

НАУЧНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИИ

УДК 514.74:514.8:539.3:72.01:624.074.4:539.41
DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-2-11-19

С.В. Страшнов

Канд. техн. наук, заведующий кафедрой
общеобразовательных дисциплин,
Российский университет дружбы народов,
Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6,
e-mail: shtrafnoy@gmail.com

Велароидальные оболочки и оболочки велароидального типа

Аннотация. Группа велароидальных поверхностей и поверхностей велароидального типа входит в класс «Поверхности переноса». В отличие от поверхностей прямого переноса, велароидальные поверхности образуются кривыми переменной кривизны, так, чтобы образуемая поверхность опиралась на прямые линии плоского прямоугольного контура. В научно-технической литературе описаны и изучены только около десятка велароидальных поверхностей. Поверхности велароидального типа образуются тоже кривыми переменной кривизны, но опираются на плоский овальный или кольцевой контур. В качестве плоского контура может быть принят суперэллипс. Контур может состоять из фрагментов двух одинаковых кривых, расположенных симметрично относительно оси симметрии. В России поверхности велароидального типа изучаются пока только в Российском университете дружбы народов (Москва). Они пользуются популярностью как у геометров-исследователей, так и у студентов – архитекторов и строителей, которые считают, что эти формы могут быть использованы в рамках параметрической, нелинейной, эволюционной и генеративной архитектуры. В статье приводятся сведения со ссылкой на обширный использованный библиографический материал о геометрии известных велароидальных поверхностей и поверхностей велароидального типа, дается информация о построении и визуализации новых поверхностей велароидального типа с овальным плоским контуром в виде суперэллипса, а также с образующим и направляющим суперэллипсами. Даны сведения по определению напряженно-деформируемого состояния тонких оболочек со срединными поверхностями в форме рассматриваемых поверхностей. Указываются области практического применения велароидальных оболочек и оболочек велароидального типа. Как показали используемые источники, геометры и инженеры-расчетчики решили практически все вопросы, связанные с проектированием этих оболочек. Архитекторы используют велароидальные оболочки редко, в основном для перекрытия промышленных зданий. Оболочки велароидального типа нашли применение только в эскизных проектах и в дипломных работах студентов-архитекторов.

Ключевые слова: поверхности переноса, велароидальная поверхность, поверхность велароидального типа, тонкая оболочка, впапушенная плита, устойчивость оболочки, производственные здания, суперэллипс.

S.V. Strashnov

Ph.D. of Engineering, Head of the General Education Courses Department,
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University),
6, Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russia,
e-mail: shtrafnoy@gmail.com

Velaroidal Shells and Shells of the Velaroidal Type

Abstract. A group of velaroidal surfaces and surfaces of the velaroidal type belong to the class of "Translation Surfaces". In contrast to the direct translation surfaces, velaroidal surfaces are formed by curves of variable curvature so that the formed surface rests on straight lines of a flat rectangular contour. Only about a dozen velaroidal surfaces have been described and studied in the scientific and technical literature. Velaroidal surfaces are also formed by curves of variable curvature but supported by a flat oval or circular contour. A super ellipse can be taken as a flat contour. The contour may consist of fragments of two identical curves located symmetrically about the axis of symmetry. In Russia velaroidal surfaces are studied so far only in the Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow. They are popular with both research geometers and students - architects and builders, who believe that these shapes can be used within parametric, non-linear, evolutionary and generative architecture. The article provides information with reference to the extensive used bibliographic material on the geometry of known velaroidal surfaces and surfaces of the velaroidal type. Information on the construction and visualization of new velaroidal surfaces with an oval flat contour as a super ellipse, as well as with a frame and a guide super ellipse. The data on determination of the stress-strain state of thin shells with median surfaces in the form of the surfaces under consideration is given. The fields of practical application of velaroidal shells and velaroidal shells are indicated. As shown in the sources used, geometers and calculation engineers have solved almost all the issues related to the design of these shells. Architects use velaroidal shells rarely, mostly to cover industrial buildings. Enclosures of velaroidal type have been used only in draft designs and in diplom works of architecture students.

Keywords: translation surfaces, velaroidal surface, velaroidal type surface, thin shell, fluffed plate, shell stability, industrial buildings, superellipse.

Введение

Поверхности переноса (translation surfaces) — это поверхности, образованные параллельным переносом кривой одного направления так, что определенная ее точка скользит по другой кривой. Поверхности переноса можно разделить на *поверхности прямого переноса* и *поверхности диагонального переноса*. В некоторых работах, в ущерб определению поверхностей переноса, к этому классу причисляют и ве-

лароидальные поверхности [15]. Таким образом, *велароидальной поверхностью* называется поверхность переноса на плоском прямоугольном плане с образующей кривой переменной кривизны (рис. 1). В некоторых зарубежных статьях велароидальную поверхность называют *фуникулярной поверхностью (funicular surface)* [33]. В технической литературе иногда встречается термин «*вспарушенная оболочка*» [2; 14] или «*вспарушенная плита*» [18] на плоском прямоугольном контуре. По-видимому, так некоторые авторы называют велароидальную оболочку, т.е. оболочку со срединной велароидальной поверхностью.

