

# **Анализ траектории движения точек аналогов треугольника Рело, вращаемых в рамках квадратной и ромбовидной форм**

## **Analysis of point's trajectory of the Reuleaux triangle analog, rotated in the framework of square or diamond shapes**

**Ефремов А.В.**

ассистент кафедры «Инженерная графика» РТУ МИРЭА  
efremov@mirea.ru

**Efremov A.V.**

assistant, Department of Engineering Graphics «MIREA – Russian Technological University»  
efremov@mirea.ru

**Верещагина Т.А.**

старший преподаватель кафедры «Инженерная графика» РТУ МИРЭА  
vereshagina@mirea.ru

**Vereshchagina T.A.**

art. lecturer, Department of Engineering Graphics «MIREA – Russian Technological University»  
vereshagina@mirea.ru

**Игонина А.А.**

студентка РТУ МИРЭА

**Igonina A.A.**

student of «MIREA – Russian Technological University»

**Кадыкова Н.С.**

канд. техн. наук, доцент кафедры «Инженерная графика» РТУ МИРЭА  
kadykova@mirea.ru

**Kadykova N.S.**

Ph.D., Associate Professor, Department of Engineering Graphics «MIREA – Russian Technological University»  
kadykova@mirea.ru

**Рустамян В.В.**

старший преподаватель кафедры «Инженерная графика» РТУ МИРЭА  
rustamyan@mirea.ru

**Rustamyan V.V.**

Art. Lecturer, Department of Engineering Graphics «MIREA – Russian Technological University»  
rustamyan@mirea.ru

## **Аннотация**

Моноширинные фигуры – фигуры, габариты которых в любом направлении равны. Самая известная моноширинная фигура – круг. С древних времен люди использовали что-либо округлое для транспортировки тяжелых объектов, сперва катки, в качестве которых использовали бревна, затем катки модифицировались в колесные пары. Именно с изобретения колеса, в основе геометрии которого лежит круг, началось взрывное развитие науки. Помимо круга, существуют другие фигуры постоянной ширины, с интересными свойствами и особенностями. В данной работе рассматривается практическое применение видоизмененного треугольника Рёло и других моноширинных тел, геометрически и аналитически исследуются траектории их точек при вращении цилиндров с сечением в форме моноширинной фигуры в направляющем контуре квадратной или ромбической формы.

**Ключевые слова:** фигура постоянной ширины, треугольник Рёло, вращение, фрезы.

## **Abstract**

Constant-width shapes – shapes whose dimensions are equal in any direction. The most famous constant-width shapes is a circle. Since ancient times, people have used something rounded to transport heavy objects, first rollers, which were used as logs, then the rollers were modified into wheel pairs. It was with the invention of the wheel, which is based on the geometry of the circle, that the explosive development of science began. In addition to the circle, there are other shapes of constant width, with interesting properties and features. In this paper, the practical application of the modified Reuleaux triangle and other constant-width bodies is considered, the trajectories of their points are geometrically and analytically studied when rotating cylinders with a cross-section in the form of a constant-width shapes in a guide contour of a square or rhombic shape.

**Keywords:** constant-width shape, Reuleaux triangle, rotation, milling cutter.

## **Постановка задачи**

Треугольник Рёло известен с давних времен и с определенным успехом применяется в наше время в технике, архитектуре, дизайне и искусстве. В отличие от других фигур постоянной ширины, треугольник обладает наименьшей площадью, углом и центром симметрии [1, 2].

В двигателе Ванкеля ротор выполнен в форме цилиндра с сечением-треугольником Рёло [3]. Вращаясь внутри рабочей камеры с эпитрохoidalным цилиндрическим отверстием, ротор касается стенок камеры всеми тремя вершинами и образует три области переменного объема, каждая из которых является областью сгорания. Двигатель выполняет три цикла за один оборот.

Кулачок в форме цилиндра с сечением-треугольником Рёло используется в рейферном механизме скачковых лентопротяжных устройств, например, в кинопроекторах [4].

