О системах построений, связанных с векторными геометрическими редакторами

On the geometric constructions systems related to vector geometric editors

Бойков А.А.
старший преподаватель кафедры инженерной графики РТУ МИРЭА
e-mail: albophx@mail.ru

Boykov A.A.
senior lecturer of department of engineering graphics of MIREA – Russian Technological University
e-mail: albophx@mail.ru

Кадыкова Н.С.
канд. техн. наук, доцент кафедры инженерной графики РТУ МИРЭА
kadykova@mirea.ru

Kadykova N.S.
Ph.D., associate professor of department of engineering graphics MIREA – Russian Technological University
kadykova@mirea.ru

Аннотация
В статье выявляются причины, по которым теория решения геометрических задач на построение (конструктивная геометрия) потеряла значимость и не преподается в рамках современного инженерного и графического образования. Главной из них является существенный разрыв между конструктивной геометрией как теорией и современной инженерной и графической практикой. Для этого рассматриваются современные векторные графические редакторы (CAD-системы и редакторы для дизайна) как системы геометрических построений. Подробнее рассматриваются конструктивные возможности редакторов для дизайна, поскольку в них отсутствуют инструменты построения точек и окружностей с заданным центром, проходящих через заданную точку. Показывается, что даже такие редакторы позволяют реализовать все построения, доступные для классических циркуля и линейки, но ориентированы в большей степени на конструктивно-аналитические способы решения задач. Делаются выводы о том, что теория геометрических построений должна служить основой при изучении приемов работы в векторных геометрических редакторах, а также при проектировании пользовательских интерфейсов таких редакторов. Для этого требуется развивать конструктивную геометрию в направлении использования новых возможностей, имеющихся в современных векторных геометрических редакторах.

Ключевые слова: теория решения геометрических задач на построение, конструктивная геометрия, системы геометрических построений, геометрические инструменты, векторные геометрические редакторы, редакторы для дизайна.

Abstract
The article reveals the reasons why the theory of solving geometric construction problems (constructive geometry) has lost its significance and is not studied within engineering and graphic education today. Chief among them is the significant gap between constructive geometry as a theory

and modern engineering and graphic practice. For this, modern vector graphic editors (CAD systems and design programs) are considered as systems of geometric constructions. The constructive capabilities of the vector editors for graphical design are considered in more detail, since they do not have tools for creating points and circles with a given center, passing through a given point. It is shown that even such editors make it possible to implement all the geometric constructions available for the classical compasses and rulers, but are focused more on constructive-and-analytical ways of solving problems. It is concluded that the theory of geometric constructions should serve as a basis for studying the techniques of working in vector geometric editors, as well as for designing user interfaces of such editors. This requires the development of constructive geometry in the direction of using the new features available in modern vector geometric editors.

Keywords: theory of solving geometric construction problems, constructive geometry, geometric constructions system, geometric construction tool, vector geometric editor, design and vector graphics program

1. Геометрические задачи на построение играют важную роль в математическом и, в частности, геометрическом образовании, развивают изобретательность, инициативу, конструктивные способности и др. [1–4]. При этом теория решения геометрических задач на построение (конструктивная геометрия) имеет важное значение для инженерной деятельности (представляет совокупность точных и приближенных методов для решения практических задач), если отражает состояние инженерной практики [1]. В настоящее время теория решения геометрических задач на построение оказалась заметно оторвана от инженерной практики, она не преподается инженерам, в отличие, например, от аналитической геометрии, вычислительной геометрии, численных методов, компьютерной графики и др. Это происходит, вероятно, потому, что конструктивная геометрия сконцентрирована на решении задач в системе построений классическими инструментами, а инженерная практика использует компьютерные геометрические редакторы и математические пакеты [5–6].

Пользователями компьютерных геометрических редакторов, кроме инженеров, также являются художники и дизайнеры, поэтому в дальнейшем мы будем говорить в целом об инженерной и графической практике.

Таким образом, исследование комплекса проблем конструктивной геометрии в условиях современности является актуальной задачей. Преодоление их, т.е. развитие теории геометрических построений в соответствии с реальностью инженерной и графической практики позволит обогатить практику методами решения задач, усовершенствовать инструменты (интерфейс редакторов и способы работы в них) и т.п.

2. Приведем основные характерные черты конструктивной геометрии:

− конструктивная геометрия зародилась значительно раньше алгебры и аналитической геометрии. «За несколько веков до Рождества Христова геометрия уже стояла на высокой степени развития. А так как в то время алгебра не достигла еще … высоты, … то древние математики должны были ограничиваться в своих изысканиях чисто геометрическими методами… ни одни задачи не содействуют развитию в учениках наблюдательности и правильности мышления, как геометрические на построения» [2]. «История геометрии и некоторых других разделов математики тесно связана с развитием теории геометрических построений… Геометрические построения привлекли внимание древнегреческих математиков еще в VI–V вв. д.н.э. Ими занимались почти все крупные греческие геометры… Средневековье мало дало в области развития конструктивной геометрии… Только в новое время (XVII–XX вв.) теория геометрических построений стала развиваться дальше в связи с созданием новых разделов математики…» [4];

