Эргодизайн 2023. № 1(19). С 43-52. ISSN 2619-1512 (print). ISSN 2658-4026 (online)
Ergodesign. 2023. no. 1(19). P. 43-52. ISSN 2619-1512 (print). ISSN 2658-4026 (online)

Психология труда, инженерная психология когнитивная эргономика

Научная статья
Статья в открытом доступе
УДК 331.101.1:159.9
doi: 10.30987/2658-4026-2023-1-43-52

Использование дискриминантного анализа для агрегирования оценок знаний обучающихся в номинальных шкалах

Сергей Алексеевич Багрецов[1]✉, Эдуард Владимирович Мищенко[2], Людмила Владимировна Розанова[3]
[1,2,3] Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург, Россия
[1] vka@mil.ru

Аннотация.
Рассматривается метод определения параметров нечеткой дискриминантной функции по множеству результатов выполнения диагностических тестов. Эти тесты представляют собой основу обучающей выборки контроля состояний знаний в номинальных шкалах оценок в автоматизированных системах обучения. Принимается во внимание нечеткость измерения результатов решения контрольных задач, а также классификации объектов обучающей выборки. Метод обладает определенной универсальностью и позволяет строить подобные диагностические процедуры в отношении объектов различной физической природы.

Ключевые слова: агрегирование, дискриминантная функция, обучающая выборка, плотность распределения, нечеткие множества, функция принадлежности

Для цитирования: Багрецов С.А., Мищенко Э.В., Розанова Л.В. Использование дискриминантного анализа для агрегирования оценок знаний обучающихся в номинальных шкалах // Эргодизайн. №1 (19). С. 43-52. http://dx.doi.org/10.30987/2658-4026-2023-1-43-52.

Original article
Open access article

Using Discriminant Analysis to Students' Aggregate Knowledge Assessments in Nominal Scales

Sergei A. Bagretsov[1]✉, Eduard V. Mishchenko[2], Lyudmila V. Rozanova[3]
[1,2,3] A.F. Mozhaisky Military Space Academy, Saint Petersburg, Russia
[1] vka@mil.ru

Abstract.
A method for determining the parameters of a fuzzy discriminant function from a set of diagnostic test results is considered. These tests are the basis of the training sample for controlling the level of knowledge in nominal rating scales in automated learning systems. The fuzziness of measuring the results of solving control problems, as well as the classification of objects in the training sample, is taken into account. The method has a specific versatility and allows building similar diagnostic procedures for objects of different physical nature.

Keywords: aggregation, discriminant function, training sample, distribution density, fuzzy sets, membership function

For citation: Bagretsov S.A., Mishchenko E.V., Rozanova L.V. Using Discriminant Analysis to Students' Aggregate Knowledge Assessments in Nominal Scales // Ergodizayn [Ergodesign], 2023, No. 1 (19). Pp. 43-52. Doi: 10.30987/2658-4026-2023-1-43-52.

Введение

В основу одного из методов построения агрегированной (обобщенной) оценки знаний обучающихся [10] для случая, когда внешний критерий представлен в шкале наименований (оценки «сдал – не сдал», «Удовлетворительно – неудовлетворительно» и т. д.), может быть положен дискриминантный (числовой) анализ (ДА). Достоинством этого метода оценки знаний является то, что он позволяет сузить до минимума множество причинно-следственных связей в анализе результатов контроля знаний обучающихся, представляя их в номинальной шкале оценок, а также дает возможность достаточно просто оценить достоверность модели.

Исходные данные для процедур ДА включают в себя количественные значения результатов решения контрольных задач, необходимых для оценки уровня подготовки обучающихся. Работа педагогов-экспертов в этом случае заключается в формировании достаточного, для оценки знаний, множества результатов выполнения контрольных задач, представляемых как результаты сравнения образов. В работу экспертов входит, также, формирование и классификация обучающей выборки (ОВ) (внешнего критерия оценки знаний), на основе анализа которой осуществляется построение дискриминантной функции. Важным условием применения дискриминантного анализа в обработке результатов контроля знаний является условие (гипотеза) нормального распределения результатов решения контрольных задач в исследуемой группе обучающихся, а также допустимость перевода линейной свертки результатов оценки в интегральный показатель.

Метод расчета коэффициентов дискриминантной функции (ДФ) по обучающей выборке достаточно полно отражены в целом ряде исследований [1, 2, 3]. Однако в основе этих методик построения ДФ принято, что данные обучающей выборки не содержат элементов неопределенности. В действительности же нет более неопределенного объекта изучения, чем оценка знаний. Трудности в оценке знаний обучающихся указаны в работах [4, 5] и определяются следующими факторами:

а) *сложность внутренней структуры знаний*, характеризующейся большой размерностью, иерархичностью и многообразием неявно выраженных связей между элементами структуры личностных и профессиональных качеств обучающегося;

б) *неоднозначность связей между свойствами личности* обучающегося и способами их выражения в сфере конкретных знаний;

в) *необходимость адекватного восприятия личности* обучающегося преподавателем;

г) *открытость системы измерения*, которая подвержена воздействию комплекса физических, психологических и социологических факторов.

