

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАИБОЛЬШИХ ВКЛАДОВ
В ТЕХНИКЕ ИНВЕРСИИ МАГНИТОГРАММ**

**APPLYING THE METHOD OF MAXIMUM CONTRIBUTIONS
TO THE MAGNETOGRAM INVERSION TECHNIQUE**

Ю.В. Пенских*Институт солнечно-земной физики СО РАН,
Иркутск, Россия, penskikh@iszf.irk.ru***Yu.V. Pensikh***Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS,
Irkutsk, Russia, penskikh@iszf.irk.ru*

Аннотация. Основы созданного Гауссом сферического гармонического анализа (СГА) геомагнитного поля приобрели классическую форму Чепмена—Шмидта в первой половине XX в. В отечественной геомагнитологии метод СГА активно развивался в ИЗМИРАНе, а с началом космической эры — и в ИСЗФ СО РАН, где со временем СГА стал основой комплексного метода ТИМ (техники инверсии магнитограмм). СГА решает обратную задачу теории потенциала, в которой рассчитываются источники поля геомагнитных вариаций (ПГВ) — внутренние и внешние электрические токи. В алгоритме СГА формируется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), включающая $3K$ уравнений (три компоненты вариаций геомагнитного поля, K — число наземных магнитных станций). Малые изменения левой и/или правой частей такой СЛАУ могут привести к значительному изменению неизвестных переменных. Как следствие, два последовательных момента времени с практически одинаковыми значениями ПГВ аппроксимируются значительно отличающимися коэффициентами СГА, что противоречит и логике, и реальным наблюдениям геомагнитного поля. Неустраиваемая погрешность магнитометров, как и различные методики определения ПГВ на магнитных станциях мировой сети, приводят также к неустойчивости решения СЛАУ. Для оптимального решения этой задачи около полувека назад в ИСЗФ СО РАН был разработан метод наибольших вкладов (МНВ) (Method of maximum contribution, MMC). В данной работе изложены основы этого оригинального метода, а также предложен ряд его модификаций, повышающих точность и/или скорость решения СЛАУ. Показано преимущество МНВ перед другими популярными методами, особенно для Южного полушария Земли.

Ключевые слова: эквивалентная токовая функция, техника инверсии магнитограмм, сферический гармонический анализ, система линейных алгебраических уравнений.

Abstract. Fundamentals of the spherical harmonic analysis (SHA) of the geomagnetic field were created by Gauss. They acquired the classical Chapman—Schmidt form in the first half of the XXth century. The SHA method was actively developed for domestic geomagnetology by IZMIRAN, and then, since the start of the space age, by ISTP SB RAS, where SHA became the basis for a comprehensive method of MIT (magnetogram inversion technique). SHA solves the inverse problem of potential theory and calculates sources of geomagnetic field variations (GFV) — internal and external electric currents. The SHA algorithm forms a system of linear equations (SLE), which consists of $3K$ equations (three components of the geomagnetic field, K is the number of ground magnetic stations). Small changes in the left and (or) right side of such SLE can lead to a significant change in unknown variables. As a result, two consecutive instants of time with almost identical GFV are approximated by significantly different SHA coefficients. This contradicts both logic and real observations of the geomagnetic field. The inherent error of magnetometers, as well as the method for determining GFV, also entails the instability of SLE solution. To solve such SLEs optimally, the method of maximum contribution (MMC) was developed at ISTP SB RAS half a century ago. This paper presents basics of the original method and proposes a number of its modifications that increase the accuracy and (or) speed of solving the SLEs. The advantage of MMC over other popular methods is shown, especially for the Southern Hemisphere of Earth.

Keywords: equivalent current function, magnetogram inversion technique, spherical harmonic analysis, system of linear equations.

ВВЕДЕНИЕ

Сферические гармонические функции были впервые использованы для аналитического представления магнитного поля Земли почти два века назад [Gauss, 1839]. Созданный Карлом Гауссом сферический гармонический анализ (СГА) получил

развитие в классических работах [Schuster, Lamb, 1889; Schmidt, 1935; Chapman, Bartels, 1940] и стал в дальнейшем основным методом как для разработки моделей главного магнитного поля, так и для расчета внутренних и внешних источников (эквивалентных токов) спокойных геомагнитных вариаций (суточных и сезонных) в средних и низких широтах в рамках

двумерной ионосферной динамо-теории [Бенькова, 1941; Fougere, 1963; Мишин, 1976; Яновский, 1978; Haines, Torta, 1994; Backus et al., 1996; Manda, Korte, 2010; Olsen et al., 2010].

