

# **Текстовые сюжетные задачи с параметром как средство формирования исследовательских умений учащихся 7–9-х классов**

## **Text plot tasks with a parameter as a means of forming the research skills of students in grades 7–9**

УДК 372.851

Получено: 02.10.2022

Одобрено: 16.10.2022

Опубликовано: 25.12.2022

**Позднякова Е.В.**

Канд. пед. наук, доцент, доцент кафедры математики, физики и математического моделирования Кузбасского гуманитарно-педагогического института Кемеровского государственного университета

**Pozdnyakova E.V.**

Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics, Physics and Mathematical Modeling of the Kuzbass Humanitarian Pedagogical Institute of Kemerovo State University

**Пичугова В.В.**

Магистрант Кузбасского гуманитарно-педагогического института Кемеровского государственного университета; учитель математики МБОУ «Сосновская СОШ» Новокузнецкого района

**Pichugova V.V.**

Master student of the Kuzbass Humanitarian Pedagogical Institute of Kemerovo State University; mathematics teacher MBOU "Sosnovskaya secondary school" Novokuznetsk district

### **Аннотация**

На основе анализа познавательных универсальных учебных действий определены исследовательские умения математической деятельности учащихся основной школы; проанализированы средства формирования и диагностики исследовательских умений при обучении математике. Рассмотрены текстовые сюжетные задачи с параметром как средство формирования и диагностики исследовательских умений; представлена методика организации работы с такими задачами с помощью онлайн-сервиса GeoGebra на примере текстовой задачи для 9 класса; приведены критерии и показатели уровней развития исследовательских умений, которые могут быть использованы для исследования динамики развития исследовательских умений в процессе решения задач с параметрами.

**Ключевые слова:** универсальные учебные действия, исследовательские умения, математическая деятельность, текстовые сюжетные задачи с параметром, учащиеся 7 – 9-х классов, GeoGebra.

### **Abstract**

Based on the analysis of cognitive universal educational actions, the research skills of mathematical activity of primary school students are determined; the means of forming and diagnosing research skills in teaching mathematics are analyzed. Text plot tasks with

a parameter are considered as a means of forming and diagnosing research skills; a methodology for organizing work with such tasks using the GeoGebra online service is presented on the example of a text task for grade 9; the criteria and indicators of the levels of development of research skills are given, which can be used to study the dynamics of the development of research skills in the process of solving problems with parameters.

**Keywords:** universal learning activities, research skills, mathematical activity, text plot tasks with a parameter, students of grades 7-9, GeoGebra.

Одним из актуальных трендов современного школьного образования является развитие творческой и исследовательской деятельности обучающихся. ФГОС ООО [15] определяет в структуре метапредметных образовательных результатов познавательные исследовательские действия, а в Примерных рабочих программах основного общего образования по предмету «Математика» (базовый и углубленный уровни) конкретизирован состав таких действий с учетом специфики математической деятельности [16], [17]. Понимая умение как «освоенный субъектом способ выполнения действия, обеспечиваемый совокупностью приобретенных знаний и навыков» [7], выделим следующие исследовательские умения математической деятельности на основе анализа структуры познавательных базовых исследовательских универсальных учебных действий (УУД), представленных в [16] и [17] (табл. 1).

*Таблица 1*

**Познавательные базовые исследовательские УУД и исследовательские умения математической деятельности**

Познавательные базовые исследовательские УУД	Исследовательские умения математической деятельности
использовать вопросы как исследовательский инструмент познания; формулировать вопросы, фиксирующие противоречие, проблему, самостоятельно устанавливать искомое и данное, формировать гипотезу, аргументировать свою позицию, мнение	- уметь проводить математическое исследование с помощью вопросно-ответных процедур - уметь выдвигать и обосновывать гипотезы
проводить по самостоятельно составленному плану несложный эксперимент, небольшое исследование по установлению особенностей математического объекта, зависимостей объектов между собой;	- уметь проводить эксперимент по установлению особенностей математического объекта
самостоятельно формулировать обобщения и выводы по результатам проведенного наблюдения, исследования, оценивать достоверность полученных результатов, выводов и обобщений; прогнозировать возможное развитие процесса, а также выдвигать предположения о его развитии в новых условиях.	- уметь анализировать результаты математического исследования