Перечисленные факторы приводят к неопределенности: как результатов самих измерений, так и делаемых по этим результатам выводов. Причем, неопределенность оценок знаний обучающегося в силу указанных выше факторов носит существенно нестатистический характер, т. е. проявляется в оценках экспертов и результатах принятия решений нечетко [6, 7].

В этом случае язык традиционной математики становится недостаточно гибким для моделирования подобных сложных систем, так как в нем нет средств достаточно адекватного описания понятий, которые имеют неопределенный и в общем случае нечеткий смысл [6 –11]. Отсутствие таких математических средств отражения нечеткости исходной информации в обучающей выборке (ОВ) определило необходимость разработки метода нечеткого дискриминантного анализа.

Предлагаемый ниже в статье материал содержит две части. В первой – схематично излагается содержание метода дискриминантного анализа знаний обучающихся в условиях наличия четкой исходной информации, а во второй – рассматриваются особенности учета нечеткости в составе ОВ при определении параметров ДФ.

1. Оценка знаний обучающихся методом дискриминантного анализа в условиях наличия четкой исходной информации

Процесс формирования дискриминантной функции удобно рассматривать в виде отдельных этапов:

1) формирование ОВ;

2) нормирование значений индикаторов, измеряемых в процессе тестирования;

3) классификация ОВ;

4) определение коэффициентов значимости дискриминантной функции.

Рассмотрим их более подробно.

<u>Этап I.</u> Формирование обучающей выборки.

ОВ представляется в виде таблиц (таблица 1), количество столбцов (n) которых соответствует числу индикаторов (числу контрольных задач, определяющих диагностически значимые элементы знаний обучающегося), а число строк (N) совпадает с числом обучающихся, включенных в состав ОВ преподавателями-экспертами. Таким образом, каждый j- й $\left(j=\overline{1,N}\right)$ вариант сочетания измеряемых индикаторов (шкал) соответствует определенному (возможно гипотетическому) требуемому уровню знаний обучающегося, в отношении которого лицо, принимающее решение, может дать утвердительный ответ об отрицательной (область ω_2) или положительной (область ω_1) оценке его знаний, выявленных в процессе контроля. При этом желательно, чтобы указанные варианты сочетаний числовых характеристик результатов выполнения контрольных задач $\left(x_i\colon i=\overline{1,N}\right)$ обеспечивали бы вариацию их значений от нижнего $(x_{i\,H})$ до верхнего (x_{iB}) предела, т. е., $x_{iH}\le x_i\le x_{iB}$. Варьирование указанных значений индикаторов знанийx_i осуществляется, как правило, детерминированно на основе опыта преподавателей, включенных в группу экспертов. Если перекрыть весь диапазон не удается, вследствие недостатка опытных данных для реальных обучающихся, то возможно формирование новой структуры результатов выполнения контрольных задач, соответствующей структуре знаний для гипотетических обучающихся.

В этом случае варьирование может осуществляться на основе предположения о равномерной плотности распределения значений исследуемых индикаторов в пределах
от x_{iH} доx_{iB} путем их выбора случайным образом. Рекомендуемое число *обучающихся (или знаний обучающихся)* в ОВ должно отвечать неравенству [2].

$$N>2(n+1) \quad (1)$$

Заметим, что указанная величина существенно меньше того, что необходимо для регрессионного анализа.

<u>Этап 2</u>. Нормирование значений индикаторов $y_1,y_2,y_3,\ldots y_i$ (результатов решения контрольных задач), измеряемых в процессе тестирования.

В зависимости от типа измеряемого индикатора знаний и характера его влияния на интегральную (агрегированную) оценку используется либо линейное, либо квадратичное нормирование [1, 2].

При линейном нормировании i- го индикатора знаний, с увеличением которого повышается оценка качества усвоения обучающимся учебного материала, нормированное значение индикатора знаний будет:

$$\mathrm{y}_i(x_i)=\frac{(x_i-x_{i\,H})}{(x_{i\,B}-x_{i\,H})}$$

В случае противоположного влияния индикатора знания на оценку качества усвоения, его нормированное значение будет иметь вид:

$$\mathrm{y}_i(x_i)=\frac{(x_{i\,B}-x_i)}{(x_{i\,H}-x_{i\,B})}\ .$$

Квадратичное нормирование осуществляется на основе расчета уравнения вида:

$\mathrm{y}_i(x_i)=\alpha_{i0}+\alpha_{i1}x_i+\alpha_{i2}x_i^2,$

удовлетворяющего условиям [2]:

$\frac{\partial \mathrm{y}_i(x_i)}{\partial x_i}=0$, при $x_i=\overline{x_i}$; $\mathrm{y}_i(x_i)=1$, при $x_i=\overline{x_i}$;

$\mathrm{y}_i(x_i)=0$, при $(x_i=X_{iH})\vee(x_i=X_{iB})$,

гдеx_i– номинальное значение i-го параметра; $i=\overline{1,n}$; $\overline{x_i}$ – среднее значение i-го параметра.

