Анализ организации эксплуатации инженерных систем жилых зданий на основе модели массового обслуживания с перерывами и задержками

Афанасьев Г.А.
Канд. экон. наук, доцент кафедры «Жилищно-коммунального комплекса», ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (г. Москва); e-mail: AfanasievGA@mgsu.ru

Статья получена: 26.10.2020. Рассмотрена: 28.10.2020. Одобрена: 30.11.2020. Опубликована онлайн: 30.12.2020. ©РИОР

Аннотация. В последние годы наблюдается повышенной интерес к применению вероятностных методов, в частности. теории массового обслуживания, к оценке эффективности деятельности управляющих компаний при организации эксплуатации технических систем жилых зданий.

В статье предложена математическая модель технической эксплуатации жилых зданий, в которой рассматриваются две основные функции по обслуживанию жилищного фонда — плановый профилактический осмотр и ремонт технических объектов, а также устранение внезапно возникших неисправностей технического оборудования, в частности аварийных.

В качестве модели рассматривается одноканальная система массового обслуживания с переывами и задержками. Перерывы возникают, когда нет экстренных вызовов и они предназначены для выполнения плановых профилактических работ. Задержка перед перерывом учитывает время, необходимое для подготовки этих работ. При некоторых дополнительных предположениях (экспоненциальное распределение времени задержки и времени обслуживания экстренного вызова) получены основные операционные характеристики системы, определяющие качество ее работы, а также границы изменения параметров, при которых система справляется с работой с позиции того или иного критерия.

Ключевые слова: система обслуживания, плановый ремонт, внезапные отказы, задержка, перерыв.

Актуальность работы и ее цель

Техническая эксплуатация здания состоит из технического обслуживания, системы ремонтов, санитарного содержания (см., например, [1–6]).

ANALYSIS OF THE ORGANIZATION OF OPERATION OF ENGINEERING SYSTEMS OF RESIDENTIAL BUILDINGS BASED ON A QUEUING MODEL WITH INTERRUPTIONS AND CLOSE-DOWNS

Afanasiev G.A.
Candidate of Economic Sciences, Associate Professor, Department of Housing and Communal Complex, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow; e-mail: AfanasievGA@mgsu.ru

Manuscript received: 26.10.2020. **Revised**: 28.10.2020. **Accepted**: 30.11.2020. **Published online:** 30.12.2020. ©RIOR

Abstract. In recent years has been increasing interest for application of probabilistic methods, in particular queueing theory for estimation of activities of managing companies of residential buildings. Maintenance of residential buildings is a set of measures that ensure the highest reliability of all elements and systems of a building. The main element of the technical operation of residential buildings is a system of scheduled prophylactic inspections and repairs. However even with its rational organization, there is always a positive probability of failure of building elements, which depends not only on the aging factors of the structure. The goal of the managing company is, on the one hand, to prevent the formation of a too long queue of emergency calls, and on the other, to complete all planned prophylactic maintenance work.

As a mathematical model we consider a single-server queue with vacations and close-down periods. The service team can start a scheduled preventive repair only when all request for sudden mailfunctions are satisfied.

This period we call vacation. There is a close-down period before vacation. This time period is required for preparation and organization of the prophylactic and inspection work.

Based on the methods of the queuing theory, the system's characteristics that determine the quality of its work, as well as the boundaries of the change of parameters at which the system copes with the work from the standpoint of a particular criterion are defined.

Keywords: queueing system, scheduled prophylactic inspection, residential building, vacation, close-down period.

Основным элементом технической эксплуатации жилых зданий является система планово-предупредительных осмотров и ремонтов. Но даже при их рациональной организации всегда имеется положительная вероятность отказа элементов здания, которая зависит не только от факторов старения конструкции. Отказ может быть вызван случайными обстоятельствами, например, недопустимым повышением давления в системах отопления, холодного и горячего водоснабжения и др.

Таким образом, можно выделить две основные функции по техническому обслуживанию жилищного фонда:

- работы по проверке состояния жилых зданий, профилактическому техническому обслуживанию и ремонтным работам;
- работы по устранению аварийных ситуаций и удовлетворению заявок жильцов на устранение различных неисправностей. Мы будем называть эти работы и соответствующие вызовы экстренными.

Цель управляющей компании (УК), с одной стороны — не допускать образования слишком большой очереди из экстренных вызовов, а с другой — выполнить все планируемые работы по профилактическому техническому обслуживанию.