Ротор в виде цилиндра с сечением-треугольником Рёло используется для сверления отверстий, приближенных к квадратной формы. Ось такого ротора при вращении в квадратном направляющем контуре описывает в плоскости нормального сечения кривую, состоящую из четырех дуг эллипсов, при этом каждой точке этой кривой соответствует определенное положение кромки резца фрезы, что в результате при совпадении кромок резцов фрезы с вершинами сечения ротора в виде треугольника Рёло, приводит к квадратной форме отверстия с незначительными скруглениями в углах квадрата. Такое сверло давно известно, его удалось реализовать английскому инженеру Гарри Уаттеу ещё в 1917 г. [5, 6].

Нас заинтересовало, какие траектории будет описывать кромка резца при разных начальных положениях относительно оси ротора, при разных формах как моноширинного сечения ротора, так и направляющего контура. Работы, посвященные аналитическому и геометрическому определению кромок резца при материалобработке, периодически появляются в литературе, например [7–9], но по теме нашего исследования ранее ничего не публиковалось.

Также в данной работе представлена принципиальная конструкция насадки на сверло с возможностью смены, как направляющих контуров, так и роторов различных форм.

### **Анализ траектории точки моноширинной фигуры при вращении внутри контура квадратной формы**

Габарит фигур постоянной ширины одинаков во всех направлениях. Иными словами, ортогональное проецирование такой фигуры на любую прямую даст отрезок одинаковой длины. Подобно окружности или любой другой фигуры постоянной ширины, треугольник Рёло может вращаться в квадрате все время, касаясь всех четырех сторон квадрата. При вращении вершины треугольника проходят почти весь периметр квадрата, за исключением его вершин.

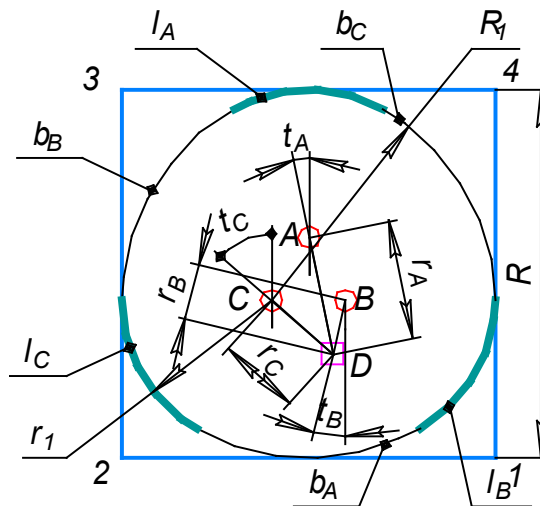
Треугольник Рёло устроен следующим образом: из вершин равностороннего треугольника ABC проведены окружности радиуса  $r=AB$ . Пересечение трёх кругов, ограниченных этими окружностями, является треугольником Рёло. Можно считать, что треугольник Рёло образован тремя одинаковыми парами дуг окружностей, в каждой паре одна окружность нулевого радиуса, а радиус второй – равен стороне равностороннего треугольника. Можно модифицировать треугольник Рёло, заменив в каждой паре окружность нулевого радиуса на окружность действительного радиуса  $(A;r_1)$ ,  $(B;r_1)$ ,  $(C;r_1)$ . При этом парная к ней окружность имеет тот же центр и радиус  $R_1=r+r_1$ . Ширина полученной моноширинной фигуры составит  $R=R_1+r_1=r+2r_1$ .