Закономерно, что в теории и практике обучения математике не прекращается интенсивный методический поиск средств и способов развития универсальных учебных действий и исследовательских умений школьников. Так, авторский коллектив под руководством Л.В. Шкериной определяет принципы конструирования метапредметных заданий как средства формирования УУД и практический конструктор таких заданий [19], предлагает систему оценивания универсальных учебных действий на основе критериально-базисного подхода [20], [21], [22]. В работах В.А. Далингера и его учеников определены сущность, особенности, дидактические функции учебного исследования по математике, предложены задания для организации поисково-исследовательской деятельности в процессе математической подготовки школьников [4]. В исследованиях М.В. Егуповой уделяется внимание практико-ориентированным исследовательским задачам [6]. Л.И. Боженкова [1], [2] рассматривает проблему формирования универсальных учебных действий в процессе математической деятельности

учащихся 7 – 9-х классов и предлагает систему упражнений для обогащения интеллектуального опыта обучающихся. Изучая проблему развития исследовательских умений и креативности старшеклассников, научная школа С.Н. Дворяткиной актуализирует такое понятие как «гибридная интеллектуальная образовательная среда, интегрирующая функции искусственных нейронных сетей, генетических алгоритмов, нечеткой логики, экспертных систем, и обеспечивающая индивидуализацию обучения, синтез математического и компьютерного моделирования содержания знаний и процедур» [5, с. 39]. Развитие исследовательской деятельности учащихся с использованием программ динамической математики рассматривается в работах [10], [12.], [24] и др. Идеи развития и оценивания УУД школьников на основе учебного исследования по математике представлены в трудах [13], [14], [23] и др.

Высоким потенциалом для развития исследовательских умений учащихся 7 – 9-х классов обладают текстовые сюжетные задачи с параметром. В.А. Далингер отмечает, что «решение текстовых и сюжетных задач формирует предметные и общеинтеллектуальные умения и навыки, а введение параметра предполагает исследование величин, входящих в условие, и способствует развитию поисково-исследовательской деятельности учащихся» [3, с. 683]. Решение и исследование такой задачи предполагает составление уравнения и может быть выстроено по следующей схеме:

1. *Анализ.* Установление зависимости между данными и неизвестными величинами, выбор параметра, составление уравнения (т.е. моделирование). На данном этапе может быть организован эвристический диалог и будут развиваться такие умения, как проводить математическое исследование с помощью вопросно-ответных процедур, выдвигать и обосновывать гипотезы.

2. *Решение уравнения (системы уравнений).* Выбор метода решения уравнения с параметрами, нахождение корней уравнения.

3. *Исследование решения задачи.* От ученика требуется установить допустимые значения искомых и данных величин и соотношения между ними по условию задачи; определить, при каких значениях величин корни уравнения будут действительными; исследовать какие из корней и при каких значениях параметра удовлетворяют условиям задачи. Таким образом, будут развиваться умения проводить эксперимент по установлению особенностей математического объекта и анализировать результаты исследования [3].

Одним из способов решения методической проблемы обучения учеников решению задач с параметрами является применение доступных и понятных цифровых инструментов, в частности, программы динамической математики GeoGebra. Преимущества данной программы при обучении решению учащихся параметрических задач раскрыты в исследованиях [8], [9], [11], [18] и др. Данный цифровой ресурс позволяет графически иллюстрировать динамику изменения параметра в задаче, объяснять суть параметра и методы решения, связанные с построением геометрических и графических образов уравнений, неравенств и их систем.

Рассмотрим методику организации работы учеников 9 класса по решению текстовой задачи с параметром.

*Задача.* «Двое рабочих выполняют некоторую работу. Если первый рабочий проработает 2 часа, а затем они вместе будут работать 3 часа, то они вместе выполняют 75% всей работы. Какие значения может принимать время выполнения всей работы двумя рабочими вместе?» [3, с. 701].

*Анализ.* Организация эвристического диалога.

- О каком процессе идет речь? (Совместная работа)

- Что требуется найти? (Пределы значений времени выполнения работы)

- Сколько времени работает в одиночестве первый рабочий? (2 часа)
- Сколько времени рабочие работают вместе? (3 часа)
- Какую часть работы они при этом выполняют? (75% всей работы)
- Известна ли удельная производительность труда первого рабочего?

Второго рабочего?..