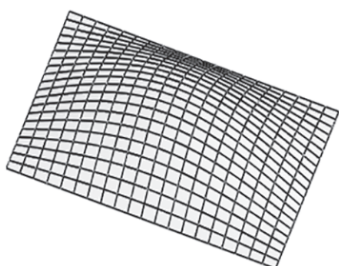


Рис. 1. Велароидальная поверхность [10]

В работе [10] впервые предложено называть поверхность переноса на плоском кольцевом плане с образующей кривой переменной кривизны *поверхностью велароидального типа* (рис. 2). Учитывая, что поверхности велароидального типа строятся на плоском контуре, к этой группе поверхностей можно отнести и *поверхности переноса с конгруэнтными образующими и направляющими кривыми с плоским опорным контуром* (рис. 3) [12], а также *поверхности диагонального переноса на плоском неподвижном контуре* (рис. 4).

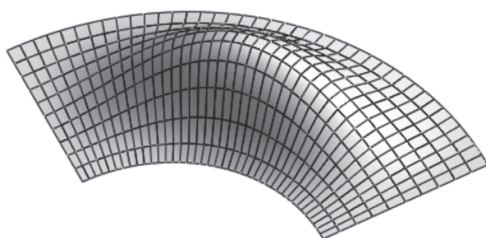


Рис. 2. Поверхность велароидального типа на кольцевом плане [10]

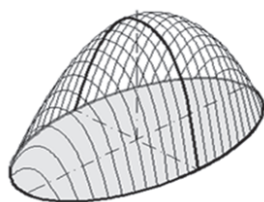


Рис. 3. Поверхность переноса с конгруэнтными образующими и направляющими кривыми с плоским опорным контуром



Рис. 4. Поверхность диагонального переноса на плоском неподвижном контуре

В настоящей статье будут рассматриваться только поверхности на прямоугольном и кольцевом планах.

Геометрические исследования велароидальных поверхностей и поверхностей велароидального типа

В настоящее время широко известны три типа велароидальных поверхностей:

параболический велароид:

$$z = c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2} \right),$$

где a, b — полупролеты поверхности в направлении координатных осей x, y , соответственно, c — стрела подъема поверхности в ее центре;

эллиптический велароид:

$$z = z(x, y) = \sqrt{f^2 - \frac{f^2 - c^2}{a^2} (x^2 + y^2) + \frac{f^2 - c^2}{a^4} x^2 y^2},$$

где a — полупролеты поверхности в направлении координатных осей x, y ; $(f - c)$ — стрела подъема поверхности в ее центре;

синусоидальный велароид:

$$z = f \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

где a, b — размеры плоского прямоугольного контура в плане.

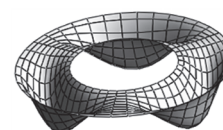
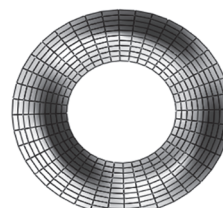


Рис. 5. Синусоидальная поверхность велароидального типа [10]

Менее известна группа из шести недавно введенных в практику велароидальных поверхностей, задаваемая двумя семействами ортогональных образующих кривых [12]:

$$z = h[1 - (x/a)^p]^{1/q}, \quad z = h[1 - (y/b)^s]^{1/t},$$

где $p = q = s = t = 1$; $p = s = 4, q = t = 2$; $p = s = 10, q = t = 2$; $p = 1$;

$q = 2, s = 1, t = 1$; $p = s = 1, q = t = 2$; $p = 1, q = 2, s = 1, t = 2$.

Еще одна велароидальная поверхность переноса на плоском прямоугольном плане с образующей кривой переменной кривизны в форме цепной линии рассматривается в статье [35].

Параметрические уравнения синусоидальной поверхности велароидального типа приведены в работе [30]:

$$x = x(r, \alpha) = r \cos \alpha, \quad y = y(r, \alpha) = r \sin \alpha,$$

$$z = z(r, \alpha) = \frac{B}{2}(1 - \cos n\alpha) \left(1 - \cos \frac{2\pi(r-c)}{R-r_0} \right), \quad (1)$$

где $r_0 \leq r \leq R, 0 \leq \alpha \leq 2\pi, a = (R - r_0)/4, r = const$ — криволинейные координатные линии на поверхности, которые проектируются на горизонтальную плоскость в концентрические окружности. Согласно приведенным уравнениям (1) имеем, что контурные линии с $z = 0$ будут при $\cos n\alpha = 1$, т.е. при $n\alpha = 2m\pi$, или $\alpha_k = 2m\pi/n, 0 \leq \alpha \leq \alpha_k$ — одна ячейка поверхности. На рис. 5 показана рассматриваемая поверхность с $n = 3, R = 4 \text{ м}, r_0 = 2 \text{ м}; B = 1 \text{ м}, c = 0$.

Таким образом, методика образования и аналитического задания велароидальной поверхности на прямоугольном плоском контуре хорошо разработана и проиллюстрирована на конкретных примерах. Поверхность велароидального типа на кольцевом плоском контуре пока проиллюстрирована только на примере синусоидальной поверхности велароидального типа (1), но в различной модификации, т.е. с $r = 0$ и r равна произвольному значению, а также n равно произвольному числу (рис. 5).