Рассмотрим движение точки при вращении модифицированного таким образом треугольника Рёло в квадратной рамке. Разместим стороны квадрата 1234 рамки вертикально и горизонтально и примем за центр координат левый нижний угол квадрата (вершину 2). Рассмотрим изменение координат произвольной точки D при вращении контура в рамке. Пусть начальная позиция контура показана на рис. 1. Координата  $y$  при вращении по часовой стрелке будет меняться также как координата  $y$  при качении контура по нижнему основанию квадратного контура, т.е. уравнение движения по координате  $y$  будет соответствовать уравнению координаты  $y$  в циклоиде качения окружности  $b_A$  по стороне квадрата 12. При этом изменение координаты  $x$  будет аналогично происходить по уравнению координаты  $x$  в циклоиде качения окружности  $l_C$  по левой стороне квадрата 23. Такой закон движения точки D будет наблюдаться при изменении угла наклона контура  $t$  от 0 до  $\pi/6$ , после чего циклоида качения окружности  $b_A$  по стороне квадрата 12 сменится на циклоиду качения окружности  $l_B$  по стороне квадрата 12, и этот закон будет действовать в диапазоне  $t \in [\pi/6; \pi/3]$ . В диапазоне  $t \in [\pi/3; \pi/2]$ , циклоида качения окружности  $l_C$  по стороне квадрата 23, сменится на циклоиду качения окружности  $b_A$  по стороне квадрата 23. Расположение контура в квадрате станет поворотно-симметричным исходному, и оставшуюся траекторию движения точки D можно получить трёхкратным последовательным поворотом уже имеющейся траектории на угол  $\pi/2$  относительно центра квадрата. Итого, траектория движения точки, жестко связанной с контуром – модифицированным треугольником Рёло, вращающимся в квадратной рамке, будет представлять собой 12 эллиптических дуг, из которых 3 уникальны, а остальные – результат поворотной симметрии. Была реализована параметрическая модель такой траектории, в которой входными данными являются исходные координаты точки D, а результатом является траектория точки D при вращении контура в квадратной рамке:

$$x=R_1-r_B \cdot \cos(t_B-t); y=R_1-r_A \cdot \sin(t_A-t); t \in [0; \pi/6]$$

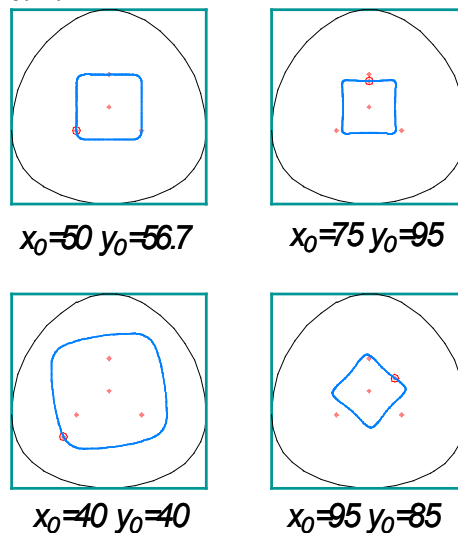
$$x=R_1-r_B \cdot \cos(t_B-t); y=R_2-r_C \cdot \sin(t_C-t); t \in [\pi/6; \pi/3]$$

$$x=R_2-r_A \cdot \cos(t_A-t); y=R_2-r_C \cdot \sin(t_C-t); t \in [\pi/3; \pi/2]$$



**Рис. 1.** Начальное положение треугольника Рёло и точки внутри него

Полученные параметрические уравнения были использованы для построения параметрической кривой траектории точки, жестко связанной с моноширинной фигурой – модифицированным треугольником Рёло, вращающимся в квадратной рамке, в среде Компас 3D. Входные параметры – координаты точки относительно одной из вершин рамки. Некоторые результаты представлены на рис. 2.

