

Научноёмкие технологии в машиностроении. 2023. №2 (140). С. 32-39.  
Science intensive technologies in mechanical engineering. 2023. №2 (140). P. 32-39.

Научная статья  
УДК 539.621  
doi:10.30987/2223-4608-2023-2-32-39

## Обобщённый закон внешнего трения скольжения твёрдых тел

Александр Джалюльевич Бреки<sup>1,2</sup>, д.т.н.

<sup>1</sup> Санкт-петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Институт проблем машиноведения РАН, г. Санкт-Петербург, Россия  
albreki@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0002-4452-3896>

**Аннотация.** Предложена к рассмотрению математическая модель, описывающая закон внешнего трения скольжения с учётом изменений состояний скользящего контакта. Реализовано обобщение классических линейных моделей внешнего трения посредством введения дополнительных слагаемых, учитывающих переходы к новым условиям фрикционного взаимодействия. Разработанная математическая модель позволяет аналитически описать принципиальную схему изменения классического коэффициента трения в зависимости от нагрузки Б.И. Костецкого и дополнить её.

**Ключевые слова:** обобщённый закон трения, математическая модель, трение скольжения, переходный процесс, интеграл Ферми-Дирака

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда по приоритетному направлению деятельности Российского научного фонда «Проведение фундаментальных научных исследований и поисковых научных исследований отдельными научными группами» научного проекта: «Применение цифрового моделирования и больших данных для повышения эффективности механической обработки титановых лопаток паровых турбин и их эксплуатации в условиях каплеударной эрозии» № 22-19-00178.

**Для цитирования:** Бреки А. Д. Обобщённый закон внешнего трения скольжения твёрдых тел // Научноёмкие технологии в машиностроении. – 2023. – № 2 (140). – С. 32-39. doi: 10.30987/2223-4608-2023-2-32-39.

Original article

## Generalized law of contact gliding friction of solids

Alexander D. Breki<sup>1,2</sup>, Dr.Sc.Tech.

<sup>1</sup> Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

<sup>2</sup> Institute of Problems of Machine Science of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia  
albreki@yandex.ru

**Abstract.** A mathematical model describing the law of contact gliding friction, taking into account changes in the sliding contact states, is proposed for consideration. The generalization of classical linear models of contact friction is carried out by putting in more additive components allowing for new state transitions of frictional interaction. The developed mathematical model makes it possible to give analytic description of the schematic diagram of classical slip coefficient change depending on the load of B.I. Kostetsky and allows adding to.

**Keywords:** generalized friction law, mathematical model, sliding friction, transition, Fermi-Dirac integral

**Acknowledgments:** The work was supported by the grant of the Russian Science Foundation (RSF) in the priority area of the Foundation's activities «Conducting fundamental scientific research and exploratory research by individual scientific groups» within the scientific project: «Application of digital modeling and big data to improve the efficiency of mechanical processing of titanium blades of steam turbines and their operation in conditions of impingement corrosion» No. 22-19-00178.

**For citation:** Breki A.D. Generalized law of contact gliding friction of solids. / Science intensive technologies in mechanical engineering, 2023, no. 2 (140), pp. 32-39. doi: 10.30987/2223-4608-2023-2-32-39.

Начало исследованию закономерностей внешнего трения скольжения положил великий итальянский учёный и изобретатель Леонардо да Винчи (1508 г.). Он установил следующую зависимость силы трения твёрдых тел от нормальной силы [1]:

$$F_f = \frac{F_N}{4} = f_L \cdot F_N, \quad (1)$$

где  $F_f$  – сила внешнего трения;  $F_N$  – нормальная сила, прижимающая два твёрдых тела;  $f_L$  – средний коэффициент трения для различных твёрдых тел по Леонардо да Винчи, соответствующий тому комплексу условий, которые им использовались.

Далее (1699 г.), французский механик и физик Гийом Амонтон, предложил более общую зависимость, связывающую силу трения при относительном перемещении двух тел с нормальной нагрузкой, прижимающей эти тела друг к другу [2]:

$$F_f = f \cdot F_N, \quad (2)$$

где  $f = F_f / F_N = \text{const}$  – коэффициент трения, показывающий долю возникающей силы трения скольжения от нормальной силы при относительном движении контактирующих твёрдых тел.