Совместное решение этих уравнений дает возможность получить коэффициенты нормирования:

$$\alpha_{i0}=\frac{1-\overline{x^2}}{\Delta_i^2}\ ,\alpha_{i\,1}=\frac{2\overline{x}}{\Delta_i^2}\ ,\alpha_{i\,2}=\frac{1}{\Delta_i^2},$$

где Δ_i – величина контрольного допуска.

Величина Δ_i для индикаторов знаний с односторонним (верхним или нижним пределом) и с двухсторонним пределом определяется следующим выражением:

$$\Delta_i = \begin{cases} (x_{iB} - x_i), \text{ если предел верхний}; \\ (x_i - x_{iH}), \text{если предел нижний}; \\ 0{,}5 \cdot (x_{iB} - x_{iH}), \text{ если предел двухсторонний}. \end{cases}$$

Применение линейного нормирования значений $(y_1, y_2, y_3, ... y_i)$ допустимо в том случае, если оценка знаний обучающихся линейно зависит от величин этих индикаторов. В противном случае целесообразно применение квадратичного нормирования.

Этап 3. Классификация обучающей выборки.

Суть классификации ОВ заключается в отнесении каждого j- го варианта сочетания числовых характеристик результатов решения контрольных задач, соответствующих j- му обучающемуся из ОВ, к классам отрицательной (ω_1) или положительной (ω_2) оценки их знаний. Для решения подобных задач классификации, как правило, используются эвристические методы.

Этап 4. Определение коэффициентов значимости дискриминантной функции.

Все методы вычисления весовых коэффициентов ДФ можно разбить на три группы [1, 2]: *рекуррентные, нерекуррентные* и *смешанные*. Наиболее широкое распространение получили *рекуррентные* методы оценки. При их применении вектор оценок Wкоэффициентов ДФ определяется путем многошагового уточнения. *Нерекуррентные* методы позволяют с помощью аналитического выражения сразу получить весь вектор W. *Смешанные* методы используют на начальном этапе аналитическое выражение для вычисления вектора W, а дальнейшее его уточнение производится путем применения рекуррентной процедуры построения вектора состояния системы W.

В работах [1, 2] предложен простой способ определения коэффициентов ДФ, суть которого состоит в представлении вектора состояния Wполиномами Эрмита, коэффициенты которых $H_i(\text{y})$ определяются, исходя из анализа следующих соотношений: $H_0(\text{y}) = 1; H_1(\text{y}) = 2\text{y}$; $H_2(\text{y}) = 4\text{y}^2 - 2$; $H_{i+1}(\text{y}) - 2H_i(\text{y}) + 2i\, H_{i-1}(\text{y}) = 0$.

В этом случае дискриминантная функция будет определяться на основе следующего выражения:

$$\text{Д}(W, \text{y}) = W(\omega)\, \vec{f}(\text{y}), \quad (2)$$

где $\vec{f}(\text{y}) = \{f_1(\text{y}),..., f_n(\text{y})\ \ \}$ − вспомогательные функции;

$$W = \{\, \omega_{11} - \omega_{21};\ \omega_{12} - \omega_{22};\ ..., \omega_{1n} - \omega_{2n} \ \ \};$$

$$\omega_{1i} = \sum_{i \in N_1} f\,(y_i\colon y_i \in \omega_1);\ \omega_{2i} = \sum_{i \in N_2} f\,(y_i : y_i \in \omega_2);$$

N_1, N_2 – множество вариантов сочетаний результатов решения контрольных задач из ОВ, относящихся к классам ω_1иω_2соответственно; $|N_1| + |N_2| = N$.

Вспомогательные функции $f(\text{y})$ вычисляются в соответствии с методикой, изложенной в работе [2]. Например, для случая двух контролируемых параметров вспомогательные функции имеют вид:

$$f_1(y) = H_0(y_1) \cdot H(y_2) = 1;$$
$$f_2(y) = H_1(y_1) \cdot H_0(y_2) = 2\, y_1;$$
$$f_3(y) = H_0(y_1) \cdot H_1(y_2) = 2\, y_2;$$
$$f_4(y) = H_1(y_1) \cdot H_1(y_2) = 4 y_1 \cdot y_2\,.$$

Обычно рассматривают нормированную дискриминантную функцию:

$$Q(\text{y}) = \frac{\text{Д}(W, \text{y})}{\text{Д}(W, \text{y}\ \ )}, \quad (3)$$

где $\text{y} \ = \{\text{y}_i = 1 : i = \overline{1, n}\}$.