В ИСЗФ СО РАН метод СГА для переменного геомагнитного поля в динамо-области, а главное — в высокоширотной области полярной ионосферы, стал активно развиваться под руководством В.М. Мишина с момента основания Института в 1960 г. [Мишин, Базаржапов, 1966; Базаржапов и др., 1966, 1979; Шпынев и др., 1974; Мишин, 1976; Мишин и др., 1982, 1984; Ширапов и др., 2000]. В настоящее время СГА остается основным блоком программного комплекса техники инверсии магнитограмм (ТИМ) [Базаржапов и др., 1979; Mishin, 1990; Ширапов, Мишин, 2009] — оригинального метода, позволяющего рассчитывать ионосферные источники (электрические поля и токи) наземных геомагнитных вариаций по данным их измерений на мировой сети магнитных станций.

Методом СГА решается обратная задача теории потенциала для квазистационарного гармонического геомагнитного поля в приземном слое непроводящей атмосферы [Chapman, Bartels, 1940; Яновский, 1978]. Из уравнения Лапласа для скалярного магнитного потенциала и свойства потенциальности геомагнитного поля следует система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которая в ТИМ [Базаржапов и др., 1979] имеет вид

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} = X, \\ \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n (g_n^m \sin m\lambda - h_n^m \cos m\lambda) \frac{m P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} = Y, \\ \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^n (j_n^m \cos m\lambda + k_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta) = Z, \end{cases} \quad (1)$$

где X, Y, Z — компоненты вариаций геомагнитного поля в дипольной системе координат, измеренные на станциях-магнитометрах; θ — дипольная коширота; λ — местное геомагнитное время;

$$g_n^m = E_n^m + I_n^m; \quad h_n^m = e_n^m + i_n^m; \quad j_n^m = nE_n^m - (n+1)I_n^m; \\ k_n^m = ne_n^m - (n+1)i_n^m; \quad E_n^m, e_n^m, I_n^m, i_n^m — сфериче-$$

ские коэффициенты; $P_n^m(\cos \theta)$ и $\frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta}$ —

присоединенные полиномы Лежандра степени n и порядка m , заданные в нормировке Шмидта, и их производные [Schmidt, 1935].

В системе (1) количество столбцов равно количеству неизвестных и зависит от N , а количество строк равно $3K$, где K — количество наземных магнитометров. С одной стороны, при выборе N необходимо учитывать K так, чтобы количество неизвестных не превышало количество уравнений. С другой стороны, при использовании лишь части первых столбцов, отсекается остальная часть спектра, которая в общем случае могла бы лучше аппроксимировать исходное поле, заданное на неоднородной сети. Таким образом, возникает задача выбора из ряда сферических функций такого конечного подмноже-

ства, которое с приемлемой точностью аппроксимирует ПГВ — задача выбора оптимального спектра аппроксимирующих функций.

По полученным для системы (1) коэффициентам СГА рассчитывается внешняя и внутренняя токовые функции, ответственные за ПГВ, наблюдаемое на поверхности Земли. Формула расчета внешней эквивалентной токовой функции по коэффициентам СГА $J(\theta, \lambda)$ имеет вид [Chapman, Bartels, 1940; Базаржапов и др., 1979; Haines, Torta, 1994]

$$J(\theta, \lambda) = -\frac{R_E}{\mu_0} \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{n+1} \left(\frac{r}{R_E} \right)^n \times \\ \times \sum_{m=0}^n (E_n^m \cos m\lambda + e_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta), \quad (2)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная; $r = R_E + h$; $R_E = 6371$ км — радиус Земли; $h = 115$ км — приведенная высота токнесущего слоя ионосферы.