В последние годы наблюдается повышенный интерес к применению вероятностных методов, в частности, теории массового обслуживания, к оценке эффективности деятельности управляющих компаний при организации эксплуатации технических систем жилых зданий (см., например, [1; 4–9]). С одной стороны, приложения способствовали развитию самой теории массового обслуживания. Появился новый класс систем с перерывами и задержками (в западной литературе — *vacations* и *close-down periods*, или *time out* [10–16]). С другой стороны, использование более сложных моделей позволяет проводить детальное исследование организационной деятельности УК, а в некоторых случилось давать оптимальные рекомендации.

Новизна предложенной модели в первую очередь состоит в том, что в течение перерыва могут поступить требования и их поток произволен. Это позволяет рассмотреть ситуации, когда УК в течение планового ремонта может организовать обслуживание экстренных вызовов тем или иным способом. Тем самым возникает задача оптимального управления потоком экстренных запросов в течение перерыва.

Постановка проблемы

Предположим, что управляющая компания (УК) жилищно-коммунального хозяйства (ЖКХ) имеет одну или несколько бригад специалистов по обеспечению функционирования технического оборудования (теплоснабжению, водоснабжению, вентиляции и т.д.) жилых зданий. У этих бригад две основные задачи — устранение внезапно возникающих поломок оборудования и проведение профилактических осмотров и ремонтных работ с целью обеспечения необходимого уровня надежности соответствующих технических систем.

Решение указанных задач начинается со сбора и обработки статистических данных, позволяющих получить оценки параметров, определяющих функционирование системы. В качестве этих параметров выступают: λ^{-1} — среднее время между последовательными моментами возникновения внезапных поломок оборудования; μ^{-1} — среднее время ремонта при таких поломках; γ^{-1} — среднее время профилактического осмотра и ремонта.

Мы предполагаем, что бригада может приступить к такому осмотру, когда нет заявок на экстренный ремонт оборудования. Задача УК выработать такой план профилактических осмотров, при котором, с одной стороны, за определенное время T будет осмотрено и восстановлено необходимое число объектов N, а с другой, среднее число заявок на ремонт внезапно возникших поломок не превосходит заданный уровень δ_1. Как будет показано далее, эта задача может быть невыполнима при некоторых значениях λ, μ , γ. В такой ситуации УК должна принять организационные решения, например, увеличить количество специалистов. Наш анализ будет опираться на методы теории массового обслуживания. Для простоты в этой статье предполагается, что в УК одна бригада, т.е. в системе один прибор. Переход к многоканальному случаю не имеет принципиальных препятствий, но технически достаточно сложен. Это будет сделано в следующих работах.

Описание модели

Новизна предлагаемой в данной статье модели в том, что перед началом профилактических работ (в моделях — это перерывы) бригада должна потратить некоторое время на их подготовку (в модели — это задержка), что приводит к существенному усложнению модели.

Мы делаем следующие предположения:

- поток вызовов на срочный ремонт — пуассоновский с параметром λ. Назовем эти вызовы, заявками первого типа;
- времена ремонта экстренных поломок — независимые величины с параметром ν и средним $b = \nu^{-1}$;
- в момент, когда бригада (или прибор) освобождается от обслуживания заявок первого типа, начинается период случайной задержки ζ, распределение которой экспоненциально с параметром α. Если за время задержки поступает экстренный вызов, то она обрывается и начинается его обслуживание.

В противном случае после задержки начинается перерыв η, т.е. профилактический ремонт. Его продолжительность — случайная величина с функцией распределения $F(x)$ и преобразованием Лапласа — Стильтеса $f(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dF(x)$.

В течение перерыва в обслуживании в систему продолжают поступать требования, но они не обслуживаются, а образуют очередь. При этом поток поступлений Y может отличаться от X, поскольку нетерпеливые клиенты могут уходить из системы или некоторые клиенты направляются на обслуживание в другие центры.

После завершения перерыва есть две возможности. Первая — система остается свободной, т.е. $Y(\eta) = 0$. Тогда начинается новая задержка. Вторая — в систему за время перерыва поступили требования. Тогда начинается обслуживание, так что система функционирует в стандартном режиме вплоть до момента освобождения прибора, когда начинается новая задержка, и т.д. Будем обозначать описанную систему S и пусть $q(t)$ — число требований в ней (т.е. экстренных вызовов) в момент t.