Поверхности велароидального типа с тремя заданными суперэллипсами в трех координатных плоскостях

При внимательном рассмотрении форм некоторых корпусов речных или морских судов можно предположить, что они также представляют собой поверхности велароидального типа с плоским контуром

(ватерлиния — кривая 1) и двумя другими плоскими кривыми (мидельшпангоут — кривая 2, килевая линия — кривая 3) в координатных плоскостях yOz и xOz соответственно (рис. 6). В работах [29; 31] предлагается задавать плоские кривые главного каркаса поверхности корпуса судна в виде:

кривая 1 в координатной плоскости $z = 0$:

$$|y|^r = W^r \left(1 - \frac{|x|^t}{L^t} \right),$$

кривая 2 в координатной плоскости $x = 0$:

$$|z|^n = T^n \left(1 - \frac{|y|^m}{W^m} \right),$$

кривая 3 в координатной плоскости $y = 0$:

$$|z|^s = T^s \left(1 - \frac{|x|^k}{L^k} \right),$$

где для выпуклых кривых $r, t, n, m, s, k > 1$; для вогнутых кривых $r, t, n, m, s, k < 1$. Плоские кривые (2)–(4) при $r = t, n = m, s = k$ называют суперэллипсами [36], которые при определенных условиях вырождаются в кривые Ламе [29].

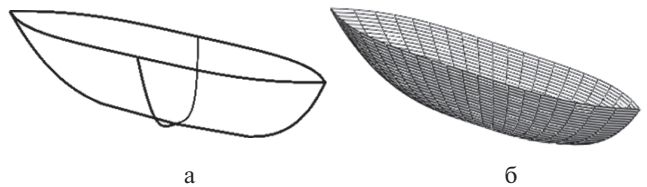


Рис. 6. Главный каркас судовой поверхности (а) и поверхность велароидального типа с заданным главным каркасом (б)

Используя методику, изложенную в работах [29; 31], и задавая заранее константами W, T, L, r, t, n, m, s и k , можно получить явные уравнения алгебраических поверхностей велароидального типа с главным каркасом (2)–(4). Несомненно, эти поверхности могут представить определенный интерес для строительной отрасли. Наличие постоянных геометрических параметров (T — стрела подъема оболочки, $2L$ — длина срединной поверхности оболочки, $2W$ — её ширина) и постоянных показателей степеней k, s, n, m, r, t в формулах (2)–(4) дает возможность получать большое количество форм поверхностей на плоском контуре (2). Образующий суперэллипс (3) при своем движении по направляющему суперэллипсу (4) будет непрерывно менять кривизну в каждой точке образующей кривой. Чем больше будут значения показателей степеней $r = t$, тем ближе будет опорная кривая (2) к прямоугольнику $2W \times 2L$.

Применение велароидальных оболочек и оболочек велароидального типа в проектах и реальных сооружениях

Велароидальные поверхности в России, в отличие от стран Западной Европы и Америки [21; 26; 32], не пользовались большой популярностью до 1955 г., за исключением параболического велароида, форма которого передана перекрытию «Дарбази» [3; 18]. Это название произошло от названия древнегрузинского перекрытия. За рубежом железобетонные велароидальные оболочки были особенно популярны в 1950–1970 гг. [22].



Рис. 7. Оболочки Г. Ислера в форме «мыльного пузыря»



Рис. 8. Пологое железобетонное покрытие Некрасовского (Мальцевского) рынка, СПб.

Оболочки Г. Ислера (*Heinz Isler*), называемые *bubble shells*, по-видимому, являются велароидальными оболочками с образующими цепными линиями (рис. 7). По всему миру их построено большое число. Последняя оболочка была возведена в 2009 г. Эти оболочки используются для перекрытия коммерческих и промышленных зданий [19].

Из реально возведенных сооружений в форме велароида можно указать на пологое железобетонное перекрытие Некрасовского (Мальцевского) рынка на плоском квадратном плане 54 × 54 м в Санкт-Петербурге, рынок открыт осенью 1960 г. (рис. 8). Это был первый опыт возведения велароидальных оболочек в России. В статье [23] упоминается покрытие культурного центра в Мускате, Оман. Оно названо самой интересной велароидальной оболоч-

кой последнего времени. Запроектирована оболочка фирмой *Architecture-Studio Architects*, Париж.

В работе [9] предлагается применение велароидальной оболочки для перекрытия танцевального зала прямоугольной формы. Срединная поверхность оболочки переноса запроектирована с образующей синусоидальной кривой в форме одной волны. Оболочка плавно переходит в плоское перекрытие над другими помещениями. Несколько примеров, предлагаемых к внедрению велароидальных оболочек, рассматриваются в статье [7]. С начала XXI в. в связи с развитием численных методов расчета оболочек интерес к проектированию велароидальных оболочек стал увеличиваться [9].

Описания построенных сооружений в форме поверхностей велароидального типа на кольцевом плане в научно-технической литературе не обнаружено. Однако эти поверхности привлекают внимание молодых архитекторов (рис. 9 и 10) [13], поэтому в недалеком будущем возможно появление оболочек велароидального типа в нашей стране.