− конструктивная геометрия тесно связана не только с «чистой» математикой, но и с инженерной практикой. «Инженеры и техники в практической работе… пользуются теми или другими чертежными инструментами. Наиболее употребительными являются линейка, циркуль и угольник… недостаточно убедиться в существовании решения… [требуется] фактически осуществить на чертеже построение искомой фигуры. В этом именно состоит графическое решение задачи. Ограничивая свой инструментарий линейкой и циркулем,.. чертежник не будет в состоянии решить задачу степени выше второй… все это показывает, что самая постановка задач, возможность их решения, существенно зависит от состава инструментария… математическая теория (конструктивная геометрия) должна отражать свойства и особенности графической практики» [1]. «Практический интерес представляют приближенные способы решения… часто оказывается, что приближенный способ с точки зрения чертежной практики выгоднее и проще теоретически точного… приближенные методы геометрических построений составляют в настоящее время важную часть теории геометрических построений» [4];

– в литературе конструктивная геометрия рассматривается преимущественно в ее педагогическом аспекте. В табл. 1 приведен список основных монографий, учебников и пособий по решению геометрических задач на построение, вышедших на русском языке. Все они, преимущественно, предназначены для математиков или педагогов, школьников или учащихся педагогических вузов.

В этих изданиях наибольшее внимание уделяется построениям при помощи циркуля и линейки на евклидовой плоскости, реже – другим системам построений или построениям на неевклидовой плоскости и в пространстве.

Для сравнения приведем разделы, связанные с геометрическими построениями, востребованные инженерной практикой (взято из [7]):

- Разметка деталей машин:
  - Деление отрезка.
  - Построение параллельных и перпендикулярных прямых.
  - Построение и деление углов.
  - Построение элементов окружности.
  - Деление окружности.
  - Построение касательных к окружности, определение длины дуги и окружности.
  - Сопряжения.
- Построение кривых линий:
  - Построение эллипса, гиперболы, параболы, кубической и полукубической параболы, циклоидальных кривых, эвольвенты, лемнискаты, спиралей и др.
- Построение разверток.
- Графические методы приближенных вычислений:
  - Графическое сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корней, графическое решение уравнений, интегрирование и дифференцирование.
- Построение и использование номограмм.

Этот пример показывает, что уже в 60-х годах конструктивная геометрия и инженерная практика оказались заметно оторваны друг от друга.

Из табл. также видно, что наибольшее число работ, посвященных решению геометрических задач, выходило в период 1930–1970 гг., когда чертежная практика составляла действительную основу инженерной деятельности. В 80-х годах на смену циркулю и линейке приходят ЭВМ и CAD-системы, чертежная практика постепенно вытесняется аналитической геометрией и умением чертить и строить 3D-модели при помощи компьютера. В связи с этим разрыв между конструктивной геометрией, сконцентрированной на построениях циркулем и линейкой, и инженерной и графической практикой, инструментами которой стали геометрические редакторы, еще более увеличился.

Таблица 1

Монографии, учебники и пособия по решению геометрических задач на построение

№ п/п	Название
1.	Петерсен Ю. Методы и теории для решения геометрических задач на построение, 1892
2.	Глаголев Н.А. Сборник геометрических задач на построение, 1903
3.	Воронец А. Геометрия циркуля, 1934
4.	Четверухин Н.Ф. Геометрические построения и приближения, 1935
5.	Романовский Б.В. Задачи на построение в стереометрии, 1936
6.	Адлер А. Теория геометрических построений, 1940
7.	Александров И.И. Сборник геометрических задач на построение, 1950
8.	Зетель С. Геометрия циркуля и геометрия линейки, 1950
9.	Лоповок Д.М. Сборник стереометрических задач на построение, 1950
10.	Четверухин Н. Ф. Стереометрические задачи на проекционном чертеже (изд. 2-е), 1952
11.	Смогоржевский А.С. Геометрические построения в плоскости Лобачевского, 1951
12.	Четверухин Н.Ф. Методы геометрических построений, 1952
13.	Аргунов Б.И., Балк М.Б. Геометрические построения на плоскости, 1957
14.	Наумович Н.В. Геометрические места в пространстве и задачи на построение, 1962
15.	Глоговский В.В. Элементарные конструктивные задачи по начертательной геометрии, 1981
16.	Костовский А.Н. Геометрические построения одним циркулем, 1984
17.	Дадаян А.А. Основы черчения и инженерной графики. Геометрические построения на плоскости и в пространстве, 2007
18.	Блинков А.Д., Блинков Ю.А. Геометрические задачи на построение, 2010
19.	Львова Л.В. Геометрия. Преобразования и построения, 2012

3. Все это привело к тому, что значимость конструктивной геометрии за пределами математического образования, стала неочевидной. При этом другие разделы геометрии сохраняют свое значение для инженерного образования. Поэтому рассмотрим связь конструктивной геометрии с другими разделами геометрии[1] (рис. 1).

• Связь конструктивной геометрии с евклидовой планиметрией и стереометрией очевидна и понятна, поскольку сама она, как правило, излагается на примерах задач евклидовой планиметрии и стереометрии. В действительности же евклидова планиметрия и стереометрия, как мы их знаем, есть во многом продукт самой древней, т.е. конструктивной геометрии.