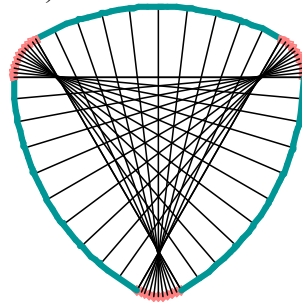


**Рис. 2.** Некоторые траектории движения точек внутри вращающегося модифицированного треугольника Рёло

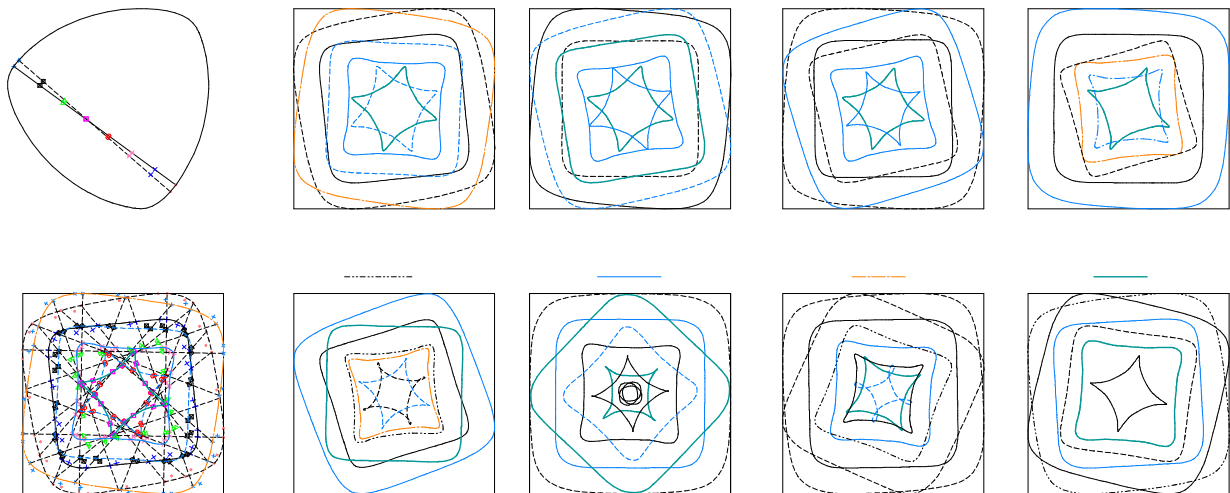
### Геометрическое построение траекторий точки моноширинной фигуры при вращении внутри контура квадратной или ромбической форм

Аналитическое нахождение кривой траектории как в вышеописанном случае может быть довольно сложной задачей, а может быть и неразрешимой. Например, аналог треугольника Рёло, построенный не на дугах окружностей, а на дугах иных кривых (различных коник или кривых более высокого порядка) и геометрических местах точек вторых вершин равных нормалей к ним, с противоположной кривизной (рис. 3 на примере дуги эллипса), аналитическому решению не поддаётся. Нами была разработана методика геометрического построения таких траекторий средствами геометрического пакета Компас 3D. Дуга кривой с углом касательных в вершинах равным  $120^\circ$  разбивалась на равные по длине участки, полученные вершины соединялись общими нормальными равной длины, которые обозначались отрезками разных стилей, вторые вершины нормалей соединялись сплайном, по нормальным равномерно распределялись точки, также обозначаемые разными стилями, полученная конструкция многократно поворачивалась на заданную дельту угла, и после каждого шага вписывалась в контур рамки. Полученный геометрический массив точек расшифровывался, по точкам одной группы строился замкнутый сплайн, и получались различные траектории точек,

жестко связанных с вращающейся в рамке моноширинной фигурой (рис. 4, на примере параболического аналога треугольника Рёло).