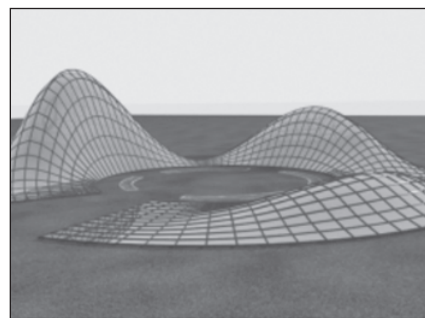


Рис. 9. Спортивное сооружение в форме поверхности велароидального типа на кольцевом плане. Из магистерской диссертации В.И. Непорады [17], РУДН

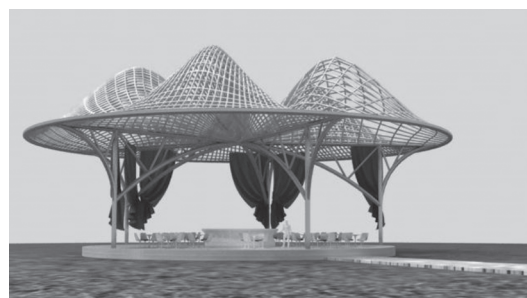


Рис. 10. Легкий навес в форме поверхности велароидального типа на кольцевом плане с внутренним радиусом, равным нулю. Из работы студентки бакалавриата Алборовоой Л.А., РУДН

Тонкостенные металлические оболочки велароидального типа нашли применение в судостроении в качестве носовой и кормовой частей теоретической обшивки корпусов судов [31]. Определив наиболее оптимальную форму поверхности велароидального типа корпуса судна, меняя постоянные параметры

кривых (2)–(4) каркаса, приступают к её аппроксимации кусками торсовой (развертывающейся) поверхности.

Расчет на прочность и устойчивость велароидальных оболочек и оболочек велароидального типа

Для расчета эллиптического велароида на квадратном плане в статье [30] применялась упрощенная безмоментная теория расчета оболочек. Оболочку предполагалось использовать как покрытие промышленного здания. Параболический велароид на прямоугольном плане, подверженный действию нормального давления, изучался в статье [27] в линейной постановке. Применялись дифференциальные уравнения В.З. Власова в перемещениях для пологих оболочек. Для расчета была составлена компьютерная программа. Полученные результаты сравнивались с экспериментальными данными и численными результатами других авторов. Результаты дали хорошее совпадение.

Задача всё более точного определения напряженно-деформированного состояния велароидальных оболочек ставилась перед проектировщиками в связи с увеличением интереса к этим оболочкам. Например, для расчета параболической велароидальной оболочки в статье [20] использованы дифференциальные уравнения Власова — Маркверра (*Vlasov — Marquerre differential equations*). Функции напряжений задавались в полиномах и использовалась методика вариационного исчисления. Для проверки полученных теоретических результатов проводились эксперименты на модели цементной оболочки.

Вариационно-разностный метод использован в статье [28] для расчета пологого и неполого параболических велароидов, опертых по четырем углам. Оболочки имеют плоский контур 20×20 м, толщину 8 см.

Расчет на прочность и устойчивость оболочечных структур значительно упростился с появлением типовых компьютерных программ. Сейчас проектировщики имеют большой выбор этих программ, поэтому расчет на прочность и устойчивость велароидальных оболочек и оболочек велароидального типа не должен вызывать особых трудностей.

Впервые методика определения напряженно-деформированного состояния тонкой синусоидальной оболочки велароидального типа (см. рис. 2) с помощью программы «Лири-9» предложена в работе [30].

В статье [35] сделана попытка выяснить какая из четырех рассмотренных в статье велароидальных оболочек на квадратном плане с разными образующими кривыми наиболее выгодна при действии ста-

тической нагрузки типа собственного веса. Оказалось, что оболочки с цепными образующими кривыми — наиболее рациональны.

Имеются исследования по устойчивости синусоидальных оболочек на кольцевом плане велароидального типа (см. рис. 2). Первой работой, посвященной этой теме, стала статья С.Л. Шамбиной [34], которая изучала потерю устойчивости оболочки, находящейся под действием нагрузки типа собственного веса. Затем исследование проблем потери устойчивости в нелинейной постановке для этого типа оболочек были продолжены в работе [24]. В статье [25] рассмотрена синусоидальная оболочка велароидального типа с особой точкой в центре (рис. 11).

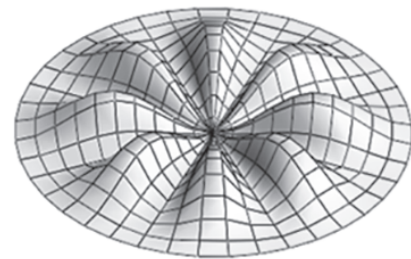


Рис. 11. Синусоидальная оболочка велароидального типа на кольцевом плане с внутренним радиусом, равным нулю [10]

Задача определения параметров напряженно-деформированного состояния рассматриваемых оболочек усложняется, так как все известные срединные поверхности этих оболочек задаются в неортогональной несопряженной системе криволинейных координат [4], поэтому применение аналитических методов расчета велароидальных оболочек и оболочек велароидального типа невозможно за исключением расчета оболочек по приближенной безмоментной теории [30] и расчета некоторых пологих велароидальных оболочек на прямоугольном плане [27].