• Такого же рода связь у конструктивной геометрии с неевклидовыми и псевдоевклидовыми геометриями, поскольку изучение свойств новых, отличных от евклидового пространств, требует для наилучшего их понимания уметь строить в этих пространствах те или иные фигуры по заданным условиям, т.е. решать задачи на построение [8, 9].

• Связь конструктивной геометрии с проективной оказывается еще более тесной, ввиду конструктивной, в значительной мере, природы самой проективной геометрии, основы которой закладывались еще в древнейшей греческой геометрии. Что касается современного ее изложения, то оно может выполняться в теоретико-групповом и аналитическом (например, Хартсхорн) или более традиционном конструктивном (Четверухин, Гуревич, Вольберг и др.) ключе.

• Связь конструктивной геометрии с дифференциальной неочевидна, поскольку дифференциальная геометрия традиционно излагается с использованием аппарата математического анализа, в первую очередь, дифференциального исчисления. Ее предметом являются кривые и поверхности, которые можно назвать «гладкими», и их дифференциальные свойства, не изменяющиеся при тех или иных преобразованиях. Отметим, однако, что существуют классы задач дифференциальной геометрии, которые состоят в построении той или иной поверхности, если заданы ее дифференциальные свойства. Такие задачи по аналогии с «классической» конструктивной геометрией мы бы назвали задачами на построение. Кроме того, многие разделы дифференциальной геометрии могут быть изложены в конструктивном ключе, как это было сделано Выготским [10] или Круппой [11] и др.

[1] Более полная и системная классификация разделов геометрии выходит за рамки настоящей работы.

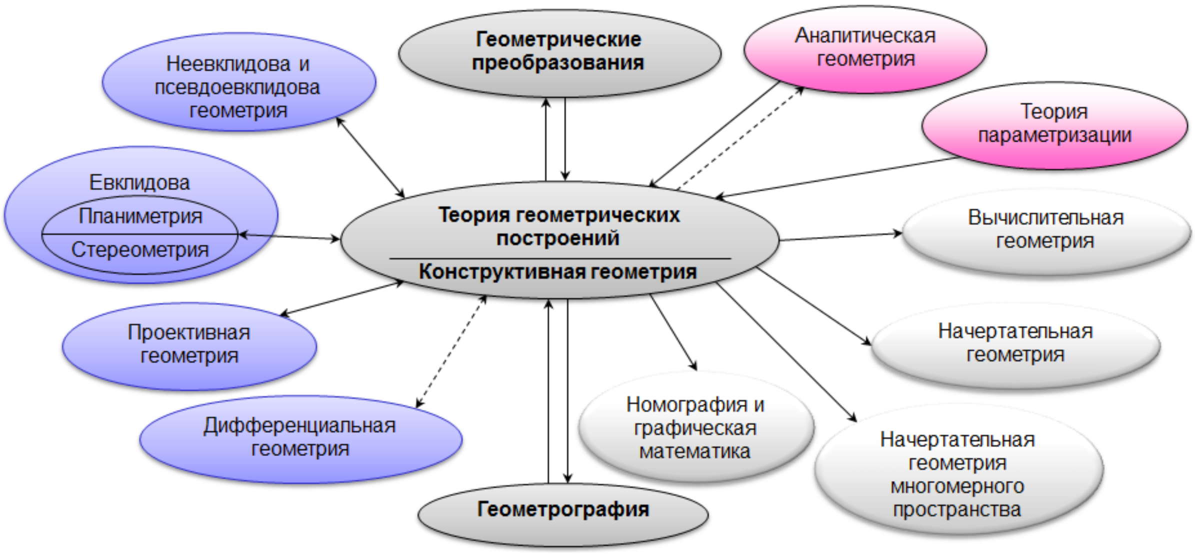

Рис. 1. Связь конструктивной геометрии с другими разделами

• Теория геометрических преобразований, которая имеет важное значение, сама по себе при решении многих научных и инженерных задач (например, [12, 13]), для конструктивной геометрии служит своего рода неотъемлемой частью, поскольку геометрические преобразования рассматриваются как один из ключевых способов решения задач на построение. Вместе с тем многие геометрические преобразования реализуются через последовательности построений.

• Геометрографию часто рассматривают как раздел конструктивной геометрии. Так, ее предметом является, с одной стороны – точность выполнения того или иного построения данным инструментом при заданных условиях, с другой – оценка простоты решения той или иной задачи данным способом и сравнение разных способов по критерию точности и простоты. Поиск более простых или точных способов решения той или иной задачи на построение оказывается самостоятельной задачей (например, [14]). Отметим, что вопросы оценки точности и простоты могут быть поставлены и в отношении решений, полученных при помощи современных геометрических инструментов – CAD-систем, математических пакетов, языков программирования.