Определим функции

$$V(z,t)=Ez^{Y(t)}\mathbb{I}(\eta>t)=\sum_{j=0}^{\infty}z^jP(Y(t)=j,\eta>t); \quad (1)$$

$$G(z,s)=Ez^{Y(\eta)}e^{-s\eta};$$

$$C(z)=Ez^{Y(\eta)}=G(z,0)=\sum_{j=0}^{\infty}c_jz^j; \qquad (1)$$

$$(|z|\le 1,\ Re\, s\ge 0).$$

Обозначим $Y(\eta)$ — число экстренных вызовов, поступивших за перерыв η.

Условие 1. $EY(\eta) < \infty, E\eta < \infty$, $\rho = \lambda b < 1$.

Из теории массового обслуживания. Легко следует, что при условии 1 существует

$$P(z)=\lim_{x\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}z^jP(q(t)=j)=Ez^{q(t)};$$
$$P(1)=1,\ |z|\le 1. \qquad (2)$$

Далее E — символ математического ожидания.

Наша ближайшая цель — найти $P(z)$.

Теорема 1. Если выполнено условие 1, то

$$P(z)=\frac{1}{E\tau}\int_0^\infty V(z,t)dt+ +\left(1-\frac{\bar\eta}{E\tau}\right)\cdot\frac{1-\rho}{1-\rho z}\cdot\frac{1+\frac{\alpha}{\nu}z\frac{1-C(z)}{1-z}}{1+\frac{\alpha}{\nu}Y_1}, \qquad (3)$$

где $V(z, t)$, $C(z)$ — определены в (1), $Y_1 = EY(\eta)$, $\bar\eta = E\eta$.

$$E\tau=\alpha^{-1}\left(1+\alpha\bar\eta+\frac{1}{\nu-\lambda}\cdot(\alpha Y_1+\lambda)\right). \qquad (4)$$

Доказательство опирается на теорему Колмогорова — Прохорова [18; 19], предельные теоремы для регенерирующих процессов [17; 19] и ряд довольно сложных оценок, поэтому здесь опускается.

Приведем два примера.

Пример 1. Распределение длительности перерыва в обслуживании экспоненциальное с параметром μ, а процесс поступлений требований в течение перерыва $Y(t)$ — пуассоновский с параметром λ. Тогда как нетрудно проверить,

$$\int_0^\infty V(z,t)dt=\frac{1}{\mu+\lambda(1-z)},\ \frac{1-C(z)}{1-z}=\frac{1}{\mu+\lambda(1-z)},$$
$$E\tau=\frac{\alpha+\mu}{\alpha\mu(1-\rho)}. \qquad (5)$$

Из (3) находим

$$P(z)=\frac{1-\rho}{1-\rho z}\frac{\mu}{\alpha+\mu}\left(1+\frac{\alpha}{\mu+\lambda(1-z)}\right). \quad (6)$$

При $\alpha = 0$ получаем систему $M|M|1$ без перерывов и из (6) имеем $P(z)=\frac{1-\rho}{1-\rho z}$, что совпадает с известным результатом [15]. При $\alpha=\infty$ имеем систему без задержек. Из (13) находим $P(z)=\frac{\mu}{\mu+\lambda-\lambda z}\frac{1-\rho}{1-\rho z}$. Это также хорошо известный результат (см., например, [10]).

Пример 2. Рассмотрим модель примера 1 в предположении, что все требования в течение перерыва в обслуживании поступают в его конце. С учетом того, что $Y_1=\frac{\lambda}{\mu}$, а $\widehat{P}(z)=1V(z,t)=$ $=P(\eta>t)=e^{-\mu t}$. Используя (3), находим

$$P(z)=\frac{1-\rho}{1-\rho z}\left(1-\frac{\alpha\rho z}{\alpha+\mu}\left(1-\frac{\mu}{\mu+\lambda(1-z)}\right)\right). \quad (7)$$

Теперь, опираясь на формулы (3) и (4), найдем математическое ожидание Eq числа требований в системе в стационарном режиме.