В программном комплексе ТИМ сферические коэффициенты системы (1) и внешняя эквивалентная токовая функция (2) составляют основу расчетов пространственных распределений важнейших электродинамических параметров полярной ионосферы и магнитосферы в двух полушариях (границы авроральных овалов, интегральные проводимости, горизонтальные электрические поля и токи, продольные токи (ПТ) и другие параметры) [Базаржапов и др., 1979; Mishin, 1990; Лунюшкин, Пенских, 2019].

Количество строк системы (1) зависит от числа работающих станций-магнитометров, а количество столбцов — от используемого спектра степени n и порядка m [Базаржапов и др., 1966; Мишин и др., 1984]. Таким образом, система может быть как переопределенной, так и недоопределенной. При $m=0$ появляются нулевые столбцы, а для Y -компоненты в системе (1) также появляются нулевые подстроки. В случае плохой обусловленности системы малые изменения X -, Y -, Z -компонент приводят к значительным изменениям искомым коэффициентов [Тихонов, Арсенин, 1979]. Как следствие, источники поля геомагнитных вариаций (ПГВ) для двух последовательных моментов времени с практически одинаковыми вариациями аппроксимируются значительно отличающимися коэффициентами, что противоречит и логике, и реальным наблюдениям. Наличие неизбежной погрешности магнитометров, измеряющих магнитное поле Земли, а также выбор способа определения уровня отсчета ПГВ [Gjerloev, 2012] влекут также неустойчивость решения СЛАУ (1) [Мишин и др., 1982]. Существует ряд методов решения систем линейных уравнений [Фаддеев, Фаддеева, 1963]. С учетом особенностей глобальных распределений магнитных данных в ТИМ для решения СЛАУ был разработан метод наибольших вкладов (МНВ), который показал высокую надежность и эффективность [Шпынев и др., 1974; Базаржапов и др., 1979]. МНВ работает на основе мгновенных данных ПГВ, заданных на неоднородно распределенной сети наземных магнитометров. Это усложняет решение обратной задачи [Sneeuw, 1994], но позволяет получить 1-минутные мгновенные экви-

валентные токовые функции без всяких усреднений по времени. Большинство других существующих методов СГА в отличие от МНВ требуют однородного распределения исходных данных на сфере [Barraclough, 1978].

Наземные магнитометры сосредоточены преимущественно в Северном полушарии, поэтому несколько десятков лет задача ТИМ с помощью МНВ успешно решалась только для одного полушария. Благодаря проекту SuperMAG увеличилось количество доступных данных мировых наземных магнитометров, включая Южное полушарие [Gjerloev, 2012]. Это сделало возможным проведение расчетов не только для Северного, но и для Южного полушария, а также послужило одной из причин создания нового программного комплекса ТИМ.

Цели настоящей работы: описать современное состояние МНВ как одного из важных элементов ТИМ, с помощью которого уже получены первые непротиворечащие научные результаты для двух полушарий Земли одновременно [Lunyushkin et al., 2019]; провести специальное сравнение МНВ с двумя другими популярными методами, применяемыми для решения систем уравнений аналогичных геофизических задач.

1. ОСНОВЫ МЕТОДА НАИБОЛЬШИХ ВКЛАДОВ

В случае однородной сети исходных данных ПГВ раскладывается по системе ортогональных сферических функций, которую можно рассматривать как систему ортогональных векторов, т. е. ортогональный базис. В случае неоднородной сети система векторов является неортогональной.

В матричном виде СЛАУ выражается уравнением:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (3)$$

где \mathbf{A} — матрица коэффициентов, \mathbf{b} — вектор-столбец свободных членов, \mathbf{x} — вектор-столбец неизвестных. В общем случае матрица \mathbf{A} может быть неквадратной.

Введем обозначения: $C = \cos(m\lambda)$, $S = \sin(m\lambda)$. Для наглядности используем одну станцию-магнитометр и зафиксируем n и m , тогда СЛАУ (1) можно представить в виде (3), где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} C \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} & S \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} & C \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} & S \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \\ S \frac{mP_n^m}{\sin \theta} & -C \frac{mP_n^m}{\sin \theta} & S \frac{mP_n^m}{\sin \theta} & -C \frac{mP_n^m}{\sin \theta} \\ CnP_n^m & SnP_n^m & -C(n+1)P_n^m & -S(n+1)P_n^m \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} E_n^m \\ e_n^m \\ I_n^m \\ i_n^m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}.$$

Если количество пунктов наблюдений равно K , система (1) будет состоять из $3K$ таких подсистем. При увеличении n и m увеличивается количество столбцов матрицы \mathbf{A} , а также количество строк мат-

рицы \mathbf{x} . Таким образом, в общем случае система (1) может оказаться как недоопределенной, так и переопределенной. Путем выполнения последовательных итераций МНВ позволяет получить приближенное решение такой системы независимо от ее размерности.