Совместный диалог учителя и учеников завершается построением математической модели заданной ситуации:

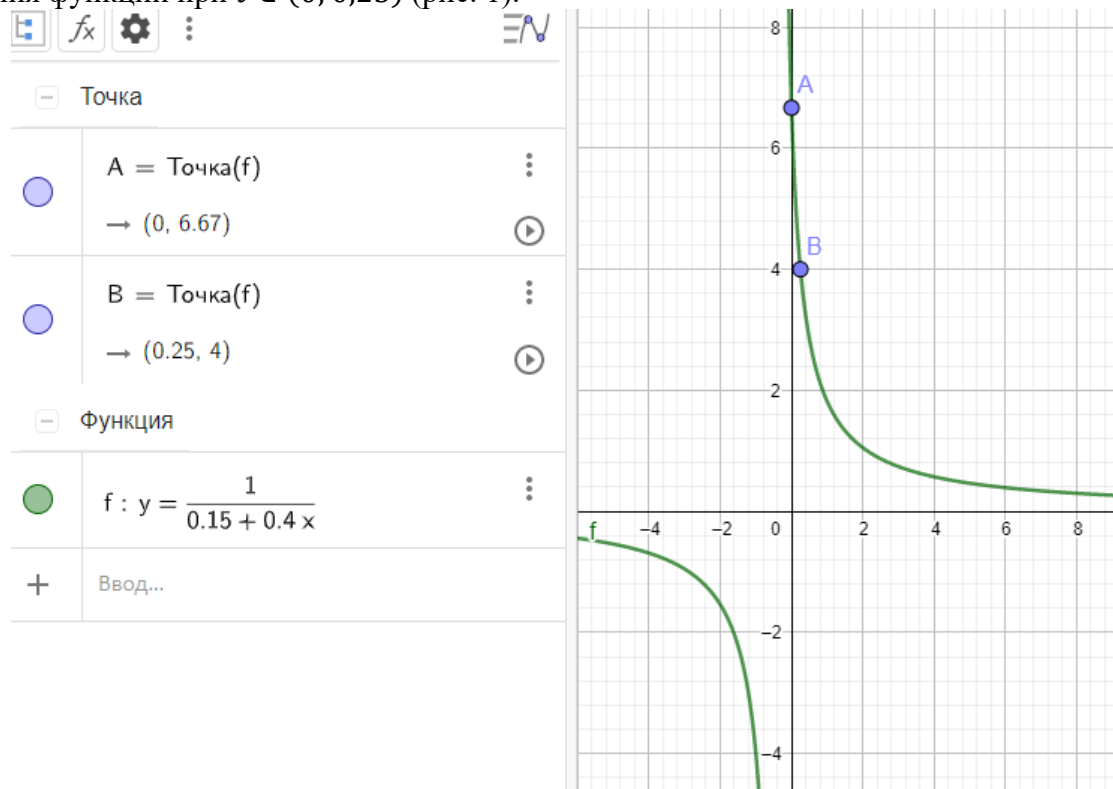
$$\begin{cases} t(p_1 + p_2) = 1 \\ 2p_1 + 3(p_1 + p_2) = 0,75 \end{cases}, \text{ где } p_1 \text{ и } p_2 - \text{ удельная производительность труда}$$

первого и второго рабочего соответственно,  $t$  – время выполнения всей работы двумя рабочими совместно (в часах).

*Решение системы уравнений.* Из второго уравнения системы:  $p_1 = 0,15 - 0,6p_2$ . Тогда выразив  $t$  из первого уравнения, получим  $t = \frac{1}{0,15+0,4p_2}$ .

По смыслу задачи  $p_1 > 0$ ,  $p_2 > 0$ . Тогда  $0,15 - 0,6p_2 > 0$ , следовательно,  $p_2 < 0,25$ .

*Исследование решения задачи.* Учитель предлагает рассмотреть функцию  $t = \frac{1}{0,15+0,4p_2}$ , обращая внимание на исследование вопроса о непрерывности функции. Ученики строят график функции в онлайн-сервисе GeoGebra и отмечают значения функции при  $t \in (0; 0,25)$  (рис. 1).



**Рис. 1.** Построение графика функции в онлайн-сервисе GeoGebra

Аналитическим решением получаем более точную оценку изменения параметра:  $t \in (4; 6\frac{2}{3})$ .