• Аналитическая геометрия традиционно рассматривается в геометрии как подход, противоположный конструктивному [15]. Вместе с тем в теории решения задач на построение аналитический подход рассматривается как один из способов решения задач, причем часто полученные алгебраические выражения для элементов искомой фигуры позволяют найти подходящие построения. Поэтому в настоящее время связь аналитической и конструктивной геометрий скорее односторонняя. Тем не менее можно легко представить себе и противоположную ситуацию: фигура, построенная конструктивным способом, может подтолкнуть к получению новых формул и уравнений (например, [16]). Поэтому односторонность связей в этом случае следует считать скорее следствием чрезмерного распространения аналитического подхода, сопровождавшего широкое внедрение компьютеров в науку и инженерную практику.

• Теория параметризации [17], как прикладной раздел исчислительной геометрии, активно используется в конструктивной геометрии при постановке (какой набор исходных фигур необходим, чтобы задать требуемую?) и анализе (сколько решений имеет задача?) задач на построение.

• Связь конструктивной геометрии с начертательной, начертательной геометрией многомерных пространств и номографией очевидна и схожа: каждый из этих разделов имеет своим предметом моделирование чего-либо (начертательная геометрия – объекты трехмерного пространства, начертательная геометрия многомерного пространства – объекты 4-х и более мерных пространств, номография и графическая математика – математические закономерности) при помощи некоторого набора геометрических фигур и решение задач при помощи таких моделей. Здесь геометрические построения выступают в роли средства создания и функционирования требуемой модели. Отметим, что во всех этих случаях мы имеем дело с чисто конструктивным приёмом: выражение одной фигуры через определитель (репер) – совокупность других фигур и связей между ними (трехмерный или многомерный объект – его проекции, математический закон – геометрический алгоритм).

• Связь конструктивной геометрии с вычислительной менее очевидна, поскольку вычислительная геометрия, как правило, использует аналитические модели (формулы, уравнения), а также чисто «математические» методы (численные методы, сплайн-функции, комбинаторные алгоритмы). В действительности же природа вычислительной геометрии во многом конструктивна – так, сплайн-функция есть математическое выражение цепочки гладкосопряженных кривых, а численные методы – многократное повторение какого-либо простого геометрического построения (касательной прямой, дуги параболы и др.). Вычислительная геометрия в этом случае во многом может рассматриваться как переложенные на язык вычислений конструктивные геометрические алгоритмы. Кроме того, в области программирования мы видим неожиданный симбиоз конструктивной и вычислительной геометрий: оформленные в виде подпрограмм низкоуровневые вычислительные процедуры (определение координат точки, коэффициентов уравнения прямой и пр.) при решении конкретной задачи вдруг складываются в чисто конструктивный (хоть и записанный символически) алгоритм [18, 19].

Проведенный анализ косвенно подтверждает предположение о том, что недооцененность конструктивной геометрии в современной инженерной и графической практике не является следствием бесполезности конструктивной геометрии как таковой, наоборот конструктивная геометрия имеет тесные связи с другими разделами геометрии и, казалось бы, может оказывать серьезное влияние на практику.

Поэтому далее требуется проанализировать противоречия, назревшие к настоящему моменту между конструктивной геометрией и современной инженерной и графической практикой.

4. Конструктивная геометрия содержит систематическое изложение способов решения различных геометрических задач на построение указанными инструментами при заданных условиях.

Наиболее общим является порядок решения задачи на построение, состоящий из этапов анализа, синтеза, доказательства и исследования. На этапе анализа на основе подсчета числа параметров требуемой фигуры и условий задачи определяется возможное число решений. Задача может быть неопределенной (бесконечное число решений), определенной (конечное число решений), переопределенной (в общем случае не имеет решений). Способами решения задач на построение являются [1–4]:

- Способ вспомогательных фигур.
- Способ геометрических мест.
- Способ выхода в пространство большей размерности.
- Способ геометрических построений.
- Способ алгебраического анализа.

Определенная задача на построение имеет, по крайней мере, одно решение. В зависимости от используемых инструментов и дополнительных ограничений его можно найти точно или только приближенно.

В литературе по теории решения геометрических задач на построение рассматриваются, в основном, следующие инструменты:

- Односторонняя линейка (прямая).
- Двусторонняя линейка (две параллельные прямые).
- Угольник (пара прямых, пересекающихся под некоторым углом, обычно, прямым).
- Циркуль (окружность).
- Циркуль с ограничениями (окружность с фиксированным радиусом или радиусом не больше или не меньше некоторого значения и др.).

- Складывание листа бумаги (техника оригами).

Совокупность инструментов, доступных при решении задачи, образуют систему построений. Наиболее известными системами построений являются циркуль и односторонняя линейка, только циркуль или складывание бумаги. Степенью задачи на построение называют степень алгебраического уравнения, к которому сводится нахождение решения. Всякий инструмент позволяет решать задачи той или иной степени. Система построений позволяет решать задачи, степень которых не выше наибольшей степени отдельных инструментов. Так, линейка и циркуль или только циркуль позволяют решать задачи второй степени, а складывание бумаги – третьей.

Вместе с тем в графической практике уже долгое время были известны и применялись и другие инструменты: невсис (в том числе линейка с делениями), коникографы (эллипсографы, параболографы, гиперболографы), приборы для вычерчивания других кривых, в том числе, высших порядков. Это означает, в частности, что, имея на практике возможность вычертить и пересечь два эллипса, инженер, в принципе, мог бы решать графические задачи третьей и четвертой степени, а пару кривых четвертого порядка – до шестнадцатой.