Рассмотрим основные моменты метода наибольших вкладов на упрощенном примере СЛАУ с двумя уравнениями и двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Матрицу можно рассматривать как совокупность столбцов или совокупность строк [Беклемишев, 1998]. Если разбить матрицу \mathbf{A} на отдельные вектор-столбцы, то СЛАУ можно представить в виде

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Эту систему можно представить в виде

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}, \quad (4)$$

где $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{21})$, $\mathbf{a}_2 = (a_{12}, a_{22})$ — новые базисные векторы в двумерном пространстве, x_1, x_2 — скаляры при базисных векторах, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ — вектор-результат, который получается путем сложения двух базисных векторов, умноженных на соответствующие скаляры. Векторы \mathbf{b} , \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 заданы в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

Таким образом, решение СЛАУ равносильно разложению заданного вектора \mathbf{b} по заданному базису $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, т. е. поиску такого вектора \mathbf{x} , компоненты которого являются координатами вектора \mathbf{b} в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$.

Уравнение (4) можно представить в виде

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2. \quad (5)$$

Таким образом, из (4) следует: (b_1, b_2) — координаты вектора \mathbf{b} в исходном ортонормированном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$; (x_1, x_2) — координаты вектора \mathbf{b} в новом базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$; $(a_{11}, a_{21}), (a_{12}, a_{22})$ — координаты векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$.

Из курса линейной алгебры известно, что для разложения вектора по новому базису необходимо решить СЛАУ [Беклемишев, 1998]. Однако можно поставить обратную задачу — решить СЛАУ путем разложения вектора в новом базисе.

Обозначим $proj_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$ скалярную проекцию вектора на вектор, $\mathbf{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$ — векторную проекцию вектора на вектор.

$$proj_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|},$$

$$\mathbf{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a},$$

где $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ — скалярное произведение векторов \mathbf{b} и \mathbf{a} , $\|\mathbf{a}\|$ — евклидова норма вектора \mathbf{a} . Величина $\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$ отражает длину проекции в единицах длин вектора \mathbf{e} (исходного базисного вектора).

Величина $\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$ отражает длину проекции в единицах длин вектора \mathbf{a} (нового базисного вектора).

Очевидно, что $\|\mathbf{b} - \text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{b}\|$.

Рассмотрим задачу поиска приближенного решения СЛАУ. Такая задача возникает в случае отсутствия точного решения, плохой обусловленности СЛАУ, лимита времени на решение СЛАУ, необходимости нахождения переменных, оказывающих наибольшее влияние на решение СЛАУ и др. Именно такая задача и стоит в ТИМ: необходимо выбрать из матрицы \mathbf{A} такие столбцы, такой спектр аппроксимирующих функций, который наилучшим образом аппроксимировал ПГВ.

Решение СЛАУ (3) можно найти путем последовательного вычитания из вектора \mathbf{b} его проекций на базисные вектора, которые содержит матрица \mathbf{A} . Однако для обеспечения наиболее быстрой сходимости следует вычитать ту проекцию, которая максимально уменьшит норму. Для этого необходимо вычитать проекцию не на произвольный вектор, а на тот, модуль проекции на который максимален, поскольку, чем больше вычитаемая проекция, тем меньше невязка. Следуя данному принципу на каждом этапе, получаем следующий алгоритм решения СЛАУ (3):

1. $t = 0, \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}, \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$
2. do
 - (a) $m = \text{argmax}(\|\text{proj}_{\mathbf{a}_j} \mathbf{b}\|)$
 - (b) $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t + \frac{\text{proj}_{\mathbf{a}_m} \mathbf{b}_t}{\|\mathbf{a}_m\|} \mathbf{e}_m$
 - (c) $\mathbf{b}_{t+1} = \mathbf{b}_t - \text{proj}_{\mathbf{a}_m} \mathbf{b}_t$
 - (d) $t = t + 1$
3. while ($t < \text{MAX}_T$)
and ($\|\mathbf{b}_t\| > \text{NORM}$)

Здесь t — номер итерации; m — номер базисного вектора-столбца, на который будет осуществляться проекция; \mathbf{b}_t — вектор невязки на t -й итерации; \mathbf{x}_t — вектор корней СЛАУ на t -й итерации; MAX_T — максимально допустимое количество итераций; NORM — норма, при которой решение должно быть остановлено.