Заключение

Согласно приведенному списку использованной литературы можно сделать вывод, что велароидальные оболочки и оболочки велароидального типа пользуются популярностью у геометров и исследователей-расчетчиков, в меньшей степени — у архитекторов. Несмотря на то что эти оболочки строить сложнее, чем оболочки прямого переноса, которых в мире возведено намного более сотни, есть надежда, что архитекторы обратят на них более пристальное внимание. Например, возможно использование пневматической воздухоопорной оболочки в форме велароидальной поверхности. В этом случае легко решается узел крепления нижнего плоского силового пояса мягкой оболочки к плоскому основанию [8]. Архитектор Л.А. Алборова в своей статье [1] полагает, что центр по изучению велароидальных оболочек

и оболочек велароидального типа переместился в Инженерную академию РУДН.

Как показал опыт работы со студентами-строителями и архитекторами [11], рассматриваемые обо-

лочки легко поддаются геометрическому моделированию (см. рис. 7 и 8) [5] и могут быть приняты к рассмотрению в некоторых учебных дисциплинах по геометрии и графике [6; 16].

Литература

1. *Алборова Л.А.* Возможности велароидальных оболочек [Текст] / Л.А. Алборова // Инженерные системы: Труды научно-практической конференции с международным участием, посвященной 60-летию Российского университета дружбы народов: в 2 т. / под ред. М.Ю. Мальковой. — М.: РУДН, 2020. — С. 59–65.
2. *Берестова С.А.* Геометрия самонесущих покрытий на прямоугольном плане [Текст] / С.А. Берестова, Н.Е. Мисюра, Е.А. Митюшов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. — 2017. — № 4. — С. 15–18. — DOI: 10.22363/1815-5235-2017-4-15-18.
3. *Гогоберидзе Я.А.* Перекрытия «Дарбази» [Текст] / Я.А. Гогоберидзе. — Тбилиси: Техника да шрома, 1950. — 278 с.
4. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек [Текст] / А.Л. Гольденвейзер — М.: Изд-во ГТТИ, 1953. — 544 с.
5. *Игнатъев С.А.* Функциональные возможности среды Wolfram Mathematica для визуализации кривых линий и поверхностей [Текст] / С.А. Игнатъев, А.И. Фоломкин, Э.Х. Муратбакаев // Геометрия и графика. — 2021. — Т. 9. — № 1. — С. 29–38. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-1-28-37.
6. *Игнатъев С.А.* Электронная обучающая среда Moodle как эффективное средство организации обучения начертательной геометрии в условиях пандемии Covid-19 [Текст] / С.А. Игнатъев, А.И. Фоломкин, З.О. Третьякова, К.О. Глазунов // Геометрия и графика. — 2020. — Т. 8. — № 3. — С. 52–66. — DOI: 10.12737/2308-4898-2020-52-66.
7. *Костюкова К.А.* Перспективы архитектурного проектирования на основе велароидальных поверхностей разного типа [Текст] / К.А. Костюкова, Г.А. Харисова, А.С. Матлахова, А.Р. Махиянова, С.Л. Шамбина // Экономика и предпринимательство. — 2017. — № 6. — С. 657–660.
8. *Кривошапко С.Н.* Пневматические конструкции и сооружения [Текст] / С.Н. Кривошапко // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. — 2015. — № 3. — С. 45–53.
9. *Кривошапко С.Н.* Объемно-планировочные решения спортивно-развлекательного комплекса [Текст] / С.Н. Кривошапко, Е.М. Емельянова, И.А. Мамиева // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. — 2011. — № 4. — С. 46–49.
10. *Кривошапко С.Н.* Исследование поверхностей велароидального типа с двумя семействами синусоид на кольцевом плане [Текст] / С.Н. Кривошапко, С.Л. Шамбина // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. — 2009. — № 4. — С. 9–12.
11. *Мамиева И.А.* О подготовке специалистов по архитектуре, геометрии и расчету большепролетных пространственных структур и оболочек [Текст] / И.А. Мамиева // Строительство и реконструкция. — 2016. — № 5. — С. 114–118.
12. *Михайленко В.Е.* Поверхности переноса, образующие и направляющие которых являются конгруэнтными кривыми [Текст] / В.Е. Михайленко, В.Т. Шеин // Прикладная геометрия и инж. графика. — Киев, 1972. — Вып. 14. — С. 15–20.
13. *Непорада В.И.* Велароидальные оболочки в контексте нелинейной архитектуры [Текст] / В.И. Непорада // Математические методы в архитектуре и дизайне: материалы межвузовской научной конференции / отв. ред. В.Г. Мосин. — Самара: СГАСУ, 2013. — С. 23–31.
14. *Семенов В.С.* Современные пространственные конструкции: синтез искусства, техники и науки [Текст]: учеб. пособие / В.С. Семенов — Бишкек: Изд-во КPCY, 2010. — 130 с.
15. *Страшнов С.В.* К вопросу о классификации аналитических поверхностей [Текст] / С.В. Страшнов, М.И. Рынкoвская // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 1. — С. 36–43. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-1-36-43.
16. *Усатая Т.В.* Современные подходы к проектированию изделий в процессе обучения студентов компьютерной графике [Текст] / Т.В. Усатая, Л.В. Дерябина, Е.С. Решетникова // Геометрия и графика. — 2019. — Т. 7. — № 1. — С. 74–82. — DOI: 10.12737/article_5c91fd2bde0ff7.07282102.
17. *Шамбина С.Л.* Велароидальные поверхности и их применение в строительстве и архитектуре [Текст] / С.Л. Шамбина, В.И. Непорада // Праці ТДАТУ. — 2012. — Вып. 4. — Т. 53. — С. 168–173.
18. *Штаерман Ю.Я.* Изгиб вспарушенной плиты [Текст] / Ю.Я. Штаерман, Б.Н. Бастатский. — М.—Л.: Госэнергоиздат, 1960. — 37 с.
19. *Chilton J., Chuang C.C.* Rooted in Nature: Aesthetics, Geometry and Structure in the Shells of Heinz Isler // Nexus Network Journal 19, 763–785 (2017). URL: <https://doi.org/10.1007/s00004-017-0357-5>
20. *Chronowicz A., Dennison A.C.* Parabolic velaroidal shells // Magazine of Concrete Research. 1968, V. 20, I. 63, pp. 103–110. URL: <https://doi.org/10.1680/marc.1968.20.63.103>
21. *Friaa A., Zenzri H.* On funicular shapes in structural analysis and applications // Eur. J. Mech. A. 1996, 15, I. 5, pp. 901–914.