Критерием соответствия найденной дискриминантной функции в обучающей выборке является выполнение неравенства:

$$\min_j Q_j\,(y \in \omega_1) > \max_j Q_j\,(y \in \omega_2)\,, \quad (4)$$

где $\min_j Q_j\,(y \in \omega_1)\,, \max_j Q_j\,(y \in \omega_2)$ – минимальные и максимальные значения дискриминантных функций, относящихся соответственно к отрицательным и положительным оценкам знаний обучающихся.

По мере изменений требований к знаниям обучающихся необходимо изменять состав и структуру обучающей выборки. Признаком, определяющим необходимость пересчета ДФ, может служить нарушение неравенства (4). В этом случае пересчет ДФ осуществляется на основе новой обучающей выборки.

Определенные таким образом значения ДФ представляют собой линейную модель свертки важных для данной области анализа параметров. Если в этом классе диагностических процедур произвести расчет ДФ для двух обучающихся (не обязательно из состава ОВ), то по величинам ДФ можно судить, например, о степени соответствия их знаний требованиям профессиональной деятельности.

Рассмотрим пример агрегирования оценок обучающихся с помощью дискриминантных функций на основе применения номинальной шкалы оценок. Допустим, что в качестве значимых параметров знаний обучающихся экспертами-педагогами выбраны три параметра x_1, x_2, x_3. Перечисленные параметры имеют соответствующие диагностируемые индикаторы (меры расстояний между образами) верхними (x_{iB}) и нижними ($x_{\text{iн}}$) пределами, допуски изменений которых соответственно равны:

$$x_{1H} = 0{,}75\,;\ x_{2H} = 0{,}1\,;\ x_{3H} = 0{,}1\,;$$

$$x_{1B} = 0{,}9;\ x_{2B} = 0{,}5;\ x_{3B} = 1{,}0;$$

Уровень знаний обучающихся будет тем выше, чем больше значения параметров x_1 и x_3 и меньше параметр x_2. Сформированная экспертами обучающая выборка включает в себя 10 вариантов сочетаний выделенных параметров, представленных в таблице 1.

Следует обратить внимание, что такое число вариантов сочетаний отвечает неравенству (1).

В результате классификации ОВ первые пять реализаций параметров отнесены

к первому классу (ω_1), а вторые пять – ко второму классу ω_2, т. е.

$$\text{y}_i \in \omega_1, i = \overline{1{,}5};\ \text{y}_i \in \omega_2\,, i = \overline{6{,}10}.$$

Используя формулы (2) и (3), находим нормированные значения весовых коэффициентов дискриминантной функции:

$$W = \{0{,}31;\ 0{,}33;\ 0{,}36\}\,.$$

Тогда значение дискриминантной функции для данной области (темы, курса, предмета) знаний будет:

$$Q = 0{,}31\text{y}_1 + 0{,}33\text{y}_2 + 0{,}36\text{y}_3.$$

Таблица 1.

Table 1.

Обучающая выборка

Training sample

Номер варианта ОВ	**Числовые значения измеряемых индикаторов**			**Нормированные значения индикаторов**		
	***x*1**	***x*2**	***x*3**	***y*1**	***y*2**	***y*3**
1| }2| }3| } $\in\ \omega_1$	0,87	0,2	0,6	0,8	0,75	0,56
	0,84	0,1	1,0	0,6	1,0	1,0
	0,81	0,2	0,9	0,4	0,75	0,89
	0,9	0,3	0,7	1,0	0,5	0,67
	0,87	0,1	0,8	0,8	1,0	0,78
6| }7| }8| } $\in\ \omega_2$	0,81	0,3	0,1	0,4	0,5	0
	0,75	0,4	0,2	0	0,25	0,11
	0,78	0,3	0,5	0,2	0,5	0,44
	0,84	0,4	0,3	0,5	0,25	0,22
	0,75	0,5	0,4	0	0	0,33

В соответствии с (4) для десяти реализаций ОВ значения ДФ будут равны:

$$Q_{0B} = \{0{,}7\ 0{,}87\ 0{,}69\ 0{,}72\ 0{,}86\ 0{,}29\ 0{,}12\ 0{,}38\ 0{,}35\ 0{,}12\}\,.$$

Так как $\min Q_{0B}\ (y_j\ \in\ \omega_1)\ = Q_3\ >\ \max Q_{0B}\ (y_j\ \in\ \omega_2)\ = Q_8\,,$ то дискриминантную функцию оценки знаний обучающихся следует считать правильной.

Найденная дискриминантная функция определяет параметры разделяющей плоскости номинальной шкалы оценок во множестве результатов выполнения контрольных заданий. В ее структуре отражены результаты экспертизы знаний обучающихся экспертами-педагогами. Далее эта модель может быть использована педагогами, уровень квалификации которых в данной области знаний может быть ниже квалификации экспертов, что является достоинством подобного вида моделей.

С целью проверки значимости модели агрегирования оценок знаний обучающихся необходимо систематически обновлять состав ОВ в соответствии с изменениями требований к знаниям обучающихся в данном виде деятельности. Значимость модели агрегации в этом случае, аналогично, как и в примере, будет проверяться по результатам выполнения неравенства (4).