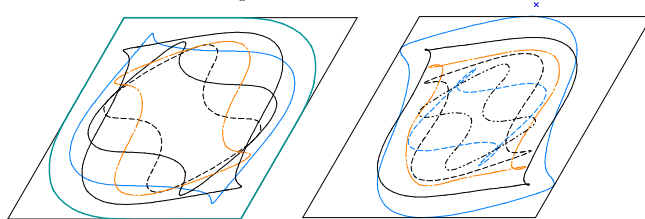


**Рис. 3.** Аналог треугольника Рёло на основе дуг эллипса



**Рис. 4.** Траектории движения точек внутри параболического аналога треугольника Рёло

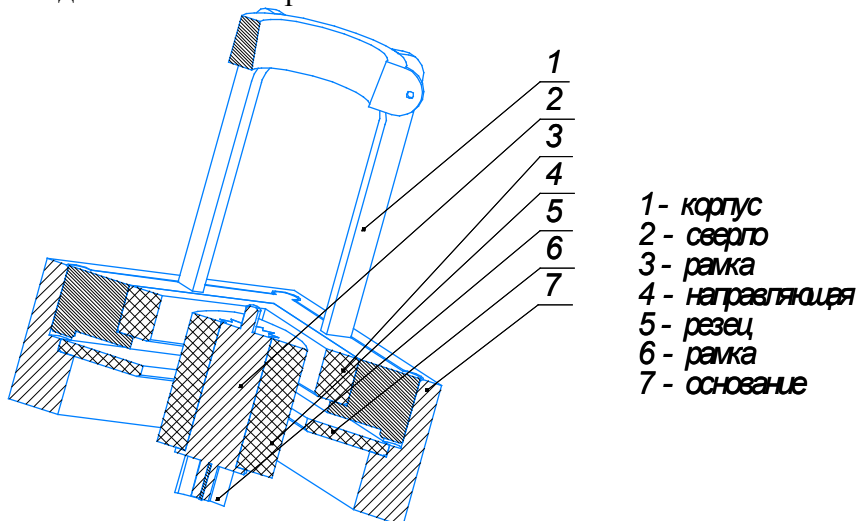
Довольно необычные траектории были получены при вращении треугольника Рёло в ромбовидном контуре, траекторию, описываемую вершиной треугольника Рёло, можно использовать для получения отверстий под сменную головку с наружным шестигранным зевом (рис. 5).



**Рис. 5.** Траектории движения точек внутри треугольника Рёло, вращающегося в ромбовидном контуре

### Выводы

Показана возможность и алгоритм создания моноширинных фигур, основанных не на дугах окружностей, а на дугах иных кривых. Сравнение траекторий жестко закреплённой на вращающейся в заданной рамке моноширинной фигуре точки, полученных при одних исходных в аналитическом и геометрическом построениях, показало, что точность геометрического построения весьма высока. Рассмотренные аналитический и графический методы построения траекторий позволяют спроектировать насадку на сверло или сверлильный станок, для высверливания отверстий различных, заданных наперед форм. Принципиальное устройство подобной насадки показано на рис. 6.



**Рис. 6.** Устройство насадки для высверливания различных форм на основе вращающегося треугольника Рёло

Рамки 3 и 6, направляющая 4 и резец 5 являются заменяемыми элементами. Сверло 2 и направляющая 4 могут сопрягаться под различными углами. Использование различных наборов насадок позволит высверливать отверстия в широком диапазоне различных, заранее известных форм.

### Литература

1. Finch S.R. Reuleaux Triangle Constants // *Mathematical Constants*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003. – С. 513–515. – (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 94). – ISBN 0-5218-1805-2
2. Pickover C.A. Reuleaux Triangle // *The Math Book: From Pythagoras to the 57th Dimension, 250 Milestones in the History of Mathematics*. – New York; London: Sterling, 2009. – С. 266–267. – ISBN 1-4027-5796-4

3. Иван Пятов. РПД изнутри и снаружи [электронный ресурс] // Двигатель. – № 5–6 (11–12). – 2000. – URL: <http://engine.aviaport.ru/issues/11&12/page14.html> . – Загл. с экрана.
4. Кулагин С.В. Грейферный механизм // Фотокинотехника / Гл. ред. Е. А. Иофис. – Москва: Советская энциклопедия, 1981. – С. 71.
5. Watts H.J. U.S. patent 1,241,175 (Floating Tool-Chuck)
6. Watts H.J. U.S. patent 1,241,176 (Drill or Boring Member).
7. *Панчук К.Л., Мясоедова Т.М., Крысова И.В.* Геометрическая модель генерации семейства контурно-параллельных линий для автоматизированного расчета траектории режущего инструмента // Геометрия и графика. – 2019. – №1. – С. 3–13. – DOI: 10.12737/article\_5c92012c51bba1.17153893
8. *Рязанов С.А.* Геометрическая модель производящей поверхности, эквивалентной рабочей поверхности зуборезного инструмента «червячная фреза» // Геометрия и графика. – 2019. – №2. – С. 56–60. – DOI: 10.12737/article\_5d2c24f391d6b6.68532534
9. *Рязанов С.А., Решетников М.К.* Расчет координат модифицированного профиля производящей поверхности зуборезного инструмента // Геометрия и графика. – 2020. – №4. – С. 35–46. – DOI: 10.12737/2308-4898-2021-8-4-35-46