Н.В. Роль математических методов в развитии теории финансовых инвестиций с фиксированным доходом. Вестник Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова. 2016, 4(88), с. 126-130. <https://elibrary.ru/item.asp?id=26555680>
2. Попова Н.В. Теоремы об оценке облигаций как математические. Уральский научный вестник. 2016, т.7, №2, с. 49-54. <http://elibrary.ru/item.asp?id=26505565>
3. Попова Н.В. Рыночные теоремы как математические. Проблемы научной мысли. 2017, т.1, № 10, с. 75-83. <http://elibrary.ru/item.asp?id=28103988>
4. Барбаумов В.Е., Попова Н.В. Влияние уровня доходности рынка на поведение цены облигации. Менеджмент и Бизнес-Администрирование. 2015, №3, с. 52-57. <https://elibrary.ru/item.asp?id=24218676>
5. Попова Н.В. Рыночные теоремы и их продолжение. Вестник Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова. 2013, 7(61), с.93-101. <https://elibrary.ru/item.asp?id=19960439>
6. Popova, N. V. On Certain Propertis of Bond Prices// International Business Management. 2016. Vol. 10. N S3. pp. 6270-6273. <https://elibrary.ru/item.asp?id=32598086>
7. Попова Н.В. О некоторых свойствах дюрации Маколея. Вестник финансового университета. 2011, 1(61), с. 42-46. <https://elibrary.ru/item.asp?id=15562176>

8. Попова Н.В. Влияние срока до погашения на изменчивость цены облигации. Вестник финансового университета. 2013, 3(75), с. 72-84.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=19317253>
9. Попова Н.В. Математические методы в изучении процентного риска долгосрочных облигаций. Вестник Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова. 2016, 1(85), с. 101-107.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=25723954>
10. Попова Н.В. Процентный риск облигаций в условиях изменяющейся ключевой ставки. Финансы: теория и практика. 2022;26(3):186-195.  
DOI: 10.26794/2587-5671-2022-26-3-186-195  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=49295120>
11. Попова Н.В. Особенности зависимости дюрации Маколея от срока до погашения. Вестник Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова. 2017, 3(93), с. 142-150. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29385747>
12. Popova N.V. Clarification of Dependence of the Macaulay Duration on the Period Until Maturity. *Advances in Economics, Business and Management Research (Springer)*, 2020, vol. 128, p.p. 2873 – 2878. <https://elibrary.ru/item.asp?id=46495116>
13. Попова Н.В. Влияние частоты купонных платежей на показатель дюрации облигации. Вестник финансового университета. 2015, 4(88). с.104-115.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=24099645>
14. Попова Н.В. Влияние частоты купонных платежей на цену облигации. Вестник финансового университета. 2012, 3(69), с. 40-44.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=17821349>
15. Попова Н.В. Задача о влиянии числа купонных платежей в году на цену облигации и ее решения. *Фундаментальные исследования*. 2020, 12. с. 186-191;  
DOI 10.17513/fr.42930 <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44585414>
16. Попова Н.В. О доходности к погашению купонной облигации. *Финансы: теория и практика/Finance: Theory and Practice*. 2023;27(3):126-138.  
<https://doi.org/10.26794/2587-5671-2023-27-3-126-138>
17. Попова Н.В. О влиянии частоты купонных платежей на доходность инвестиции в облигацию. *Известия высших учебных заведений. серия: экономика, финансы и управление производством*. 2019. 3 (41). с.73 – 78.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=41102940>
18. Попова Н.В. Портфель облигаций без кредитного риска и его инвестиционные свойства. *Известия Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова*. 2014, 4 (18). с.129-143. <https://elibrary.ru/item.asp?id=23241769>
19. Попова Н.В. Управление портфелем облигаций в стратегии иммунизации. *Известия Российского экономического университета им. Г. В. Плеханова*. 2014. 4 (18), с. 144-160. <https://elibrary.ru/item.asp?id=23241770>
20. Попова Н.В. Исследование инвестиционных проектов с помощью математических методов. Вестник российской экономической академии им. Г.В. Плеханова. 2010, 5(35), с. 89-92. <https://elibrary.ru/item.asp?id=15239808>
21. Попова Н.В. О роли прикладных математических курсов в образовании экономиста. *Известия Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова*. 2013, 3 (13), с. 127-132.  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=19141736>
22. Попова Н.В. Роль прикладных математических дисциплин в образовании экономиста. Вестник Российского экономического университета имени Г. В. Плеханова. 2018, 1(97), с. 23-29. DOI:10.21686/2413-2829-2018-1-23-29  
<https://elibrary.ru/item.asp?id=32615385>
23. Popova N. V. Problems and Ways of Improving the Quality of Mathematical Training in Students of Economics, *Astra Salvensis*, VI (2018), Special Issue, p. 127-135.

- <https://elibrary.ru/item.asp?id=35769066>
24. Popova N. V. Applied Mathematical Disciplines in the Context of Interdisciplinary Connections. AD ALTA: Journal of Interdisciplinary Research. 2021. VOL. 11, Issue 2, Special Issue XXIII, 269-272. <https://elibrary.ru/item.asp?id=47811918>
  25. Попова Н.В. Междисциплинарные курсы в экономическом вузе. Вестник Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова. 2023, т.20, №3 (129), с. 40-49. <https://elibrary.ru/item.asp?id=54065791>
  26. Барбаумов В.Е., Попова Н.В. Математический анализ:  $N$ -мерное пространство. Функции. Экстремумы. Учебник. Сер. Высшее образование: Бакалавриат. М.: ИНФРА-М, 2019, 341 с. <https://elibrary.ru/item.asp?id=36803928>
  27. Барбаумов В.Е., Попова Н.В. Математический анализ:  $N$ -мерное пространство. Функции. Экстремумы. Учебник. Сер. Высшее образование: Бакалавриат. М.: ИНФРА-М, 2016, 341 с. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26458520>
  28. Попова Н.В. Математические методы финансового анализа. Сер. Высшее образование: Бакалавриат. М.: ИНФРА-М, 2019. 81 с. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37135715>
  29. Попова Н.В. Математические методы финансового анализа. М.: Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, 2016. 80 с. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28953779>
  30. Барбаумов В.Е., Попова Н.В. Математический анализ. Интеграл Римана.. М.: Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, 2019. 140 с. <https://elibrary.ru/item.asp?id=41117876>
  31. Барбаумов В.Е., Попова Н.В. Индивидуальные контрольные задания по дисциплине «Дифференциальные уравнения». Интегральное исчисление. М.: Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, 2020, 72 с. <https://elibrary.ru/item.asp?id=47110328>
  32. Барбаумов В.Е., Попова Н.В. Метрические пространства. М.: Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, 2013, 76 с. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29845217>