В изданиях по теории решения геометрических задач на построение использование коник и других замечательных кривых как инструментов до сих пор не рассматривалось, но, несомненно, многие задачи планиметрии, начертательной геометрии, начертательной геометрии многомерного пространства, теории геометрических преобразований, номографии и графической математики могли бы найти точные и приближенные решения, пригодные для инженерной практики (как это показано, например, в [13]). С появлением компьютерных геометрических редакторов, дающих возможность выполнять построения, как на плоскости, так и в пространстве этот разрыв сделался еще больше.

Проанализируем возможности компьютерных геометрических редакторов с позиций конструктивной геометрии.

5. В геометрии фигурой в широком смысле называют любое множество точек (точка, прямая, отрезок, окружность, треугольник, несколько фигур). Всякая фигура имеет строго определенное число свобод (геометрических параметров), которые принято делить на внутренние (формы) и внешние (положения).

В векторной компьютерной графике фигурой называется информационный объект, имеющий определенный тип (вид фигуры) и набор именованных характеристик (свойств), которые можно разделить на параметры (геометрические свойства – определяют размеры и положение объекта) и атрибуты (негеометрические свойства – цвет, заливка, аннотации и пр.).

Построение объекта в векторном графике, таким образом, включает в себя как задание параметров (решение задачи на построение), так и атрибутов.

Поскольку в векторном графике создаются модели геометрических фигур, и происходит это подобно тому, как сами фигуры строятся в геометрии, то множество команд, добавляющих объекты или изменяющих их параметры, можно рассматривать как систему геометрических построений.

На рис. 2 показан внешний вид панелей инструментов некоторых векторных геометрических (графических) редакторов.

Различные варианты построения одной и той же фигуры для разных исходных данных реализуются через различные варианты команды (разные «кнопки») или посредством механизма привязок («приклеивание» к особым точкам и прямым в ходе построений). Кроме того, во всех геометрических редакторах имеется возможность непосредственного ввода значений параметров и атрибутов (рис. 3).

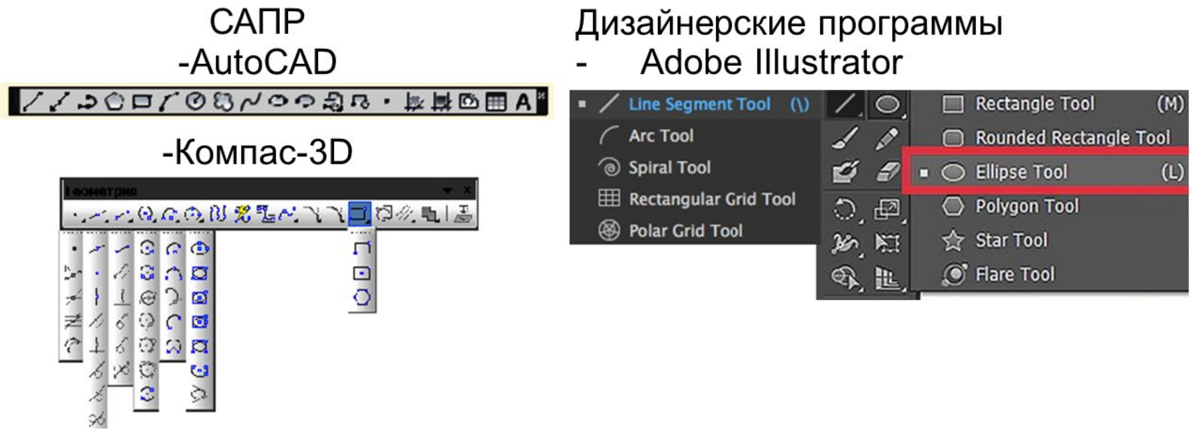

Рис. 2. Инструменты (команды) построения фигур в векторных редакторах: AutoCAD (© Autodesk, Inc.), Компас-3D (© Аскон), Illustrator (© Adobe, Inc.)

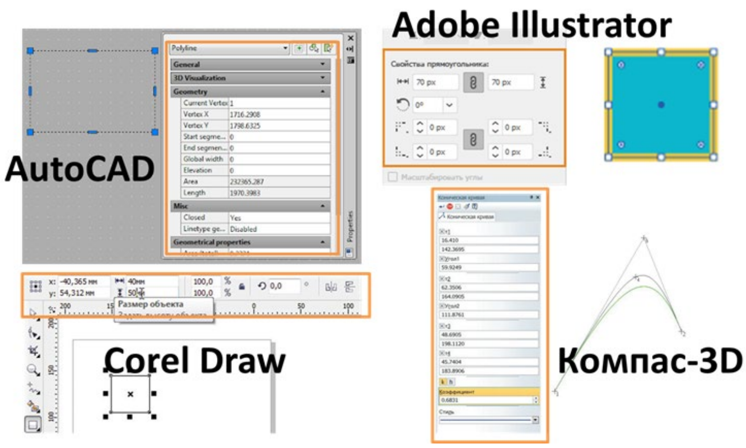

Рис. 3. Инструменты для ввода значений параметров фигур в векторных редакторах AutoCAD (© Autodesk, Inc.), Corel Draw (© Corel Corporation), Illustrator (© Adobe, Inc.), Компас-3D (© Аскон)

Это, с одной стороны, автоматически расширяет класс конструктивных фигур (см. [1]) до всех фигур, параметры которых с указанной точностью могут быть введены непосредственно. С другой стороны, способ решения задач на построение в таком редакторе смещается от чисто конструктивного к ***конструктивно-аналитическому***, поскольку для построения той или иной фигуры в процессе решения может потребоваться выполнить дополнительные вычисления.