Французский физик Шарль Кулон (1778 г.) предложил другой вариант математической мо-

дели внешнего трения скольжения, учитывающей адгезионное взаимодействие поверхностей твёрдых тел [3]:

$$F_f = \frac{F_N}{f_C} + F_{fA}, \quad (3)$$

где  $F_{fA}$  – адгезионная составляющая силы внешнего трения;  $f_C$  – коэффициент трения по Шарлю Кулону. Справедливо следующее равенство:

$$\frac{dF_f}{dF_N} = \frac{1}{f_C} = f_D, \quad (4)$$

где  $f_D$  – дифференциальный коэффициент трения, выражающий интенсивность изменения силы трения с ростом нагрузки, соответственно:

$$F_f = f_D \cdot F_N + F_{fA}. \quad (5)$$

При этом коэффициент трения равен:

$$f = \frac{F_f}{F_N} = f_D + \frac{F_{fA}}{F_N}, \quad (6)$$

т. е. меняется в зависимости от нагрузки по закону гиперболического типа и приближается к дифференциальному коэффициенту трения с ростом нормальной нагрузки  $f_D = \lim_{F_N \rightarrow \infty} f$  (рис. 1, а).

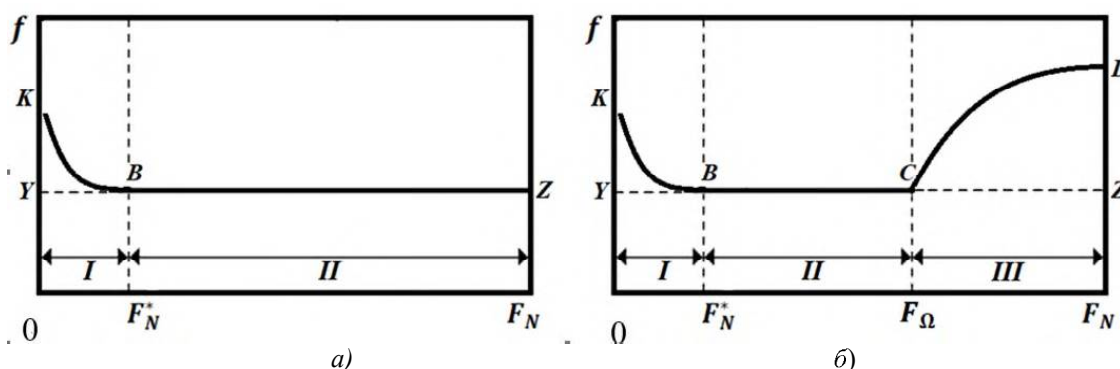


Рис. 1. Зависимость коэффициента трения от нормальной нагрузки: а – при соблюдении закона (5); б – при отклонении от закона (5), начиная с некоторой нагрузки [4]

Линия  $YZ$  выражает соблюдение закона (2), а линия  $KBZ$  является графиком (6) и выражает соблюдение двучленного закона трения (5), что показано на рис. 1, а.

Согласно крупному обобщению, сделанному Б.И. Костецким на основе анализа экспериментальных результатов большого количества авторов, при определённых значениях нормальной нагрузки для разных материалов и комплек-

сов условий, возникают отклонения от гиперболического закона изменения коэффициента трения (рис. 1, б) [4].

Зависимость коэффициента трения от нормальной нагрузки по Б.И. Костецкому имеет три характерных участка [4]:

I – переходный участок (данный участок соответствует приспособляемости поверхностей трения, которая в инженерной практике обычно

называется приработкой);

II – стационарный участок, соответствующий нормальному режиму работы узла трения, при котором реализуется окислительный износ. Нормальный режим характеризуется стабильным устойчивым коэффициентом трения с постоянным средним значением и допустимым (минимальным) износом, реализующимся за счёт образования прочных вторичных структур на поверхностях трения; диапазон нормального режима, определяемый величинами давления и коэффициента трения, может изменяться в зависимости от условий трения;

III – участок повреждаемости (нижняя граница участка повреждаемости определяется ве пропахиванию и другим паталогическим процессам различной интенсивности: данные про-

цессы характеризуются большими колебаниями мичиной критического давления, превышение которого приводит к схватыванию, смятию, силы трения и интенсивным износом).