Следствие 1. Если $Y_2 = EY^2(\eta)<\infty$ и $\rho<1$, то математическое ожидание числа требований в системе Eq в стационарном режиме конечно и определяется соотношением

$$Eq=\left(1-\frac{\bar{\eta}}{E\tau}\right)\frac{(1+\rho)Y_1+(1-\rho)Y_2+2\frac{\nu}{\alpha}\rho}{2(1-\rho)\left(\frac{\nu}{\alpha}+Y_1\right)}+ \quad (8)$$
$$+\frac{1}{E\tau}\int_0^\infty EY(\eta)\mathbb{I}(\eta\ge t)dt.$$

Доказательство. Для существования Eq нам достаточно доказать , что

$$\int_0^\infty \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=1} dt<\infty \quad \text{и} \quad \left.\left(\frac{1-C(z)}{1-z}\right)'\right|_{z=1}<\infty.$$

Первое неравенство следует из неравенства Коши — Буняковского, поскольку

$$\int_0^\infty \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=1} dt<\infty=\int_0^\infty EY(t)\mathbb{I}(\eta\ge t)dt\le$$
$$\le\int_0^\infty EY(\eta)\mathbb{I}(\eta\ge t)dt\le\sqrt{EY^2(\eta)}\int_0^\infty P(\eta\ge t)dt=$$
$$=\sqrt{Y_2}E\eta<\infty.$$

Для второго неравенства, положив

$$d(z)=\frac{1-C(z)}{1-z},$$

имеем $d(1) = Y_1$, $d'(1)=\frac{1}{2}(Y_2-Y_1)<\infty$.

Далее несложные вычисления приводят к формуле (8).

Вернемся к примерам 1 и 2. Дифференцируя соответственно (7) и (8), находим, что:

- в примере 1

$$Eq_1=\frac{\rho}{1-\rho}+\frac{\alpha\lambda}{\mu(\alpha+\mu)}; \quad (9)$$

- в примере 2

$$Eq_2=\frac{\rho}{1-\rho}+\frac{\rho\alpha\lambda}{\mu(\alpha+\mu)}; \quad (10)$$

так что $Eq_2 < Eq_1$, что и следовало ожидать.

6. Приложение к организации эксплуатации инженерных систем жилых зданий

Предположим, что УК, имея две главные задачи: устранение аварийных ситуаций и проведение профилактических осмотров и ремонтов. При этом накладываются ограничения на среднее число ожидающих экстренных вызовов и выполнение плана по профилактическим работам.

Обозначим $\bar{n}(T)$ среднее число проведенных инспекций и осмотров, прошедших за время T. Заданы некоторые числа $\delta>0$ и γ, и требуется, чтобы выполнялись неравенства

$$q\le\delta,\ \bar{n}(T)\ge\gamma T. \quad (11)$$

Рассмотрение проблемы начинается со сбора статистических данных, что позволит получить статистические оценки $\widehat{\lambda}, \widehat{\alpha}, \widehat{\mu}, \widehat{\nu}, \widehat{Y_1}$ для соответствующих параметров, определяющих функционирование системы.

Затем по формуле (8) находится оценка $\hat{q}$ для числа ожидающих экстренных вызовов. Если окажется, что $\hat{q} \le \delta$, то первое из условий выполнено.

Что касается $\bar{n}(T)$, введем понятие цикла — это время между началами двух последовательных перерывов. Очевидно, что за цикл бывает ровно один перерыв, в каждый из которых проводится профилактика, так что $\bar{n}(T)$ — это математическое ожидание числа циклов за время T.

Как следует из теории восстановления [15], при большом T имеет место асимптотика

$$n(T) = \frac{T}{E\tau}\left(1 + o(1)\right),$$

где $E\tau$ — средняя длительность цикла, что вместе с (11) приводит к условию

$$E\tau \le \gamma^{-1}. \qquad (12)$$

Предложенный подход позволяет выяснить, при каких значениях параметров требуемые условия выполняются.

Заключение

Мы рассмотрели простейшую модель, предположив, что имеется всего одна рабочая бригада. Это ограничение может быть снято двумя путями. Если есть m бригад, мы получаем m-канальную систему массового обслуживания, анализ которой весьма сложен и формулы для оценки характеристик удается получить лишь при $m = 2$. При этом формулы весьма громоздки.

Другой подход состоит в разделении всего множества обслуживаемых объектов на m подмножеств, так что j-я бригада занимается техническим обслуживанием объектов из j-го множества $j = 1, 2, ..., m$. Тогда мы имеем T одноканальных систем и можем использовать результаты, полученные в данной статье.