Редакторы CAD-систем позволяют строить точки, прямые, отрезки, правильные многоугольники и прямоугольники, окружности, дуги, эллипсы, сплайны (кусочно-гладкие кривые), а также специальные объекты типа размерных и обозначений.

Редакторы для дизайна позволяют строить отрезки, правильные многоугольники и прямоугольники, эллипсы, сетки и спирали, а также некоторые художественные фигуры (звезды, скругленные прямоугольники и др.). Точки строить нельзя, но можно задавать для последующей привязки концами отрезков, центрами эллипсов и т.п.

Кроме команд построения фигур, геометрические редакторы содержат множество команд редактирования созданных фигур, из которых наибольший интерес представляют команды геометрических преобразований.

Как следует из сказанного, системы построений геометрических редакторов CAD-систем, не считая конструктивно-аналитических возможностей, полностью включают в себя построения циркулем и линейкой, достаточно подробно освещенные в литературе по конструктивной геометрии, а также ряд новых фигур и инструментов, мало исследованных в контексте решения задач на построение.

В отношении систем построений редакторов для дизайна ситуация не столь однозначна, поэтому рассмотрим эти системы подробнее.

6. Система построений циркулем и линейкой базируется на ряде постулатов и аксиом, которые, в целом, сводятся к практической возможности вычертить отрезок (прямую) через две точки, окружность с заданным центром через заданную точку или радиусом, взятым путем измерения на чертеже, а также ставить точки на пересечении вычерченных линий [1–4].

Уже на этом этапе видно, что точки как таковые в редакторе для дизайна построить нельзя, вместо них приходится использовать концы отрезков, центры построенных эллипсов и пр. Тем не менее с указанной оговоркой постулат конструктивной геометрии о точке пересечения кривых в редакторе для дизайна выполняется.

Аксиома линейки инструментами редактора вполне реализуется, хотя здесь можно построить только отрезок (не прямую) и его последующее удлинение требует некоторых усилий.

Сложнее обстоит дело с аксиомами окружности – измерением расстояний и построением окружностей через заданную точку. Во-первых, окружности среди инструментов нет, ее приходится получать как частный случай эллипса с равными полуосями. Во-вторых, в редакторе эллипс (окружность) строится при помощи описанного прямоугольника (рис. 4), т.е., фактически, требует указания горизонтальных и вертикальных касательных (границ). Построение через заданную точку не предусмотрено. Измерения возможны, но результат представляется в виде числа, как правило, округлен и требует непосредственного ввода.

С другой стороны, простейшие задачи, такие как построение параллельной прямой или перпендикуляра, которые в системе построений циркулем и линейкой требуют использования циркуля, в редакторе для дизайна элементарно выполняются при помощи преобразований сдвига и поворота (рис. 5).

На рис. 6 показано чисто конструктивное построение окружности с заданным центром через заданную точку, т.е. практически реализована аксиома циркуля системы построений циркулем и линейкой. На практике, если нужна не сама по себе окружность, проще обратиться к другим инструментам.

Тем не менее редакторы для дизайна также полностью реализуют классическую систему построений циркулем и линейкой, и тоже имеют в своем составе новые фигуры и инструменты, требующие рассмотрения в контексте решения задач на построение. Приведенный пример показывает также, что решение задач на построение, традиционно изложенное для системы построений циркулем и линейкой, будет малополезно, если задачи придется решать в редакторе типа редактора для дизайна.

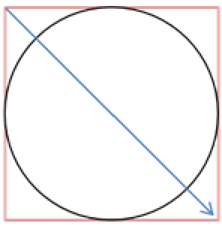

Рис. 4. Построение окружности в редакторе для дизайна

Рис. 5. Построение параллельной и перпендикулярной прямой в редакторе для дизайна

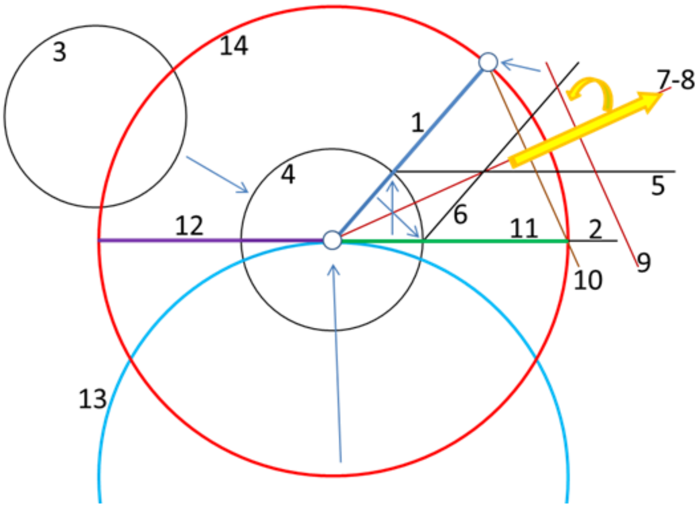

Рис. 6. Построение окружности с заданным центром через точку в редакторе для дизайна

7. Из сказанного выше следует также, что развитие конструктивной геометрии в направлении новых систем построений (векторных геометрических редакторов) является по-настоящему актуальной задачей, особенно в отношении редакторов для дизайна.