С другой стороны, экспериментальные результаты различных исследователей показывают [7 – 15 и др.], что отклонения от двучленного закона трения при достижении некоторой нормальной силы выражаются в форме изгибов линейных графиков зависимости силы трения от нагрузки [5, 6]. То есть от нулевой нагрузки график силы трения изменяется по закону (5) (рис. 2, а), а затем при достижении некоторой нагрузки начинает преломляться и вновь изменяется линейно, но под другим углом к оси абсцисс (рис. 2, б) [5, 6].

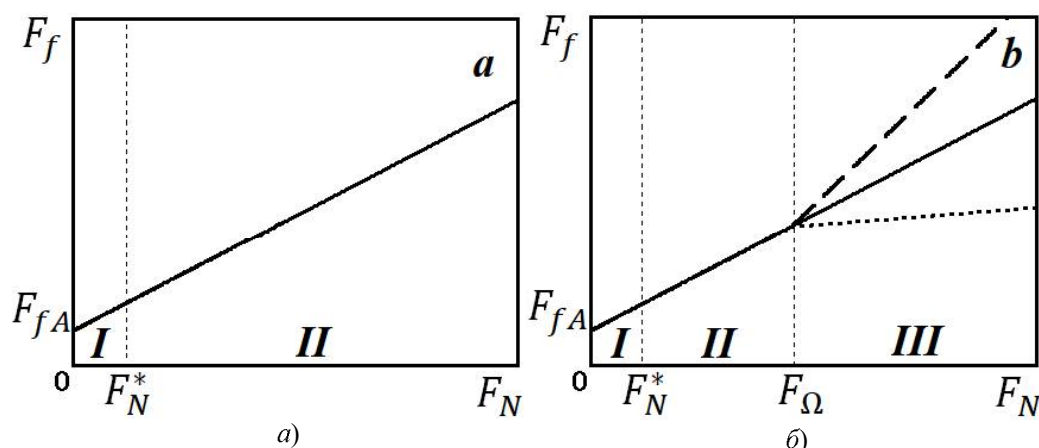


Рис. 2. Зависимость силы трения от нормальной нагрузки:

а – при соблюдении закона (5); б – при отклонении от закона (5), начиная с некоторой нагрузки [5, 6]

Следует отметить, что само наличие участка повреждаемости III, выявленного Б.И. Костецким, не опровергает справедливости (6), а соответственно и (5) до некоторого критического давления (нагрузки). Соответственно, математическую модель закона (5) необходимо дополнить таким образом, чтобы новая полученная модель совместно описывала бы все три участка изменения коэффициента трения и сохраняла бы при этом справедливость модели (5), как частного случая.

Анализ «специальных функций», используемых в различных разделах математики и физики, показал, что для дополнения математической модели (5) наиболее подходит использование интегралов Ферми-Дирака [16]:

$$F_j(x) = \frac{1}{\Gamma(j+1)} \int_0^{\infty} \frac{\xi^j}{1 + \exp(\xi - x)} d\xi, \quad (7)$$

где  $\Gamma(\ )$  – гамма-функция;  $j$  – порядок (индекс) интеграла. В атомной физике употребительны интегралы Ферми-Дирака целого и полуцелого индексов [17]. Для описания наблюдаемых отклонений от закона (5) подходит интеграл нулевого порядка (индекса), единственный который берётся в элементарных функциях [17]:

$$F_0(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \exp(\xi - x)} d\xi = \ln(1 + \exp(x)). \quad (8)$$

Отметим, что возможно использование и интеграла Ферми-Дирака порядка 0,5 и 1,0, однако они не берутся в элементарных функциях и необходимо использовать их приближения. Используя (8), введём следующую функцию от нормальной нагрузки:

$$F_{\Delta}(F_N) = \frac{\Delta f_D}{\Psi_N} \cdot F_0(\Psi_N(F_N - F_{\Omega})) = \frac{\Delta f_D}{\Psi_N} \cdot \ln(1 + \exp(\Psi_N(F_N - F_{\Omega}))). \quad (9)$$

Графики функции (9), при различных значениях параметров приведены на рис. 3.