Следующим шагом может быть дальнейшее развитие задачи: учитель предлагает обобщить задачу, введя еще один параметр. Например, работая вместе, рабочие выполняют  $a$  % всей работы. Тогда  $a \in (0; 100]$ . Исходная модель заданной ситуации преобразуется следующим образом:

$$\begin{cases} t(p_1 + p_2) = 1 \\ 2p_1 + 3(p_1 + p_2) = k \end{cases}, \text{ где } k = \frac{a}{100}, k \in (0; 1]$$

$$t = \frac{1}{\frac{k}{5} + 0,4p_2}$$

Особое внимание учащихся следует обратить на исследование границ переменной  $p_2$ .

$$p_1 > 0, p_2 > 0; \text{ из второго уравнения } p_1 = \frac{k}{5} - 0,6p_2.$$

$$\frac{k}{5} - 0,6p_2 > 0; p_2 < \frac{k}{3}; p_2 < \frac{1}{3}.$$

Наблюдение за изменением значения  $t$  при изменении параметра  $k$  осуществляется с помощью сервиса GeoGebra (рис. 2).

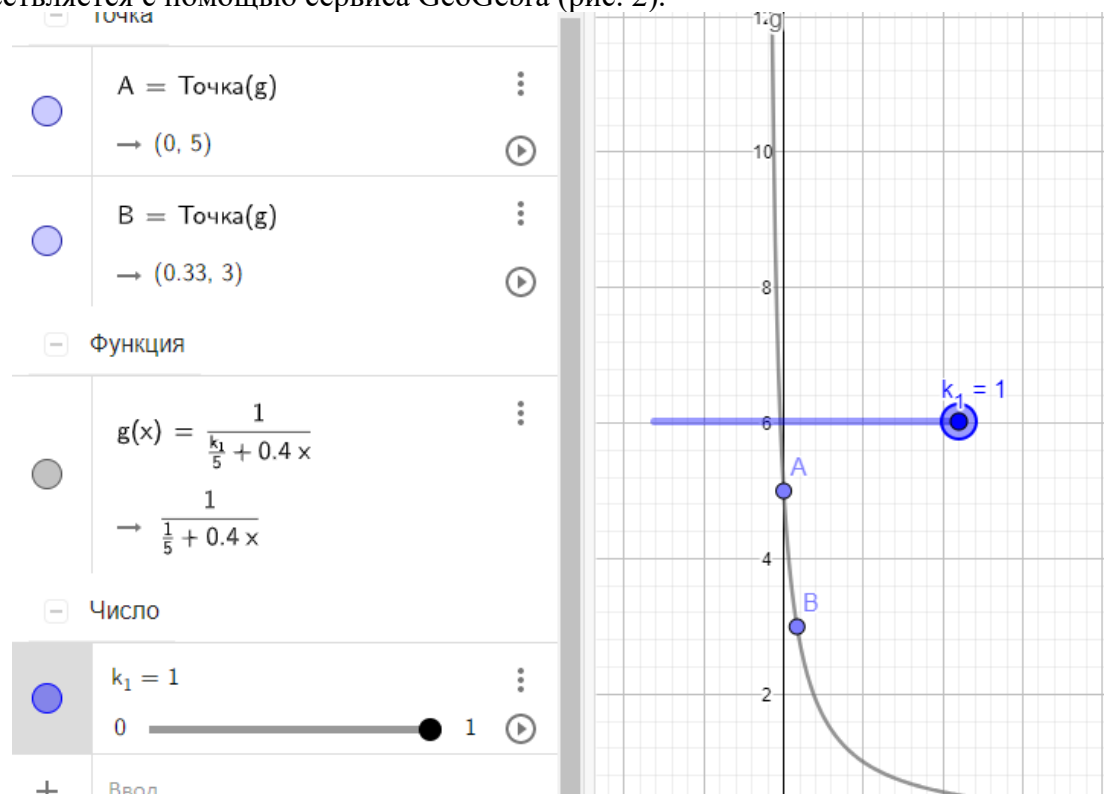


Рис. 2. Наблюдение за изменением значения  $t$

Таким образом, можно, например, заметить, что если при заданных условиях рабочие выполняют 100% работы, то время ее совместного выполнения может занять от трех до пяти часов.

Текстовые сюжетные задачи с параметром также могут являться оценочным средством уровня сформированности исследовательских умений учащихся. Оценивание развития указанных умений осуществляется в ходе наблюдения за деятельностью учащихся, а общая логика прогресса развития исследовательских умений – это положительная динамика инициативности и самостоятельности, которые проявляет ученик при решении такого типа задач.