Системы построений таких редакторов можно, в отличие от классических инструментов, назвать ориентированными на геометрические преобразования.

Рассмотрим подробнее инструменты геометрических преобразований таких редакторов.

Геометрические преобразования могут выполняться в режиме непосредственного манипулирования фигурой (конструктивно) либо непосредственным вводом значений (конструктивно-аналитически). Первый способ обладает ограниченной точностью задания.

С точки зрения групповой теории, геометрические преобразования можно представить в виде следующей иерархической схемы [14] (рис. 7).

Рис. 7. Группы геометрических преобразований

Векторный геометрический редактор для дизайна, как правило, имеет следующие инструменты геометрических преобразований:

- сдвиг[1];
- поворот (вращение)[1];
- равномерное[1,2] и неравномерное[3] сжатие / растяжение и отражение (симметрия);
- скос[3];
- перспективное искажение[4,*];
- деформация[5,*].

[1] – группа движений и симметрий, [2] – группа подобий, [3] – аффинная группа, [4] – проективная группа, [5] – нелинейные преобразования, [*] – отсутствуют в редакторе CAD-системы.

Такое разнообразие инструментов геометрических преобразований в редакторе, очевидно, открывает широкие возможности к решению различных задач на построение при наличии развитой теории их использования.

В качестве примера приведем решение задачи о построении изометрического изображения предмета двумя способами – способом геометрических преобразований (три действия – масштаб scale, скос shear, поворот rotate – SSR) и при помощи встроенной команды (одна операция). К сожалению, оба способа реализуют конструктивно-аналитический подход, т.е. требуют ввода числовых значений.

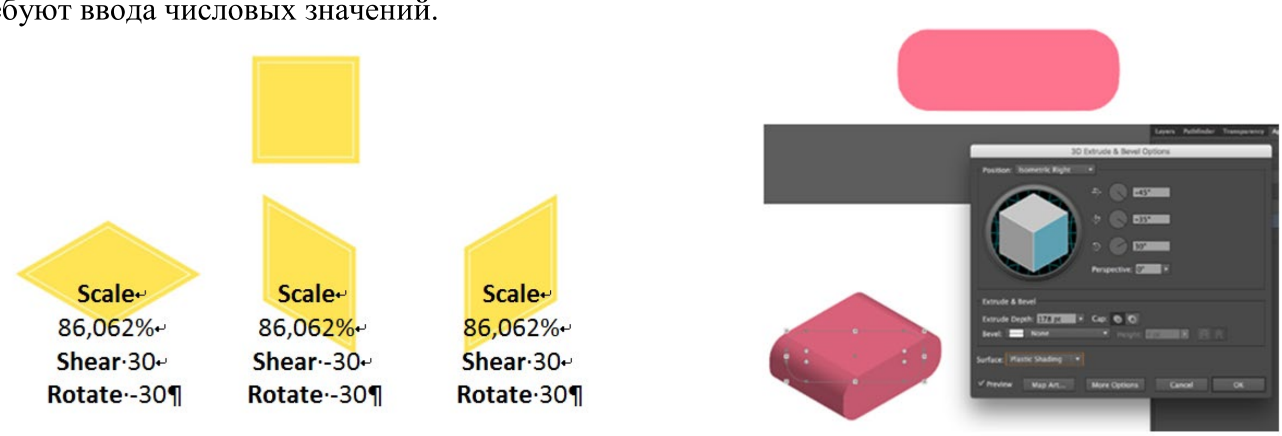

Рис. 8. Построение изометрической проекции предмета в редакторе для дизайна

Кроме инструментов геометрических преобразований, векторный редактор для дизайна также содержит ряд фигур, конструктивные возможности которых в литературе еще не освещены достаточно подробно – эллипсы, спирали и составные кривые (сплайны Безье).

8. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы.