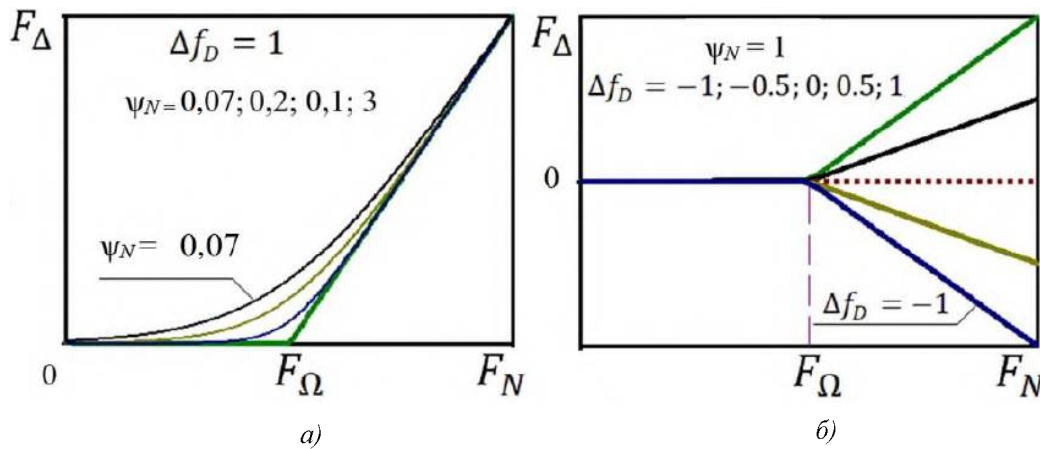


Рис. 3. Графики функции (9):

*a* – при изменении параметра  $\Psi_N$ ; *b* – при изменении параметра  $\Delta f_D$

При неограниченном увеличении параметра  $\Psi_N$  график (9) стремится к ломаной линии, а при небольших значениях две линии, близкие к прямым, соединяются дугообразной кривой, что показано на рис. 3, *a*. При увеличении модуля (абсолютной величины) параметра  $\Delta f_D$  (см. рис. 3, *b*) происходит приращение угла между осью абсцисс и отклоняющейся линией. При неограниченном увеличении обоих параметров отклоняющаяся линия становится перпендикулярной оси абсцисс в точке  $F_{\Omega}$ .

Таким образом, прибавляя к функции (5) функцию (9) мы получаем зависимость, графики которой показаны на рис. 2, *б*.

Согласно адгезионно-деформационной (молекулярно-механической) теории трения, сила трения складывается из двух составляющих [12, с. 220]:

$$F_f = F_{fD} + F_{fA}, \quad (10)$$

где  $F_{fD}$  – деформационная составляющая силы

внешнего трения;  $F_{fA}$  – адгезионная составляющая силы внешнего трения.

Деформационная составляющая силы трения равна [12, с. 214]:

$$F_{fD} = \beta_d \cdot F_N, \quad (11)$$

где  $\beta_d$  – деформационная составляющая коэффициента трения (в нашем обозначении). Адгезионная составляющая силы трения равна [12, с. 223]:

$$F_{fA} = \tau_{fA0} \cdot A_r + \beta_a \cdot F_N = \beta_a \cdot F_N + F_{fA0}, \quad (12)$$

где  $\tau_{fA0}$  – сдвиговая прочность адгезионной составляющей трения при нулевой нагрузке;  $A_r$  – фактическая площадь контакта;  $\beta_a$  – пьезокоэффициент адгезионной составляющей трения,  $F_{fA0}$  – адгезионная составляющая силы внешнего трения при нулевой нагрузке.

Подставляя (11) и (12) в (10) получим:

$$F_f = \beta_d \cdot F_N + \beta_a \cdot F_N + F_{fA0} = (\beta_d + \beta_a) \cdot F_N + F_{fA0}. \quad (13)$$

Из сравнения (13) и (5) видно, что второе слагаемое (13) выражает адгезионную составляющую только при нулевой нагрузке, а дифференциальный коэффициент трения соответственно равен:

$$f_D = \beta_d + \beta_a. \quad (14)$$

Соответственно можно записать:

$$F_f = (\beta_d + \beta_a) \cdot F_N + F_{fA0} = f_D \cdot F_N + F_{fA0}. \quad (15)$$

Законы (15) и (5) отличаются принципиально с точки зрения интерпретации получаемых экспериментальных результатов, однако математически при прибавлении (9) к (15) мы

также получаем зависимость, графики которой показаны на рис. 2, б. Поскольку закон (12) подтверждён многочисленными опытами И.В. Крагельского с сотрудниками, то мы принимаем справедливость (15).