Литература

1. Техническая эксплуатация зданий и инженерных систем [Текст]: учебник / под ред. Е.А. Король. — М.: Изд-во МИСИ-МГСУ, 2020. — 116 с.
2. *Нотенко С.Н.* Техническая эксплуатация зданий [Текст]: учебник / С.Н. Нотенко [и др.]; под ред. В.И. Римшина и А.М. Стражникова. — М.: Высшая школа, 2008. — С. 272–287.
3. *Кузни П.Я.* Управление технической эксплуатацией зданий и сооружений [Текст]: учебник / П.Я. Кузни, В.П. Мищенко, С.А. Мищенко. — М.: ИНФРА-М, 2017.
4. *Рощина С.М.* Техническая эксплуатация зданий и сооружений [Текст] / С.М. Рощина, М.В. Лукин, М.С. Лисятников, П.С. Темахова. — М., 2018. — 232 с.
5. *Дементьева М.Е.* Особенности эксплуатации канализационно-насосных станций теплоэлектростанций в условиях Крайнего Севера [Текст] / М.Е. Дементьева, А.А. Курохтин // Вестник МГСУ. — 2019. — Т. 14. — № 3. — С. 356–366.
6. *Король О.А.* Технологии пролонгации межремонтных сроков отдельных инженерных систем после капитального ремонта жилищного фонда [Текст] / О.А. Король, С.Ю. Бакрунова, М.Ю. Мажирин // Строительство и архитектура. — 2020. — Т. 8. — № 3. — С. 79–82.
7. *Король Е.А.* Особенности расчета расхода топливно-энергетических ресурсов при реализации проектов реновации в городе Москве [Текст] / Е.А. Король, А.Г. Дудина // Недвижимость: экономика, управление. — 2018. — № 4. — С. 84–88.
8. *Столбов К.В.* Статистические методы контроля качества строительных работ [Текст] / К.В. Столбов. — М.: Стройиздат. 1982. 87 с.
9. *Спаркие Б.П.* Оптимальные расчеты и контрольные значения случайных параметров как средство оптимизации надежности. Проблемы надежности в строительном проектировании [Текст] / Б.П. Спаркие. — Свердловск, 1972. — С. 202–206.
10. *Dement'eva M.* Factors of quality reduction of exploitation of pitched roofs width a cold attic in conditions of dense urban development. MATEC Web Conferences, 106. 02019. 2017.
11. *Oliver C.* Ibe M|G|1 Vacation Queueing Systems with sever Timeout // American Journal of Operations Research. 2015. No. 5. Pp. 77–88.
12. *Zhisheng Niu, Tao Shu, Yoshitaka Takahashi.* A vacation queue with setup and close-down times and batch Markovian arrival processes // Performance Evaluation. 2003. No. 54. Pp. 225–248.
13. *Andreas Frey, Yoshitaka Takashi.* An M^X/GI/N queue with close-down and vacation times // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. 1999. No. 12:1. Pp. 63–83.
14. *Afanasyev G.A., Shreiber K.A.* Scheduling prophylactic maintenance of engineering systems of residential buildings, 2019 J. Phys.: Conf. Ser. 1425 012045.
15. *Афанасьев Г.А.* Использование теории массового обслуживания для организации эксплуатации инженерных систем жилых зданий [Текст] / Г.А. Афанасьев // Вестник Тверского государственного университета. Серия «Прикладная математика». — 2019. — № 4. — С. 52–64.
16. *Selvaraju N., Goswami C.* Impatient customers in an M|M|1 queue with single ami multiple working vacations. Computers and Industrial Engineering. 2013. № 65 (2). Pp. 207–215.
17. *Servi L.D., Finn S.G.* M|M|1 queues with working vacations M|M|1|WV // Performance Evalution. 2002. № 50 (1). Pp. 41–52.
18. *Саати Т.Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения [Текст] / Т.Л. Саати. — М.: Советское радио, 1971.
19. *Боровков А.А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания [Текст] / А.А. Боровков. — М.: Наука, 1972.
20. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее применения [Текст] / В. Феллер. — Т. 2. — М., 1967.