В табл. 2 представлена характеристика уровней сформированности исследовательских умений ученика, которые определяет учитель на каждом этапе работы над задачей. Условное обозначение уровней: 1 – «Ведомый» (В), 2 – «Инициатор» (И), 3 – «Стратег» (С). Первый уровень (В) предполагает, что ученик выполняет предложенное задание, опираясь на данный алгоритм или образец решения. Учащиеся, имеющие данный уровень сформированности исследовательских умений, выполняют работу непосредственно под руководством учителя. Второй уровень (И) предполагает частичную самостоятельность ученика: учащийся выполняет предложенное задание при частичной поддержке учителя (наводящие вопросы, совместное составление плана решения задачи, ознакомление

с основной идеей решения и т.п.). Третий уровень (С) предполагает самостоятельное и правильное решение исследовательской задачи.

Таблица 2

**Характеристика уровней развития исследовательских умений ученика**

Исследовательские умения	Уровни развития исследовательских умений		
	“Ведомый”	“Инициатор”	“Стратег”
уметь проводить математическое исследование с помощью вопросно-ответных процедур-	проводит математическое исследование, анализируя условия заданной ситуации с помощью наводящих вопросов учителя	проводит математическое исследование, анализируя условия заданной ситуации, самостоятельно выделяет требование задачи, задавая учителю уточняющие вопросы	самостоятельно анализирует условия заданной ситуации, выделяет требование задачи, проверяет данные на необходимость, достаточность, противоречивость, неопределенность, вступает в диалог с учителем и учениками
уметь выдвигать и обосновывать гипотезы	высказывает гипотезу о выборе параметра с помощью наводящих вопросов учителя, формулирует суждения, строит математическую модель, опираясь на предложенный образец	высказывает гипотезу о выборе параметра, формулирует и преобразовывает суждения, выявляет математические закономерности и взаимосвязи в наблюдениях и утверждениях, строит математическую модель, используя дозированную помощь учителя	самостоятельно формулирует и преобразовывает суждения, выявляет математические закономерности и взаимосвязи в наблюдениях и утверждениях, выдвигает гипотезы, выбирает оптимальную форму представления информации
уметь проводить эксперимент по установлению особенностей математического объекта	устанавливает допустимые значения искомого и данных величин, исследует решение при различных значениях параметра с помощью программ динамической математики, соотнося все действия с предложенным алгоритмом и под руководством учителя	устанавливает допустимые значения искомого и данных величин, исследует решение при различных значениях параметра с помощью программ динамической математики, используя дозированную помощь учителя	самостоятельно устанавливает допустимые значения искомого и данных величин, исследует решение (корни уравнения) при различных значениях параметра с помощью программ динамической математики
уметь анализировать результаты математического исследования	анализирует результаты исследования, делает выводы с помощью наводящих вопросов учителя	самостоятельно делает выводы; оценивает результаты математического исследования с помощью других учеников или учителя	самостоятельно делает выводы и оценивает результаты математического исследования, предлагает варианты развития задачи

Таким образом, на основе анализа содержания познавательных универсальных учебных действий определены исследовательские умения математической деятельности учащихся основной школы; проанализированы средства формирования и диагностики исследовательских умений при обучении математике; рассмотрены текстовые сюжетные задачи с параметром как средство формирования и диагностики исследовательских умений; представлена методика организации работы с такими задачами с помощью онлайн-сервиса GeoGebra на примере текстовой задачи для 9 класса; приведены критерии и показатели уровней развития исследовательских умений, определяемые на основе специфики параметрических текстовых задач. Авторы высказывают предположение, что систематическое использование текстовых задач с параметрами в процессе обучения математике будет способствовать достижению предметных и метапредметных результатов обучения, развитию творческих способностей учащихся в области математической деятельности.