- Теория геометрических построений должна составлять основу при изучении приемов работы в векторных геометрических редакторах. Для этого она должна отражать современную инженерную и графическую практику. К сожалению, в настоящее время наблюдается значительный разрыв между ними.
- Теория геометрических построений также должна составлять основу при проектировании пользовательских интерфейсов таких редакторов. Интерфейсы современных редакторов создаются совершенно без учета теории геометрических построений. Об этом свидетельствует отсутствие элементарных инструментов и команд в редакторах или ориентированность на ввод числовых значений, которые, как правило, требуют дополнительных расчетов, округляются при вводе, но которые можно было бы легко получить на самом чертеже. В качестве примера можно привести отсутствие окружности в редакторах для дизайна. Приведем еще примеры: эллипс в редакторе «Компас» можно построить по центру и двум полуосям (избыточный, с точки зрения параметризации способ), но нельзя – по оси / полуоси и произвольной точке, можно – по двум точкам и касательным в них, но практически невозможно точно указать точки на касательных; дуга конической кривой может быть задана при помощи инженерного треугольника, но больше никаким иным способом (в конструктивной геометрии их известно более сотни) и, кроме того, невозможно ее удлинение, хотя, казалось бы, что может быть проще и т.п.
- Даже инструменты векторных геометрических редакторов для дизайна позволяют реализовать все построения, соответствующие системе построений циркулем и линейкой. Эту систему построений можно назвать конструктивно-аналитической (требуется вводить числовые значения с клавиатуры), ее основу составляют геометрические преобразования.
- Возможности систем построений векторных геометрических плоских и трехмерных редакторов требуют дальнейших исследований, в частности, в области применения инструментов геометрических преобразований (аффинных, проективных и нелинейных) и «особых» фигур.

Литература

1. *Четверухин Н.Ф.* Методы геометрических построений. Изд. 3. − Москва: URSS. 2018. 152 с. ISBN 978-5-9710-4793-3.
2. *Петерсен Ю.* Методы и теории для решения геометрических задач на построение, приложенные более чем к 400 задачам. Изд. 2. − Москва: URSS. 2016. 128 с. ISBN 978-5-9710-2550-4.
3. *Александров И.И.* Сборник геометрических задач на построение (с решениями). − Москва: URSS. 2018. 174 с. ISBN 978-5-484-01452-1.
4. *Аргунов Б.И., Балк М.Б.* Геометрические построения на плоскости. Изд. 2-е. − Москва: Учпедгиз, 1957. − 268 с.
5. *Рязанов С.А*. Геометрическая модель производящей поверхности, эквивалентной рабочей поверхности зуборезного инструмента «червячная фреза» // Геометрия и графика. – 2019. – Т.7. − № 2. – С. 56–60. DOI: 10.12737/article_5d2c24f391d6b6.68532534
6. *Рязанов С.А., Решетников М.К.* Расчет координат модифицированного профиля производящей поверхности зуборезного инструмента // Геометрия и графика. – 2020. – Т.8, №4. – С. 35–46. – DOI: 10.12737/2308-4898-2021-8-4-35-46
7. *Шлыгин В.В.* Графические методы расчетов в машиностроении. − Москва: Машиностроение, 1967. 288 с.
8. *Гирш А.Г.* Новые задачи начертательной геометрии // Геометрия и графика. – 2019. – Т. 7, № 4. – С. 18–33. DOI: 10.12737/2308-4898-2020-18-33.
9. *Гирш А.Г.* Окружности на комплексной плоскости // Геометрия и графика. – 2020. – Т. 8, № 4. – С. 3–12. – DOI: 10.12737/2308-4898-2021-8-4-3-12
10. *Выготский М.Я.* Дифференциальная геометрия. − М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. 512 с.
11. Kruppa E. Analytische und konstruktive Differentialgeometrie. Wien: Springer-Verlag, 1957. 198 pp.
12. *Кокарева Я.А.* Конструирование каналовых поверхностей с переменной образующей и плоскостью параллелизма на основе эквиаффинных преобразований плоскости // Геометрия и графика. – 2017. – Т. 5, №. 1. – С. 12–20. – DOI: 10.12737/25119
13. *Волошинов Д.В.* Алгоритмический комплекс для решения задач с квадриками с применением мнимых геометрических образов // Геометрия и графика. – 2020. − Т. 8. − №2. – С. 3–32. – DOI: 10.12737/2308-4898-2020-3-32
14. *Пшуков Т.Э., Мамчуев М.О.* Приближенное решение задачи о квадратуре круга // Геометрия и графика. – 2018. – Т. 6. − №4. – С. 32–38. DOI: 10.12737/article_5c21f593838774.44754853
15. *Иванов Г.С.* Теоретические основы начертательной геометрии. − Москва: Машиностроение, 1998. − 160 с.
16. *Антонова И.В., Беглов И.А., Соломонова Е.В.* Математическое описание вращения точки вокруг эллиптической оси в некоторых частных случаях // Геометрия и графика. – 2019. – Т. 7. − №. 3. – С. 36–50. – DOI: 10.12737/article_5dce66dd9fb966.59423840
17. *Сальков Н.А.* Параметрическая геометрия в геометрическом моделировании // Геометрия и графика. – 2014. – Т. 2. − №3. – С. 7–13. – DOI: 10.12737/6519
18. Haiyan Y.U., Hongming C.A.I., Yuanjun H.E. Geometric basis: a geometric solving cell for geometric computing // 17th Intern. conf. on geometry and graphics. Beijing, China. 2016. Pp. 47-48.
19. *Бойков А.А.* О построении моделей объектов пространства четырех и более измерений в учебном процессе // Геометрия и графика. – 2018. – Т. 6. − № 4. – С. 54–71. – DOI: 10.12737/article_5c21f96dce5de8.36096061