$$F_f = f_{D0} \cdot F_N + F_{fA0} + \frac{\Delta f_D}{\psi_N} \cdot \ln(1 + \exp(\psi_N (F_N - F_\Omega))), \quad (16)$$

где  $f_{D0}$  – начальный дифференциальный коэффициент трения;  $\Delta f_D$  – полное приращение дифференциального коэффициента трения при изменении состояния фрикционного контакта;  $\psi_N$  – параметр, характеризующий интенсивность приращения дифференциального коэффициента трения;  $F_\Omega$  – значение нормальной нагрузки, со

Таким образом, прибавляя (9) к (15) мы получаем обобщённый закон трения, учитывающий отклонения, выявленные Б.И. Костецким и другими исследователями:

ответствующее максимальной интенсивности изменения дифференциального коэффициента трения.

Дифференцируя (16) получаем зависимость дифференциального коэффициента трения от нормальной нагрузки [5, 6]:

$$f_D = \frac{dF_f}{dF_N} = f_{D0} + \frac{\Delta f_D}{1 + \exp(-\psi_N (F_N - F_\Omega))}. \quad (17)$$

Частичное приращение дифференциального коэффициента трения:

$$\Delta f_{Dp} = f_D - f_{D0}. \quad (18)$$

Разделив (16) на  $F_N$  получаем зависимость коэффициента трения (классического) от нормальной нагрузки [5, 6]:

$$f = f_{D0} + \frac{F_{fA0}}{F_N} + \frac{\Delta f_D}{\psi_N \cdot F_N} \cdot \ln(1 + \exp(\psi_N (F_N - F_\Omega))). \quad (19)$$

Графики зависимостей (17) и (19) при различных значениях параметров приведены

на рис. 4.

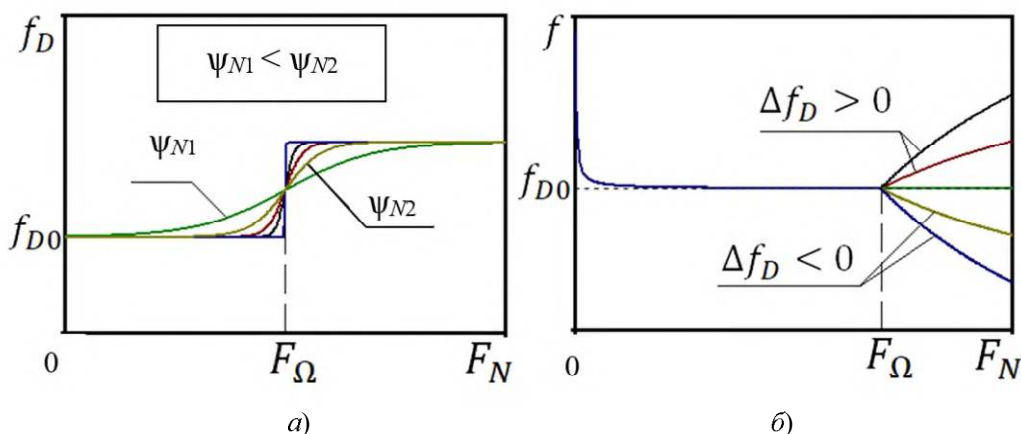


Рис. 4. Графики функции:

а – (17) при изменении параметра  $\psi_N$ ; б – (19) при изменении параметра  $\Delta f_D$

С увеличением параметра  $\psi_N$  длина интервала значений нормальной нагрузки  $\Delta F_{Ni}$ , на котором реализуется приращение  $\Delta f_D$ , уменьшается, как показано на рис. 4, а. Таким образом, параметр  $\psi_N$  обратно пропорционален величине  $\Delta F_{Ni}$ .

Здесь можно по аналогии с переходным процессом [18], ввести понятие фрикционного перехода как изменения трибологической ха-

рактеристики, между двумя соседними стационарными состояниями за интервал приращения воздействующего фактора, короткий по сравнению с полной рассматриваемой шкалой его варьирования. В данном случае имеем фрикционный переход по нагрузке (см. рис. 4, а). По аналогии с теорией систем автоматического управления (САУ) примем, что фрикционный переход считается завершённым, если выполня-

ется условие [19]:

$$|\Delta f_{Dp}(F_N) - \Delta f_D| \leq \varepsilon_f, \quad (20)$$

где  $\varepsilon_f$  – наперёд заданное положительное число. Примем как в САУ  $\varepsilon_f = (0,01 \dots 0,05) \Delta f_D$ , т. е. фрикционный переход считаем закончившимся, когда  $\Delta f_{Dp}$  отличается от своего установившегося значения не более чем на 1...5 % [19].