Допустим теперь, что необходимо по найденной модели оценить степень соответствия требованиям профессиональной деятельности уровня подготовки двух обучающихся, нормированные значения измеряемых результатов, выполнения заданий которых представлены в таблице 2. Здесь же в таблице приведены расчетные значения ДФ.

Таблица 2.

Результаты выполнения заданий обучающимися

Table 2.

Results of completing tasks by students

Обучаемые	**Нормированные значения параметра**			**Значения ДФ** $Q(y)$
	y_1	y_2	y_3	
1-й обучающийся	0,6	0,5	0,67	0,59
2-й обучающийся	0,4	1,0	0,56	0,65

Как видно из таблицы 2, как первый, так и второй обучающиеся оцениваются положительно. Однако уровень знаний второго обучающегося выше, чем первого. В случае использования порядковой шкалы (например, l- балльной) оценки знаний обучающихся таких дискриминантных функций должно быть l. При этом каждая из ДФ рассчитывается по отдельной обучающей выборке, а оценка знаний будет определяться максимальным значением балла l^*, при котором ДФ еще положительна. Таким образом, осуществляется переход от номинальной шкалы к порядковой шкале оценок.

Рассмотрим теперь, каким образом в ранках дискриминантного анализа осуществляется учет нечеткости исходной информации.

2. Применение нечеткого дискриминантного анализа в оценках знаний обучающихся

В процедурах формирования номинальных шкал нечеткость проявляется в итогах измерения результатов решения контрольных задач и в классификации различных их сочетаний в обучающей выборке. Например, первый вариант $(j = 1)$, $\left(j = \overline{1, N}\right)$ сочетания параметров, соответствующих первому обучающемуся из состава ОВ (см. табл. 4), может быть в условиях нечеткой оценки с определенной степенью уверенности $\left(\mu\left(\mathrm{y}_{\omega}^{j}\right)\right)$ отнесен к первому (ω_1) и ко второму (ω_2) классам, т.е. Допустим $\mu\left(\mathrm{y}_{\omega 1}^{j}\right) = 0,8$, а $\mu\left(\mathrm{y}_{\omega 2}^{1}\right) = 0,2$. Аналогичное распределение может быть представлено для каждого варианта сочетаний параметров в ОВ. Вследствие этого, сама обучающая выборка становится нечеткой. На ее основе можно составить конечное множество (B) вариантов (g) представлений ОВ $(g \in B)$, на котором будет определена соответствующая функция принадлежности $\left(\mu_g\right)$. Если через B обозначить нечеткое множество вариантов сочетаний параметров обучающихся из ОВ, то нечеткое множество B представлений ОВ следует рассматривать как образ нечеткого множества B .

Если теперь произвести расчет дискриминантных функций для каждого g-говарианта формирования ОВ, то найденные в итоге расчета коэффициенты ДФ $\left(\alpha_{i\,g}\right)$ образуют также нечеткое множество (W_H), на котором будет определена функция принадлежности$\left(\mu_g\right)$, т.е. найденное таким способом множество W_H определяет параметры искомой нечеткой дискриминантной функции (НДФ), т. е.

$$W_H = \left\{a_{\mathrm{ig}}\left(\mu_g\right): g = \overline{1}, \theta, i = \overline{1, n}\right\},$$

где θ – количество возможных вариантов формирования ОВ.

Таким образом, последовательно выделяя варианты (g) формирования ОВ, можно рассчитать для каждого из вариантов ОВ коэффициенты $\left(\alpha_{\mathrm{ig}}\right)$нечетких дискриминантных функций. Далее если проранжировать ДФ в соответствии с увеличением функции принадлежности μ_g, то получим ряд значений коэффициентов дискриминантной функции α_{ig}, определяемых с различными степенями четкости. Тогда ДФ может быть представлена в следующем виде:

$$Q(\mu_g) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\mu_g)\, y_i(x_i),$$

где x_i – результат изменения i- го параметра (характеристики) оцениваемого объекта.

Рассмотрим теперь, как определенное таким образом семейство дискриминантных функций используется для оценки знаний обучающихся. Причем измерение отдельных параметров осуществляется нечетко с функцией принадлежности, равной $\mu_0 = \min\{\mu_{0i}: i = \overline{1,n}\}$, где μ_{0i} – функция принадлежности измерения i- го параметра. В этом случае четкость оценки знаний обучающихся будет

$\mu_g = \min\{\mu_0, \mu_g\}$,

где $\mu_g = \max\{\mu_g\}$.