### Литература

1. *Боженкова Л.И.* Методика формирования универсальных учебных действий при обучении алгебре. - Москва : Лаборатория знаний, 2016. – 240 с.
2. *Боженкова Л.И.* Методика формирования универсальных учебных действий при обучении геометрии. – Москва : Бином. Лаборатория знаний, 2015. – 205 с.
3. *Далингер В.А.* Задачи с параметрами: учебное пособие. - Омск: Изд-во ООО “Амфора”, 2012. - 961 с.
4. *Далингер В.А., Князева О.О.* Учебно-исследовательская работа учащихся по математике: учебное пособие. - Омск: Изд-во “Амфора”, 2017. - 225 с.
5. *Дворяткина С.Н., Жук Л.В.* Организационно-методическое обеспечение развития исследовательской деятельности школьников в гибридной интеллектуальной образовательной среде // Ярославский педагогический вестник. - 2021. - № 3 (120). - С. 36-45.
6. *Егунова М.В., Мошуря Ю.В.* О роли задач на приложения математики в достижении метапредметных образовательных результатов // Наука и школа. - 2019. - № 2. - С. 80-88.
7. *Карпенко Л.А., Петровский А.В., Ярошевский М.Г.* Краткий психологический словарь. - Ростов-на Дону: Феникс, 1998.
8. *Кириллова Д. А.* Применение среды GeoGebra при изучении темы «Уравнение окружности» как способ перехода к решению задач с параметром // Наука и школа. - 2022. - № 2. - С. 152–160. DOI: 10.31862/1819-463X-2022-2-152-160.
9. *Курилова О. Л., Степанова Е. А.* Применение среды Geogebra при решении задач с параметрами (диск-приложение к журналу) // Математика в школе. - 2020. - № 4.- С. 44.
10. *Ларин С.В., Майер В.Р., Кочеткова Т.О., Карнаухова О.А.* Особенности создания и использования компьютерных анимационных рисунков в обучении математике // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. - 2020. - № 1 (51). - С. 6 – 14.
11. *Ларин С. В.* Методика обучения математике: компьютерная анимация в среде Geogebra: учеб. пособие для вузов. 2-е изд., испр. и доп. - Москва: Юрайт, 2020. - 233 с.

12. Позднякова Е.В., Осипова Л.А. Организация учебных исследований по геометрии на основе компьютерной программы “Живая математика” // Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании. - 2018. - № 3. - С. 54-58.
13. Позднякова Е.В., Фомина А.В. Проектирование диагностического инструментария для определения уровня сформированности универсальных учебных действий в курсе математики основной школы // Азимут научных исследований: педагогика и психология. - 2018. - Т.7. № 1 (22). - С. 171-176.
14. Позднякова Е.В., Фомина А.В. Развитие исследовательских умений задачами реальной математики в элективном курсе предпрофильной подготовки учащихся // Профильная школа. - 2018. - Т.6. № 3. - С.38 – 42.
15. Приказ Минобрнауки России от 31.05.2021 № 287 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования». URL: <http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202107050027> (дата обращения: 26.07.2022).
16. Примерная рабочая программа основного общего образования предмета «Математика», базовый уровень. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию, протокол 3/21 от 27.09.2021. Москва, 2021. - 104 с.
17. Примерная рабочая программа основного общего образования предмета «Математика», углубленный уровень. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию, протокол 2/22 от 29.04.2022. Москва, 2022. - 89 с.
18. Троякова Г. А., Монгуш А. С., Танзы М. В. Методика подготовки учащихся к решению задач с параметрами с использованием среды Geogebra // Мир науки, культуры, образования. - 2018. - № 5. - С. 27–35.
19. Тумашева О.В., Шашкина М.Б. Средства формирования и оценивания метапредметных результатов обучающихся поколения Z // Азимут научных исследований: педагогика и психология. - 2020. - Т.9. № 1 (30). - С. 285-289. doi: 10.26140/anip-2020-0901-0067.
20. Шкерина Л. В., Гаврилюк А. С., Табинова О. А., Шашкина М. Б. Бипредметный мониторинг результатов освоения универсальных учебных действий обучающимися 7–9 классов в процессе обучения математике // Перспективы науки и образования. - 2020. - № 2 (44). - С. 179-194. doi: 10.32744/pse.2020.2.15.
21. Шкерина Л.В. , Кейв М.А., Журавлева Н.А. , Берсенева О.В. Методика диагностики универсальных учебных действий учащихся при обучении математике // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. - 2017. - № 3. - С. 17–29.
22. Шкерина Л.В. Критериально-базисный подход к оцениванию универсальных учебных умений школьников при обучении математике // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. - 2017. - № 2. - С. 28–31.
23. Щербатых С.В., Натырова Е.М. Исследовательское обучение как основа формирования универсальных учебных действий у учащихся в школьном курсе математики // Вестник Брянского государственного университета. - 2015. - №2. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/issledovatel'skoe-obuchenie-kak-osnova-formirovaniya-universalnyh-uchebnyh-deystviy-u-uchaschihsya-v-shkolnom-kurse-matematiki>
24. Экспериментальная математика: учебное пособие / под общ. ред. М.А. Павловой. Архангельск: Изд-во АО ИОО, 2017. - 184 с.