Выразим параметр, характеризующий интенсивность приращения дифференциального

$$\psi_N = -\frac{\ln\left(\frac{\Delta f_D}{0,99\Delta f_D} - 1\right)}{F_{Np} - F_\Omega} \cong -\frac{\ln(0,01)}{F_{Np} - F_\Omega} = \frac{(2/\lg e)}{F_{Np} - F_\Omega}, \quad (22)$$

где  $1/\lg(e)$  – математическая константа, называемая модулем перехода от десятичных логарифмов к натуральным. Очевидно, что (см. рис. 4, а):

$$F_{Np} - F_\Omega = \frac{\Delta F_{Nt}}{2}. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22) окончательно полу-

$$F_f = f_{D0} \cdot F_N + F_{fA0} + \frac{\Delta f_D \cdot \Delta F_{Nt}}{4 \cdot \ln 10} \cdot \ln\left(1 + \exp\left(\frac{4}{\Delta F_{Nt} \cdot \lg e} \cdot (F_N - F_\Omega)\right)\right). \quad (25)$$

Дополненная принципиальная схема изменения классического коэффициента трения в зависимости от нагрузки Б.И. Костецкого приведена на рис. 4, б (в сравнении с рис. 1, б). Действительно, по данным Б.И. Костецкого [4]  $\Delta f_D > 0$ , а по данным П.У. Бриджмена [9, 15],

$$F_f = f_{D0} \cdot F_N + F_{fA0} + \frac{\lg e}{4} \sum_{i=1}^n \left[ \Delta f_{Di} \cdot \Delta F_{Nti} \cdot \ln\left(1 + \exp\left(\frac{4}{\Delta F_{Nti} \cdot \lg e} \cdot (F_N - F_{\Omega i})\right)\right) \right], \quad (26)$$

где  $n$  – количество фрикционных переходов. В большинстве случаев  $n = 1$ , но может быть и большее количество фрикционных

$$F_f = (\beta_{d0} + \beta_{a0}) \cdot F_N + F_{fA0} + \frac{(\Delta\beta_d + \Delta\beta_a) \cdot \Delta F_{Nt}}{4 \cdot \ln 10} \cdot \ln\left(1 + \exp\left(\frac{4}{\Delta F_{Nt} \cdot \lg e} \cdot (F_N - F_\Omega)\right)\right). \quad (27)$$

Формулы (16), (25), (26) и (27) выражают обобщённый закон внешнего трения скольжения в границах адгезионно-деформационной теории трения. В настоящее время в науке о трении и изнашивании проблема точной оценки деформационной и адгезионной составляющих

коэффициента трения из (17):

$$\psi_N = -\frac{\ln\left(\frac{\Delta f_D}{\Delta f_{Dp}} - 1\right)}{F_N - F_\Omega}. \quad (21)$$

Для большей точности предположим  $\varepsilon_f = 0,01 \Delta f_D$ , тогда  $\Delta f_{Dp} = 0,99 \Delta f_D$ , а этому значению будет соответствовать нагрузка  $F_{Np}$ , тогда (21) примет вид:

чим, что параметр  $\psi_N$  связан с  $\Delta F_N$  следующим образом:

$$\psi_N \cong \frac{4}{\Delta F_{Nt} \cdot \lg e} = \frac{4 \cdot \ln 10}{\Delta F_{Nt}}. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (16) получим:

А.С. Ахматова [8], И.К. Александрова [7] и других исследований [5, 6]  $\Delta f_D < 0$ . Оба эти варианта учитывает новая формула (19), а также частный случай при  $\Delta f_D = 0$ .

Для случая нескольких фрикционных переходов можно записать [5, 6]:

переходов [5, 6].

С учётом (14) формулу (25) можно записать в виде:

дифференциального коэффициента трения остаётся открытой.

На основании изложенного можно сделать следующие выводы:

1. Проведённый анализ законов трения и отклонений от них позволил выявить функцио-



нальные зависимости, описывающие данные отклонения.