Возможно два случая соотношений параметров:

а) $\mu_0 \geq \mu_g$. При таком соотношении нормированная дискриминантная функция имеет вид:

$Q\,(\mu_g) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\mu_g)\mathrm{y}_i(x_i)$;

б) $\mu_0 < \mu_g$. Для этого случая характерным является то, что оценки, полученные для более высоких степеней четкости вычисления коэффициентов дискриминантной функции, также оказываются справедливыми [6, 8]. Поэтому нормированная дискриминантная функция будет иметь вид:

$$Q\,(\mu_g) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,(\mu_g > \mu)\, y_i\,(x_i)\,.$$

В общем случае интервал изменений НДФ может принадлежать как положительной, так и отрицательной областям ее изменений, отражая, тем самым, неопределенность в оценке знаний обучающегося. Принятие решения в такой ситуации осуществляется на основе сравнения взвешенных числовых значений НДФ отрицательной и положительной области, т.е. производится проверка следующего неравенства:

$$\sum_{g \in H_1} Q\,(\mu_g)\,\mu_g 0\,,$$

где H_1 – множество вариантов $\{g\}$, формирование ОВ для которых справедливо. Если это неравенство выполняется, то принимается решение $\mu_g > \mu_0$,соответствующее положительной оценке знаний обучающегося, если нет – то оценка принимается отрицательной.

Таким образом, уменьшение четкости оценок качества деятельности обучающегося приводит к появлению интервальных оценок коэффициентов нормированной дискриминантной функции. Причем, чем меньше четкость оценок, тем шире эти интервалы, тем более размыта оказывается ДФ, и тем более неопределенна и неоднозначна оценка знаний.

Рассмотрим теперь, каким образом можно определить функцию принадлежности μ_g. Для этого воспользуемся принципом обобщения, положив в его основу определение образа нечеткого множества, приведенное в работах [6, 8]. В соответствии с этим определением получим:

$$\mu_g = \sup_{y_{\text{iq}} = \phi^{-1}(a_{\text{ij}}:\, i=\overline{1,n})} \min\{\mu^0(y_\omega^j), \mu(y_{\text{ij}}), \mu_\phi(y_{\text{ij}}, a_{\text{ig}})\}\,;$$

где$j = \overline{1,N}$; $i = \overline{1,n}$; $\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$; $\mu^0(\mathrm{y}_\omega^j) = \min\left\{\mu_{j \in N_{1g}}\,(y_\omega^j)\,;\ \bigcup_{j \in N_{2g}} \mu(y_\omega^j)\right\}$;

$y = \{y_{\text{ij}}\,;\ i = \overline{1,n}\}$ – вектор параметров j- го$(j = \overline{1,N})$ варианта сочетания результатов выполнения контрольных заданий из ОВ;

y_{ij} – значение i- го параметра в j- м варианте сочетания параметров в ОВ;

$\mu\,(y_\omega^j)$ – функция принадлежности j- го варианта сочетания параметров выполнения контрольных заданий к классам (ω_1 и ω_2) номинальной шкалы оценок;

N_{1g}, N_{2g} – множество вариантов сочетаний параметров выполнения контрольных заданий, включенных экспертами в g- м варианте формирования ОВ в первый (ω_1) и второй (ω_2) классы соответственно;

$\mu(y_{\text{ij}})$ – функция четкости оценки j- го параметра;

$\mu_\phi(y_{\text{ij}}, \alpha_{\text{ig}})$ – нечеткое отображение измеряемых параметров объектов в коэффициенты ДФ;

$\Psi^{-1}(\quad)$ – представляет собой множество всех элементов y_{ij}, образами которых при отображении ϕ являются коэффициенты α_{ig} ДФ.

Математические основы дискриминантного анализа позволяют принять условие, что функция $\mu_{\phi}(\ \ )$ есть обычное отображение вида: ϕ: $\{y_{ij}\} \rightarrow \{\alpha_{ig}\}$ [6-8]. Тогда функция $\mu_{g}(\ \ )$ может быть представлена в следующем виде:

$$\mu_{g} = \sup_{g=\overline{1,\theta}} \min\{\mu^{o}(y_{\omega}^{j}), \mu(y_{ij}) : i = \overline{1,n}\,;\ j = \overline{1,N}\}.$$

Количество (θ) вариантов ОВ может быть определено как число сочетаний C_{m}^{N},

где

$$m = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_{j}\,;\ \varepsilon_{j} = \{2, \text{если } (j \in \omega_{1}) \wedge (j \in \omega_{2})\,;|$$

Заметим, что в том случае, если все производимые измерения и принимаемые решения четки, то $\mu_{\phi} = 1$ и $\theta = 1$, т.е. решение задачи сводится к обычному, четкому дискриминантному анализу.

Число вариантов может быть сокращено, если принять условие, что функция принадлежности каждого g-го варианта комплектования ОВ должна быть не ниже некоторого порогового значения $(\alpha\ \cdot)$ четкости оценки ДФ. Для генерации вариантов ОВ могут быть эффективно использованы известные формальные методы.

Рассмотрим пример практической реализации метода. В качестве исходных данных примем данные предыдущего примера (таблица 1) дискриминантного анализа, но будем полагать, что классификация ОВ осуществляется экспертами нечетко. Результаты классификации ОВ представлены в таблице 3.