Максимальная проекция вектора на базисный вектор определяется в виде

$$\text{maxProj} = \max(\|\text{proj}_{\mathbf{a}_j} \mathbf{b}\|),$$

$$m = \text{argmax}(\|\text{proj}_{\mathbf{a}_j} \mathbf{b}\|),$$

где $\text{argmax}()$ — функция, возвращающая индекс максимального элемента в массиве; $\text{max}()$ — функция, возвращающая значение максимального элемента в массиве.

В качестве аргумента функции в $\text{argmax}()$ и $\text{max}()$ передается массив модулей проекций \mathbf{b} на каждый \mathbf{a}_j -й базисный вектор.

На первой итерации алгоритма вектор \mathbf{x} содержит только нулевые элементы, к окончанию алгоритма вектор \mathbf{x} содержит как нулевые, так и ненулевые элементы. Базисные векторы матрицы \mathbf{A} при ненулевых элементах вектора \mathbf{x} составляют резуль-

тирующий базис, поскольку базисные векторы при нулевых элементах вектора \mathbf{x} в формировании вектора \mathbf{b} фактически не участвуют.

В результате работы описанного алгоритма определяется такое подмножество базисных векторов матрицы \mathbf{A} , которое оптимальным образом аппроксимирует вектор \mathbf{b} . В системе уравнений (1) ТИМ матрица \mathbf{A} содержит сферические функции, а вектор \mathbf{b} — ПГВ, заданное на неоднородной либо однородной сети магнитных станций. Таким образом, суть МНВ состоит в аппроксимации поля (в нашем случае ПГВ) с помощью оптимального подмножества сферических гармоник.

2. ПАРАМЕТР РЕЛАКСАЦИИ В МЕТОДЕ НАИБОЛЬШИХ ВКЛАДОВ

Выше указывалось на необходимость вычитания максимальной проекции, но в ряде случаев не получается выделить одну такую проекцию — пример дан на рис. 1. Модули проекций на базисные векторы в данном примере одинаковые, выбирается первая из максимальных проекций.

На крайнем упрощенном примере решения СЛАУ

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 3/7 \end{bmatrix}$$

видно (рис. 2), что при вычитании всей проекции ($\xi = 1.0$) решение сходится неравномерно, и, если прервать решение по истечении лимита на количество итераций, окажется, что $x_1 \neq x_2$. Для более равномерной сходимости на каждой итерации можно вычитать не всю проекцию, а ее часть ($\xi \neq 1.0$).

Покажем справедливость такого подхода. Рассмотрим произвольный вектор \mathbf{v} как сумму двух векторов

$$\mathbf{v} = \xi \mathbf{v} + (1 - \xi) \mathbf{v} \tag{6}$$

где $0 < \xi \leq 1$.

Рассмотрим пункт (c) алгоритма:

$$\mathbf{b}_{t+1} = \mathbf{b}_t - \text{proj}_{\mathbf{a}_m} \mathbf{b}_t$$

Поскольку $\text{proj}_{\mathbf{a}_m} \mathbf{b}_t$ является вектором, то, используя (6), получим

$$\mathbf{b}_{t+1} = \mathbf{b}_t - \xi \text{proj}_{\mathbf{a}_m} \mathbf{b}_t - (1 - \xi) \text{proj}_{\mathbf{a}_m} \mathbf{b}_t,$$