2. С использованием интеграла Ферми-Дирака нулевого порядка реализовано обобщение двучленного закона трения на случаи его отклонений от линейности.

3. Введены новые трибологические характеристики, позволяющие более детально описать явление внешнего трения при изменении состояний фрикционного контакта.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. **Леонардо да Винчи.** Избранные произведения. В 2 т. / Репринт с изд. 1935 г. М.: Ладомир, 1995. Т.1. 415 с.

2. **Amontons Guillaume.** De la resistance causée dans les machines, Memoires de l'Academie Royale, Paris, 1699. P. 206–222.

3. **Coulomb C.A.** Théorie des machines simples, Collection des Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 10 (1785). P. 163–332.

4. **Костецкий Б.И.** Трение, смазка и износ в машинах [Текст]. Киев: Техніка, 1970. 396 с.

5. **Бреки А.Д.** Триботехнические характеристики материалов пар трения и смазочных сред в условиях самопроизвольных изменений состояний фрикционного контакта: диссертация ... доктора технических наук: 05.02.04 / Бреки Александр Джалюльевич; [Место защиты: ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»]. Санкт-Петербург, 2021. 378 с.

6. **Бреки А.Д.** Триботехнические характеристики материалов пар трения и смазочных сред в условиях самопроизвольных изменений состояний фрикционного контакта: автореферат дис. ... доктора технических наук: 05.02.04 / Бреки Александр Джалюльевич; [Место защиты: Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого]. Санкт-Петербург, 2021. 43 с.

7. **Александров И.К.** Характерная методологическая ошибка при анализе фрикционных сил в паре трения // Механика машин, механизмов и материалов. 2011. № 3 (16). С. 59–63.

8. **Ахматов А.С.** Молекулярная физика граничного трения. М.: «Физматгиз», 1963. 472 с.

9. **Бриджмен П.У.** Новейшие работы в области высоких давлений [Текст] / пер. с англ. А. И. Лихтера; под ред. и с доп. Л. Ф. Верещагина. Москва: изд-во и тип. Гос. изд-ва иностр. лит., 1948. 300 с.

10. **Бреки А.Д., Чулкин С.Г., Стукач А.В.** Математические модели трения скольжения антифрикционных покрытий из полиамида П-54 по стали 45 // Сталь. 2020. № 8. С. 34–38.

11. **Крагельский И.В., Щедров В.С.** Развитие науки о трении. Сухое трение. Издательство Академии Наук СССР Москва, 1956. 236 с.

12. **Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбаров В.С.** Основы расчетов на трение и износ [Текст]. Москва: Машиностроение, 1977. 526 с.

13. **Кузнецов В.Д.** Физика резания и трения металлов и кристаллов [Текст]: Избр. Труды // В.Д. Кузнецов;

[АН СССР, Сиб. отд-ние, Объедин. учен. совет по физ.-мат. и техн. наукам, Сиб. физ.-техн. ин-т им. В.Д. Кузнецова, Гос. науч.-исслед. ин-т машиноведения им. акад. А.А. Благоднарова]. Москва: Наука, 1977. 310 с.

14. **Теория смазочного действия и новые материалы** [Текст]: [Сборник статей] // Акад. наук СССР. Науч. совет по трению и смазкам. Москва: Наука, 1965. 246 с.

15. **Bridgman P.W.** Flow Phenomena in Heavily Stressed Metals / J. Appl. Phys., v. 8. no. 5. 1937. P. 328–336.

16. **Королева О.Н., Мажукин А.В., Мажукин В.И., Бреславский П.В.** Аналитическая аппроксимация интегралов Ферми–Дирака полужелтых и целых порядков // Матем. моделирование. 2016. С. 55–63.

17. **Калиткин Н.Н., Ритус И.В.** Гладкая аппроксимация функций Ферми–Дирака // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1986. Т 26. № 3, С. 461–465.

18. **ГОСТ Р 55266-2012:** Совместимость технических средств электромагнитная. Оборудование сетей связи. Требования и методы испытаний. М.: Стандартинформ, 2013. 36 с.

19. **Основы автоматического регулирования и управления:** учебн. пособие для неэлектротехн. специальностей вузов / под ред. В.М. Пономарева и А.П. Литвинова М.: Высшая школа, 1974. 439 с.