Таблица 3.
Результаты классификации ОВ
Table 3.
Results of classification of the training sample

Номера обучаемых	Оцениваемые параметры				
	y*1*(X*1*)	***y*2**	***y*3**	$\mu\,(y_{\omega_1}^{j})$	$\mu\,(y_{\omega_3}^{j})$
1	0,87	0,2	0,6	0,8	0,2
2	0,84	0,1	1,0	1	-
3	0,81	0,2	0,9	1	-
4	0,9	0,3	0,7	1	-
5	0,87	0,1	0,8	1	-
6	0,81	0,3	0,1	-	1
7	0,75	0,4	0,2	0,3	0,7
8	0,78	0,3	0,5	0,4	0,6
9	0,84	0,4	0,3	-	1
10	0,75	0,5	0,4	-	1

Верхние и нижние пределы допусков измеренных параметров равны:

$x_{1H} = 0{,}75\,;\ x_{2H} = 0{,}1\,;\ x_{3H} = 0{,}1\,;$

$x_{1B} = 0{,}9;\ x_{2B} = 0{,}5;\ x_{3B} = 1{,}0;$

Нормированные значения параметров обучающей выборки вычисляются по аналогии с предыдущим примером. Для выявления всех возможных вариантов формирования обучающих выборок примем условие, что $\mu_{g} \geq 0{,}2$. Результаты генерации вариантов формирования обучающих выборок представлены в таблице 4.

Результаты расчетов коэффициентов ДФ для каждого варианта и их функции принадлежности (μ_{g}) приведены в таблице 5.

Допустим, что с помощью построенной системы дискриминантного анализа необходимо оценить уровень знаний обучающегося. На основе предварительного анализа были определены нормированные значения результатов выполнения им контрольных заданий $y_{1} = 0{,}84\,;\ y_{2} = 0{,}3\,;\ y_{3} = 0{,}7$ с четкостью $\mu_{01} = \mu_{03} = 1, \mu_{02} = 0$. Вычисленные значения ДФ становится $Q = 0{,}57 - 0{,}61$. Как видно из расчетов, по уровню знаний обучающийся удовлетворяет требованиям профессиональной деятельности и заслуживает положительной оценки.

В том случае, если представление о необходимом уровне знаний обучающихся изменяется вследствие изменения требований к ним, то дискриминантная функция должна быть определена на основе новой обучающей выборки. Признаком необходимости пересмотра состава обучающей выборки является нарушение неравенства (4). Так как подобные изменения в течение всего жизненного цикла обучающей системы возникают относительно редко, то рассчитанная дискриминантная функция может быть использована в течение продолжительного промежутка времени. При этом в рамках этого метода представляется возможным учесть широкий спектр разнообразных факторов, определяющих условия их реальной деятельности.

Таблица 4.
Результаты расчета вариантов ОВ
Table 4.
Results of calculation of training sample variants

Номер варианта (g)	Состав ОВ		μ_g
	$j \in \omega_1$	$j \in \omega_2$	
1	1,2,3,4,5	6, 9, 10, 7, 8	0,6
2	1, 2, 3, 4, 5, 7	6, 9, 10, 8	0,2
3	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8	6, 9, 10	0,3
4	2, 3, 4, 5, 7, 8	1, 6, 9, 10	0,2
5	2, 3, 4, 5, 8	1, 6, 9, 10, 7	0,2
6	2, 3, 4, 5	1, 6, 9, 10, 7, 8	0,2

Таблица 5.
Функции принадлежности вариантов ДФ
Table 5.
Membership functions of discriminant function variants

Номер обучающей выборки(g)	Функция принадлежности μ_g	Коэффициенты ДФ		
		α_{1g}	α_{2g}	α_{3g}
1	0,6	0,31	0,33	0,36
2	0,2	0,15	0,2	0,16
3	0,3	0,28	0,25	0,35
4	0,2	0,25	0,35	-0,2
5	0,2	0,16	0,14	-0,23
6	0,2	0,45	0,13	-0,28

Вместе с тем, дискриминантный анализ может найти широкое применение в процедурах анализа состояния объектов различной физической природы, в том числе и сложных технических систем, для которых наиболее важным его результатом является принятие решения о возможности или невозможности его дальнейшей эксплуатации.

В этом случае наличие рассчитанных параметров дискриминантной функции позволяет принять решение исходя из простых расчетов, не требующих глубоких знаний эксплуатационных характеристик объекта.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. **Андерсон Т.** Введение в многомерный статистический анализ. М.: Физматгиз, 1963. 500 с.
2. **Малиновский Л.Г.** Классификация объектов средствами дискриминантного анализа. М.: Наука, 1979. 260 с.
3. **Авен П.О.** Построение интегрального показателя в критериальном пространстве. // Автоматика и телемеханика. 1985. № 4. С. 87-91.