22. Gabriele S., Marmo F., Varano V. About the funicularity of velaroidal shells // Proceedings of IASS Annual Symposium, IASS 2019. Barcelona Symposium: Shell Structures, pp. 1–8.
23. Gbaguidi Aïssè G.L. Influence of the geometrical researches of surfaces of revolution and translation surfaces on design of unique structures // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2019, 15 (4), pp. 308–314. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-4-308-314.
24. Gil-oulbe M., Markovich A., Tyekolo. Sinusoidal velaroidal shell — numerical modelling of the nonlinear buckling resistance // Journal of Fundamental and Applied Sciences. Physics. November 24, 2017, pp. 1483–1492. DOI: <http://dx.doi.org/10.4314/jfas.v9i7s.132>.
25. Gil-oulbe M., Shambina S.L., Dau T. The theoretical approach for the geometrically nonlinear buckling analysis of sinusoidal velaroidal shells // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2017, I. 3, pp. 35–40.
26. Hadid H.A. Analysis of parabolic velaroidal shells with simply supported boundary conditions // J. Struct. Eng. 1982, 8, I. 4, pp. 111–118.
27. Hadid H.A., Lynn P.P. Bending analysis of parabolic velaroidal shells // Journal of the Structural Division. 1980, V. 106, I. 7, pp. 1609–1621. URL: <https://doi.org/10.1061/JSDEAG.0005478>
28. Martínez Jiménez J.M., Martínez Valle J.M., Martínez Valle A., Martínez-Jiménez P. General equations for a linear calculation of thin or moderately thick shallow shells // Blucher Mechanical Engineering Proceedings. May 2014, V. 1, 12 p. num. 1. URL: www.proceedings.blucher.com.br/evento/10wccm
29. Karnevich V.V. Hydrodynamic surfaces with midship section in the form of the Lamé curves. RUDN Journal of Engineering Researches. 2021, 22 (4), pp. 323–328. DOI: 10.22363/2312-8143-2021-22-4-323-328.
30. Krivoshapko S.N., Gil-Oulbe M. Geometry and strength of a shell of velaroidal type on annulus plan with two families of sinusoids // International Journal of Soft Computing and Engineering (IJSCE). 2013, V. 3, I. 3, pp. 71–73.
31. Krivoshapko S.N. Tangential developable and hydrodynamic surfaces for early stage of ship shape design // Ships and Offshore Structures. 2022. Published online: 26 Apr. 2022, pp. 1–9. URL: <https://doi.org/10.1080/17445302.2022.2062165>
32. Mihailescu M., Horvath I. Velaroidal shells for covering universal industrial halls // Acta techn. Acad. sci. hung. 1977, 85 (1–2), pp. 135–145.
33. Ramaswamy G.S. Innovative applications to funicular shells // Shells, Membranes and Space Frames. Proc. IASS Symp. Membrane Struct. and Space Frames, Osaka, 15–19 Sept., 1986, Vol. 1. Amsterdam e.a., 1986, pp. 313–320.
34. Shambina S.L. Theoretical approach for the geometrically nonlinear buckling analysis of sinusoidal velaroidal shells // Journal of Fundamental and Applied Sciences. Physics. September 27, 2017. Corpus ID: 125827184.
35. Tupikova E., Berdiev M. The comparison of velaroidal shell structures of square plane loadbearing properties // 2020 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 883 012218 IOP Conference Series: Materials Science and Engineering paper. 2020, 10 p. DOI: 10.1088/1757-899X/883/1/012218.
36. Weisstein E.W. "Superellipse." From MathWorld — A Wolfram Web Resource. URL: <https://mathworld.wolfram.com/Superellipse.html> (accessed 12 August 2022).