## REFERENCES

1. Leonardo da Vinci. Selected works. In 2 vols. Vol.1./ Reprint from the 1935 edition - Moscow: Lodomir, 1995. - 415 p.

2. Amontons Guillaume. De la resistance causée dans les machines, Memoires de l'Academie Royale, Paris 1699. pp. 206-222.

3. Coulomb C.A. Théorie des machines simples, Collection des Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, 10 (1785) 163-332.

4. Kostetsky B.I. Friction, lubrication and wear in machines [Text] / B. I. Kostetsky. - Kiev: Technika, 1970. - 396 p.

5. Breki A.D. Tribotechnical characteristics of materials of friction pairs and lubricants in conditions of spontaneous changes in the states of friction contact: dissertation... Doctor of Technical Sciences: 05.02.04 / Alexander Dzhalyulevich Breki; [Place of defense: Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University]. - St. Petersburg, 2021. - 378 p.

6. Breki A.D. Tribotechnical characteristics of materials of friction pairs and lubricants in conditions of spontaneous changes in the states of friction contact: abstract of the dissertation. Doctor of Technical Sciences: 05.02.04 / Alexander Dzhalyulevich Breki; [Place of defense: Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University]. - St. Petersburg, 2021. - 43 p.

7. Alexandrov I.K. A characteristic methodological error in the analysis of frictional forces in a friction pair // Mechanics of machines, mechanisms and materials. 2011. No. 3 (16). pp. 59-63.

8. Akhmatov A.S. Molecular physics of boundary friction. M.: «Fizmatgiz», 1963. - 472 p.

9. Bridgman P.U. The latest works in the field of high pressures [Text] / P.V. Bridgman; Translated from the English by A.I. Lichter; Ed. and with the addition of L.F. Vere-

shchagin. - Moscow: publishing house and type. State Publishing house of foreign lit., 1948. - 300 p.

10. Breki A.D. Mathematical models of sliding friction of antifriction coatings made of polyamide P-54 on steel 45 / Breki A.D., Chulkin S.G., Stukach A.V. and [others] // Steel. 2020. No. 8. pp. 34-38.

11. Kragelsky I.V. Development of the science of friction. Dry friction / I.V. Kragelsky, V.S. Shchedrov. - Publishing House of the USSR Academy of Sciences Moscow, 1956, -236 p.

12. Kragelsky I.V. Fundamentals of calculations for friction and wear [Text] / I.V. Kragelsky, M.N. Dobychin, V.S. Kombalov. - Moscow: Mashinostroenie, 1977. - 526 p.

13. Kuznetsov V.D. Physics of cutting and friction of metals and crystals [Text]: Selected works / V.D. Kuznetsov; [USSR Academy of Sciences, Siberian Branch, United. learned. advice on phys.-mat. and technical sciences, Sib. phys.-tech. V.D. Kuznetsov Institute, State Scientific Research Institute. in-t of machine science named after. akad. A.A. Blagonravova]. - Moscow: Nauka, 1977. - 310 p.

14. Theory of lubricating action and new materials [Text]: [Collection of articles] / Academy of Sciences

of the USSR. Sci. advice on friction and lubricants. - Moscow: Nauka, 1965. - 246 p.

15. Bridgman, P.W., Flow Phenomena in Heavily Stressed Metals, J. Appl. Phys., v.8, no. 5, 1937, pp. 328-336.

16. Koroleva O.N., Mazhukin A.V., Mazhukin V.I., Breslavsky P.V. Analytical approximation of Fermi-Dirac integrals of half-integers and integer orders. modeling, 28:11 (2016), pp. 55-63.

17. Kalitkin N.N., Ritus I.V. Smooth approximation of Fermi-Dirac functions // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1986, volume 26, number 3, pp. 461-465.

18. GOST R 55266-2012: Electromagnetic compatibility of technical means. Communication network equipment. Requirements and test methods. M.: Standartinform, 2013. - 36 p.

19. Fundamentals of automatic regulation and control / Ed. Ponomareva V. M. and Litvinova A. P. Educational manual for non-electrical engineering. Specialties of universities. - M.: Higher School, 1974. - 439 p.

Статья поступила в редакцию 01.12.2022; одобрена после рецензирования 14.12.2022; принята к публикации 23.12.2022.

The article was submitted 01.12.2022; approved after reviewing 14.12.2022; assepted for publication 23.12.2023.