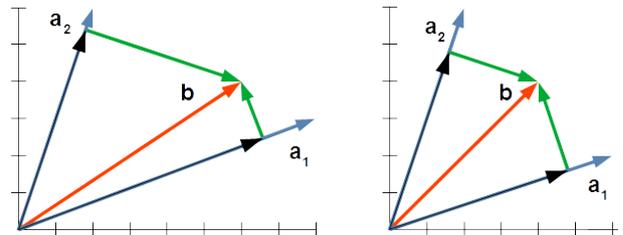


Рис. 1. Выбор базисного вектора с максимальной проекцией. Слева — простой выбор, максимальная проекция вектора \mathbf{b} будет на вектор \mathbf{a}_1 , справа — неоднозначный выбор, поскольку проекции вектора \mathbf{b} на векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ одинаковы по модулю; \mathbf{b} (красный) — исходный вектор; $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ (синие) — базисные векторы, на которые производится проекция; черные — проекции вектора \mathbf{b} на векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ соответственно

$$\mathbf{b}_{t+1} + (1-\xi)\text{proj}_{\mathbf{a}_m} \mathbf{b}_t = \mathbf{b}_t - \xi \text{proj}_{\mathbf{a}_m} \mathbf{b}_t.$$

Таким образом, в процессе решения вычитается не вся проекция, а ее часть (рис. 2). Часть проекции остается в векторе невязки. Тем не менее, невязка по-прежнему будет снижаться на каждой итерации. Легко заметить (рис. 2, 3), что невязка будет устойчиво снижаться при значениях $0 < \xi < 2$.

Тогда пункты (b), (c) алгоритма можно переписать в виде

$$(b) \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t + \xi \frac{\text{proj}_{\mathbf{a}_m} \mathbf{b}_t}{\|\mathbf{a}_m\|} \mathbf{e}_m,$$

$$(c) \mathbf{b}_{t+1} = \mathbf{b}_t - \xi \text{proj}_{\mathbf{a}_m} \mathbf{b}_t.$$

Алгоритм с вышеизложенными изменениями применительно к задаче ТИМ является оригинальным МНВ. В исходном коде ранее созданной оригинальной программы МНВ был задан постоянный параметр $\xi=0.7$. Кроме того, в качестве дополнительного критерия остановки алгоритма оценивается не только норма невязки, но и изменение нормы невязки. В основе МНВ лежит неполная релаксация по длине вектора невязки [Фаддеев, Фаддеева, 1963].

Стоит отметить, что введение параметра ξ при решении СЛАУ с ортогональным базисом приведет лишь к увеличению количества итераций. Использование параметра $0 < \xi \leq 1$ может быть оправданным в случае неортогонального и/или избыточного базиса. В таком случае у других базисных векторов повышается шанс оказаться в итоговом базисе. Использование параметра $1 < \xi < 2$ может быть оправданным при решении плохо обусловленных СЛАУ. Параметр релаксации $\xi \neq 1.0$ может уменьшить количество итераций, достаточных для решения СЛАУ. Стоит учесть, что слишком малые значения ξ , наоборот, приведут к увеличению количества итераций. Влияние параметра ξ можно сравнить с коэффициентом обучения, который определяет длину шага в методе градиентного спуска, $\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t - \xi \nabla F$.

Алгоритмами поиска оптимального значения коэффициента обучения занимаются многие ученые, однако эта задача до сих пор окончательно не решена. Коэффициент обучения в методе градиентного спуска и параметр релаксации в МНВ имеют схожий математический смысл, поэтому для МНВ можно использовать уже известные способы оптимизации сходимости [Jacobs, 1988].

Рассмотрим пункты (b), (c) алгоритма. Математически на любой итерации должно выполняться равенство

$$\mathbf{b}_{t+1} \equiv \mathbf{b}_0 - \mathbf{A}\mathbf{x}_{t+1}. \tag{7}$$

Однако выполнение пункта (c) из-за вычислительных погрешностей, обусловленных арифметикой с плавающей запятой [Goldberg, 1991], приводит к нарушению равенства (7), что может дать значительные ошибки округления при большом количестве итераций. Эту проблему можно разрешить двумя способами.