REFERENCES

1. **Anderson T.** Introduction to a Multivariate Statistical Analysis. Moscow: Fizmatgiz; 1963. 500 p.
2. **Malinovsky L.G.** Classification of Objects by Means of Discriminant Analysis. Moscow: Nauka; 1979. 260 p.
3. **Aven P.O.** Construction of an Integral Exponent in Criterion Space. Automation and Remote Control. 1985;4:87-91.

4. **Беспалько В.П., Татур Ю.Г.** Системно-методическое обеспечение учебно-воспитательного процесса подготовки специалистов. М.: Высш. шк., 1989. 141 с. ISBN 5-06-000170-9.

5. **Микони С.В., Соколов Б.В., Юсупов Р.М.** Квалиметрия моделей и полимодальных комплексов: монография. М.: РАН, 2018. 314 с. ISBN 978-5-907036-32-1.

6. **Зайченко Ю.П.** Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах. Учебное пособие для студентов высших учебных заведений. Калининград: «Издательский Дом «Слово», 2008. 344 с.

7. **Козлов В.Н.** Системный анализ, оптимизация и принятие решений: учебное пособие. М.: Изд-во «Проспект», 2014. 176 с.

8. **Орловский С.А.** Проблемы принятия решений при нечеткой информации. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 208 с.

9. **Заде Л.А.** Роль мягких вычислений и нечеткой логики в понимании, конструировании и развитии информационных/интеллектуальных систем. // Новости Искусственного Интеллекта. №2-3. 2001. С. 7 — 11. EDN LHAVBC.

10. **Федеральный закон № 273-ФЗ от 29.12.2012** (ред. 02.07.2021) «Об образовании в Российской Федерации», статья 2, пункт 15.

11. **Spasennikov V., Androsov K., Golubeva G**. Ergonomic factors in patenting computer systems for personnel's selection and training // CEUR Workshop Proceedings : 30, Saint Petersburg, 22–25 сентября 2020 года. Saint Petersburg, 2020. P. 1. EDN MRWCZX.

4. **Bespalko V.P., Tatur Yu.G.** Systematic and Methodological Support of the Educational Process of Training Specialists. Moscow: Vysshaya Shkola; 1989. 141 p.

5. **Mikoni S.V., Sokolov B.V., Yusupov R.M.** Qualimetry of Models and Polymodal Complexes. Moscow: RAN; 2018. 314 p.

6. **Zaichenko Yu.P.** Fuzzy Models and Methods in Intelligent Systems. Kaliningrad: Slovo; 2008. 344 p.

7. **Kozlov V.N.** System Analysis, Optimization and Decision Making. Moscow: Prospekt; 2014. 176 p.

8. **Orlovsky S.A.** Problems of Decision-Making with Fuzzy Information. Moscow: Nauka; 1981. 208 p.

9. **Zadeh L.A.** Roles of Soft Computing and Fuzzy Logic in the Conception, Design and Deployment of Information / Intelligent Systems. Computational Intelligence. 2001;2(3):7-11.

10. **Federal Law No. 273-FZ of 2012 Dec 29** (as Amended on 2021 Jul 2) on Education in the Russian Federation;2(15).

11. **Spasennikov V, Androsov K, Golubeva G.** Ergonomic Factors in Patenting Computer Systems for Personnel’s Selection and Training. In: Proceedings of the 30th International Conference on Computer Graphics and Machine Vision: CEUR Workshop Proceedings: 30; 2020 Sep 22-25; Saint Petersburg: 2020. p. 1.

Информация об авторах:

Багрецов Сергей Алексеевич - доктор технических наук, профессор Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского, профессор кафедры, тел. 8(911)779-86-94, международные идентификационные номера автора SPIN-код: 7463-8396, AuthorID: 514551

Мищенко Эдуард Владимирович – кандидат военных наук, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, тел. 8(911)087-96-37

Розанова Людмила Владимировна – научный сотрудник, Военный институт (научно-исследовательский) Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского

Information about the authors:

Bagretsov Sergey Alekseevich – Doctor of Technical Sciences, Professor of A.F. Mozhaisky Military Space Academy, Professor of the Department, ph. 8(911)779-86-94; the author’s international identification numbers: SPIN-code: 7463-8396, AuthorID: 514551

Mishchenko Eduard Vladimirovich – Candidate of Military Sciences, A.F. Mozhaisky Military Space Academy, ph. 8(911)087-96-37

Rozanova Lyudmila Vladimirovna – Researcher, Military Institute (research) A.F. Mozhaisky Military Space Academy

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 01.02.2023; одобрена после рецензирования 13.02.2023; принята к публикации 14.02.2023. Рецензент –Киричек А.В., доктор технических наук, профессор Брянского государственного технического университета, член редакционного совета журнала «Эргодизайн»

The paper was submitted for publication on the 1st of February, 2023; approved after the peer review on the 13th of February, 2023; accepted for publication on the 14th of February, 2023. Reviewer – Kirichek A.V., Doctor of Technical Sciences, Professor of Bryansk State Technical University, member of the editorial board of the journal “Ergodesign”.