References

- Alborova L.A. *Vozmojnosti velaroidal'nuh obolochek [Opportunities of velaroidal shells]. Injenernue sistemy-2020: Trudy nauchno-prakticheskoy konferencii s mezhdunarodnym uchastiem, posvyaschennoy 60-letiyu Rossiyskogo universiteta druzhby narodov* [Engineering Systems — 2020: Proceedings of the Scientific and Practical Conference with International Participation Dedicated to the 60th Anniversary of the RUDN University]. 2020, V. 1, pp. 59–65. (in Russian)
- Berestova S.A., Misyura N.E., Mityushov E.A. Geometriya samonesushchih pokrytij na pryamougol'nom plane [Geometry of self-bearing covering on rectangular plan]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstrukcij i sooruzhenij* [Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings]. 2017, I. 4, pp. 15–18. DOI: 10.22363/1815-5235-2017-4-15-18 (in Russian)
- Gogoberidze Ya.A. *Perekrytiya «Darbazi»* [Covering «Darbazi»]. Tbilisi: Tehnika da Shroma Publ., 1950, 278 p. (in Russian)
- Goldenweizer A.L. *Teoriya uprugih tonkih obolochek* [Theory of Thin Elastic Shells]. Moscow: GTTI Publ., 1953, 544 p. (in Russian)
- Ignat'ev S.A., Folomkin A.I., Muratbakeev E.H. Funkcional'nye vozmojnosti sredy Wolfram Mathematica dlya vizualizacii krivuh linij i poverhnostey [Wolfram Mathematica Functional Possibilities for Curved Lines and Surfaces Visualization]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2021, V. 9, I. 1, pp. 29–38. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-1-29-38 (in Russian)
- Ignat'ev S.A., Folomkin A.I., Muratbakeev E.H. Elektron-naya obuchashchaya sreda Moodle kak effektrivnoe sredstvo obucheniya nachertatel'noy geometrii v usloviyah pandemii Covid-19 [Moodle E-Learning Environment as an Effective Tool for Descriptive Geometry Teaching Organization in the COVID-19 Pandemic Conditions]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2020, V. 8, I. 3, pp. 52–66. DOI: 10.12737/2308-4898-2020-67-86 (in Russian)
- Kostyukova K.A., Kharisova G.A., Matlahova A.S., Mahyanova A.R., Shambina S.L. Perspektivy arkhitekturnogo proektirovaniya na osnove velaroidal'nyh poverkhnostey raznogo tipa [Prospects of Architectural Design Based on Melanoidin Of Many Types of Surfaces]. *Ekonomika i ored-prinimatel'stvo* [Journal of Economy and entrepreneurship]. 2017, I. 6, pp. 657–660. (in Russian)
- Krivoshapko S.N. Pnevmaticheskie konstrukcii i sooruzheniya [Pneumatic Structures and Buildings]. *Stroitel'naya mekhan-*