References

1. *Tehnicheskaja jekspluatacija zdanij i inzhenernyh system* [Technical maintenance of buildings and engineering systems]. Moscow: MISI-MGSU Publ., 2020. 116 p.
2. Notenko S.N., Rimshin B.I., Rojtman A.G. *Tehnicheskaja jekspluatacija zdanij* [Technical maintenance of buildings]. Moscow: Vysshaja shkola Publ. 2008. 639 p.
3. Kuzni P.Ja., Mishhenko V.P., Mishhenko S.A. *Upravlenie tehnicheskoj jekspluataciej zdanij i sooruzhenij* [Management of technical operation of buildings and structures]. Moscow, INFRA-M Publ. 2017.
4. Roshhina S.M., Lukin M.V., Lisjatnikov M.S., Temahova P.S. *Tehnicheskaja jekspluatacija zdanij i sooruzhenij* [Technical maintenance of buildings and structures]. Moscow: 2018. 232 p.
5. Dement'eva M.E., Kurohtin A.A. Osobennosti jekspluatacii kanalizacionno-nasosnyh stancij teplojelektrostancij v uslovijah Krajnego Severa [Features of the operation of sewage pumping stations of thermal power plants in the Far North]. *Vestnik MGSU* [MGSU Bulletin]. 2019, I. 3, V. 14, pp. 356–366.
6. Korol' O.A., Bakrunova S.Ju., Mazhirin M.Ju. Tehnologii prolongacii mezhremontnyh srokov otdel'nyh inzhenernyh sistem posle kapital'nogo remonta zhilishhnogo fonda [Technologies for extending the turnaround time of individual engineering systems after capital repairs of the housing stock]. *Stroitel'stvo i arhitektura* [Construction and architecture]. 2020, I. 3, V. 8, pp. 79–82.
13. Korol E.A., Dudina A.G. Features of the calculation of the consumption of fuel and energy resources in the implementation of renovation projects in the city of Moscow // Real estate: economics, management. 2018. № 4. Pp. 84–88.
7. Stolbov K.V. *Statisticheskie metody kontrolja kachestva stroitel'nyh rabot* [Statistical methods for quality control of construction works]. Moscow: Strojizdat Publ. 1982. 87 p.
8. Sparkie B.P. Optimal'nye raschety i kontrol'nye znachenija sluchajnyh parametrov kak sredstvo optimizacii nadezhnosti [Optimal calculations and control values of random parameters as a means of optimizing reliability]. *Problemy nadezhnosti v stroitel'nom proektirovanii* [Reliability problems in construction design]. Sverdlovsk, 1972, pp. 202–206.
9. Dement'eva M. Factors of quality reduction of exploitation of pitched roofs width a cold attic in conditions of dense urban development. MATES Web Conferences, 106. 02019. 2017.
10. Oliver S. Ibe M|G|1 Vacation Queueing Systems with sever Timeout. American Journal of Operations Research, 2015, 5, 77–88.
11. Zhisheng Niu, Tao Shu, Yoshitaka Takahashi. A vacation queue with setup and close-down times and batch Markovian arrival processes, Performance Evaluation, 2003, 54, 225–248.
12. Andreas Frey, Yoshitaka Takashi An M^X/GI/N queue with close-down and vacation times, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 1999, 12:1, 63–83.
13. G.A. Afanasyev and K.A. Shreiber Scheduling prophylactic maintenance of engineering systems of residential buildinas, 2019 J. Phys.: Conf. Ser. 1425 012045.
14. Afanas'ev G.A. Ispol'zovanie teorii massovogo obsluzhivanija dlja organizacii jekspluatacii inzhenernyh sistem zhilyh zdanij [The use of queuing theory for organizing the operation of engineering systems of residential buildings]. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Prikladnaja matematika* [Bulletin of Tver State University. Series: Applied Mathematics]. 2019, I. 4, pp. 52–64.
15. Selvaraju N., Goswami C. Impatient customers in an M|M|1 queue with single ami multiple working vacations. Computers and Industrial Engineering, 2013. I. 65 (2), pp. 207–215.
16. Servi L.D., Finn S.G. M|M|1 queues with working vacations M|M|1|WV. Performance Evalution, 2002, I. 50 (1), pp. 41–52.
17. Saati T.L. *Elementy teorii massovogo obsluzhivanija i ee prilozhenija* [Elements of queuing theory and its applications]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1971.
18. Borovkov A.A. *Verojatnostnye processy v teorii massovogo obsluzhivanija* [Probabilistic processes in queuing theory]. Moscow, Nauka Publ., 1972.
19. Feller V. *Vvedenie v teoriju verojatnostej i ee primenenija* [Introduction to the theory of probability and its applications]. Moscow, 1967, V. 2.

* Эта работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 20-01-00-487.