- ika inzhenernykh konstrukcij i sooruzhenij* [Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings]. 2015, I. 3, pp. 45–53. (in Russian)
9. Krivoschapko S.N., Emelianova E.M., Mamiyeva I.A. Ob'emno-planirovochnue resheniya sportivno-razvlekatel'nogo kompleksa [Design of Sports-And-Relaxation Building]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstrukcij i sooruzhenij* [Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings]. 2011, I. 4, pp. 46–49. (in Russian)
 10. Krivoschapko S.N., Shambina S.L. Issledovanie poverhnostey velaroidal'nogo tipa s dvumya semeystvami sinusoid na kol'cevom plane [Investigation of Surfaces of Velaroidal Type with Two Families of Sinusoids on Annular Plan]. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstrukcij i sooruzhenij* [Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings]. 2009, I. 4, pp. 9–12. (in Russian)
 11. Mamiyeva I.A. O podgotovke specialistov po arkhitekture, geometrii, i raschety bol'sheproletnykh prostranstvennykh struktur i obolochek [On Teaching of Specialists in Architecture, Geometry, and Strength Analysis of Large-Span Space Structures and Shells]. *Stroitel'stvo i rekonstrukciya* [Building and Reconstruction]. 2016, I. 5, pp. 114–118. (in Russian)
 12. Mikhaylenko V.E., Shein V.T. Poverhnosti perenosa, obrazuyuschie i napravlyayuschie kotoryh yavlyayutsya kongruentnymi krivymi [Transfer surfaces whose generators and guides are congruent curves]. *Prikladnaya geometriya i inzhenernaya grafika* [Applied Geometry and Engineering Graphics]. 1972, I. 14, pp. 15–20. (in Russian)
 13. Neporada V.I. Velaroidal'nye obolochki v kontekste nelineynoy arkhitektury [Velaroidal Shells in the Context of Non-linear Architecture]. *Matematicheskie metody v arkhitekture I dezayne: Materialy mejvuzovskoy nauchnoy konferencii (15 May 2012)* [Mathematical methods in architecture and design: Proceedings of the interuniversity scientific conference], 2013, pp. 23–31. (in Russian)
 14. Semenov V.S. *Sovremennye prostranstvennyye konstrukcii: sintez iskusstva, tekhniki i nauki* [Modern Spatial Constructions: Synthesis of Art, Technology and Science]. Bishkek: KRSU Publ., 2010, 130 p. (in Russian)
 15. Strashnov S.V., Rynkovskaya M.I. Funkcional'nye vozmozhnosti sredu Wolfram Mathematica dlya vizualizacii krivuh liniy i poverhnostey [To the Question of the Classification for Analytical Surfaces]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics], 2022, V. 10, I. 1, pp. 36–43. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-1-36-43. (in Russian)
 16. Usataya T.V., Deryabina L.V., Reshetnikova E.S. Sovremennye podkhody k proektirovaniyu izdeliy v processe obucheniya studentov komp'uternoy grafike [Modern Approaches to Products Design in the Process of Students Teaching in Computer Graphics]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics], 2019, V. 7, I. 1, pp. 74–82. DOI: 10.12737/article_5c91fd2bde0ff7.07282102. (in Russian)
 17. Shambina S.L., Neporada V.I. Velaroidal'nye poverhnosti i ih primenenie v stroitel'stve i arkhitekture [Velaroidal surfaces and their application in building and architecture]. *Trudy Tavricheskogo gosudarstvennogo agrotekhnologicheskogo universiteta* [Proceedings of the Tavri State Agrotechnological University], 2012, 53 (4), pp. 168–173. (in Russian)
 18. Staerman Yu.Ya., Bastatskiy B.N. *Izhib vsparushennoy plity* [Bending of the flattened slab]. Moscow, Leningrad: State Energy Publishing House Publ., 1960, 37 p. (in Russian)
 19. Chilton J., Chuang C.C. Rooted in Nature: Aesthetics, Geometry and Structure in the Shells of Heinz Isler // *Nexus Network Journal* 19, 763–785 (2017). URL: <https://doi.org/10.1007/s00004-017-0357-5>
 20. Chronowicz A., Dennison A.C. Parabolic velaroidal shells // *Magazine of Concrete Research*. 1968, V. 20, I. 63, pp. 103–110. URL: <https://doi.org/10.1680/marc.1968.20.63.103>
 21. Friaa A., Zenzri H. On funicular shapes in structural analysis and applications // *Eur. J. Mech. A*. 1996, 15, I. 5, pp. 901–914.
 22. Gabriele S., Marmo F., Varano V. About the funicularity of velaroidal shells // *Proceedings of IASS Annual Symposia, IASS 2019 Barcelona Symposium: Shell Structures*, pp. 1–8.
 23. Gbaguidi Aïssè G.L. Influence of the geometrical researches of surfaces of revolution and translation surfaces on design of unique structures // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2019, 15 (4), pp. 308–314. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-4-308-314.
 24. Gil-oulbe M., Markovich A., Tyekolo. Sinusoidal velaroidal shell — numerical modelling of the nonlinear buckling resistance // *Journal of Fundamental and Applied Sciences. Physics*. November 24, 2017, pp. 1483–1492. DOI: <http://dx.doi.org/10.4314/jfas.v9i7s.132>.
 25. Gil-oulbe M., Shambina S.L., Dau T. The theoretical approach for the geometrically nonlinear buckling analysis of sinusoidal velaroidal shells // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2017, I. 3, pp. 35–40.
 26. Hadid H.A. Analysis of parabolic velaroidal shells with simply supported boundary conditions // *J. Struct. Eng*. 1982, 8, I. 4 pp. 111–118.
 27. Hadid H.A., Lynn P.P. Bending analysis of parabolic velaroidal shells // *Journal of the Structural Division*. 1980, V. 106, I. 7, pp. 1609–1621. <https://doi.org/10.1061/JS-DEAG.0005478>.
 28. Martínez Jiménez J.M., Martínez Valle J.M., Martínez Valle A., Martínez-Jiménez P. General equations for a linear calculation of thin or moderately thick shallow shells // *Blucher Mechanical Engineering Proceedings*. May 2014, V. 1, 12 p. num. 1. URL: www.proceedings.blucher.com.br/evento/10wccm
 29. Karnevich V.V. Hydrodynamic surfaces with midship section in the form of the Lamé curves // *RUDN Journal of Engineering Researches*. 2021, 22 (4), pp. 323–328. DOI: 10.22363/2312-8143-2021-22-4-323-328.
 30. Krivoschapko S.N., Gil-Oulbe Mathieu. Geometry and strength of a shell of velaroidal type on annulus plan with two families of sinusoids // *International Journal of Soft Computing and Engineering (IJSCE)*. 2013, V. 3, I. 3, pp. 71–73.
 31. Krivoschapko S.N. Tangential developable and hydrodynamic surfaces for early stage of ship shape design // *Ships and Offshore Structures*. 2022. Published online: 26 Apr. 2022,

- pp. 1–9. URL: <https://doi.org/10.1080/17445302.2022.2062165>
32. Mihailescu M., Horvath I. Velaroidal shells for covering universal industrial halls // *Acta techn. Acad. sci. hung.* 1977, 85 (1–2), pp. 135–145.
33. Ramaswamy G.S. Innovative applications to funicular shells // *Shells, Membranes and Space Frames. Proc. IASS Symp. Membrane Struct. and Space Frames, Osaka, 15–19 Sept., 1986, Vol. 1. Amsterdam e.a., 1986*, pp. 313–320.
34. Shambina S.L. Theoretical approach for the geometrically nonlinear buckling analysis of sinusoidal velaroidal shells // *Journal of Fundamental and Applied Sciences. Physics. September 27, 2017. Corpus ID: 125827184.*
35. Tupikova E., Berdiev M. The comparison of velaroidal shell structures of square plane loadbearing properties // 2020 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 883 012218 IOP Conference Series: Materials Science and Engineering paper. 2020, 10 p. DOI:10.1088/1757-899X/883/1/012218.
36. Weisstein E.W. "Superellipse." From MathWorld — A Wolfram Web Resource. URL: <https://mathworld.wolfram.com/Superellipse.html> (accessed 12 August 2022).