Первый способ — замена пункта (c) и явный пересчет невязки на каждой итерации:

$$\mathbf{b}_{t+1} = \mathbf{b}_0 - \mathbf{A}\mathbf{x}_{t+1}. \tag{8}$$

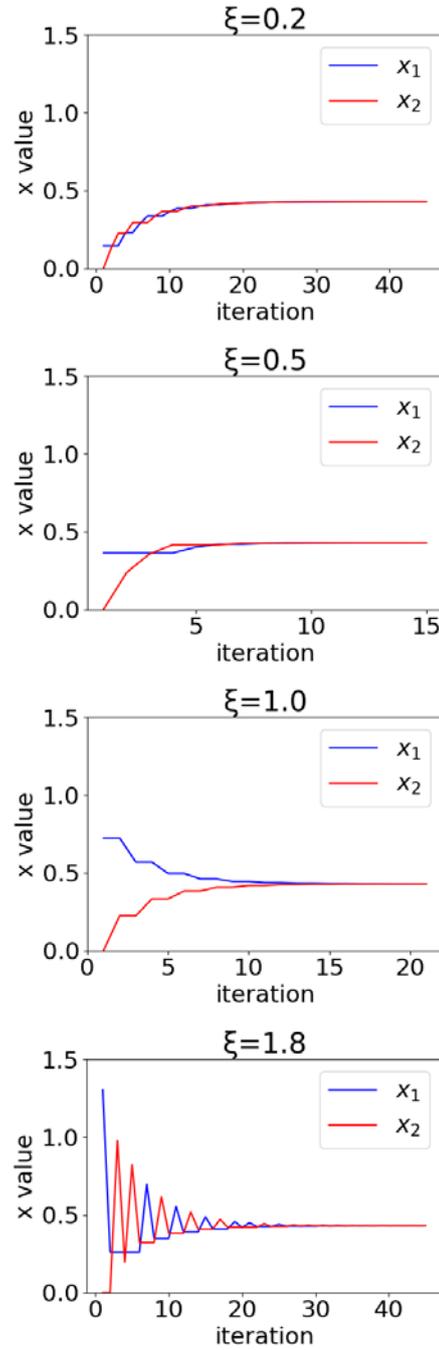


Рис. 2. Ход решения при различных параметрах релаксации. Ось абсцисс — номер итерации, ось ординат — значение переменной, синий — переменная x_1 , красный — переменная x_2

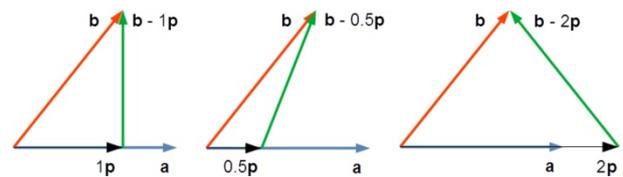


Рис. 3. Слева ($\xi=1.0$) — вычитание проекции вектора; в центре ($\xi=0.5$) — вычитание половины проекции вектора; справа ($\xi=2.0$) — вычитание двух проекций вектора: \mathbf{b} (красный) — исходный вектор, \mathbf{a} (синий) — вектор, на который производится проекция; $\xi \mathbf{p}$ (черный) — проекция вектора на вектор, умноженная на соответствующий параметр релаксации; зеленый — отклонение от проекции вектора на вектор, умноженной на соответствующий параметр релаксации

Второй способ — использование алгоритмов компенсирующего сложения [Kahan, 1965; Klein, 2006].

Стоит отметить, что оба способа повышают численную устойчивость метода, но снижают скорость его работы. Формулы (7), (8) показаны для $\xi=1$, но, очевидно, что их легко модифицировать и для других значений ξ .

3. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ТЕХНИКЕ ИНВЕРСИИ МАГНИТОГРАММ

Для решения неопределенных СЛАУ существуют различные методы, каждый из которых имеет свои достоинства и недостатки. Наиболее известным и часто используемым является метод наименьших квадратов (МНК) (ordinary least squares, OLS), который широко используется и в геофизике [Rangarajan, Rao, 1975; Weimer, 1995].

Решение СЛАУ с помощью МНК можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{A}^T \mathbf{Ax} &= \mathbf{A}^T \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \end{aligned}$$

В ТИМ матрица $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ является плохо обусловленной (число обусловленности $\sim 10^{20}$), поэтому математически точное решение СЛАУ является неверным, следовательно, необходимо найти менее точное, но более стабильное решение. Для этого при решении СЛАУ дополнительно к МНК используем стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGStab), поскольку он позволяет прервать вычисление на любой итерации, не дожидаясь точного решения.

Другой популярный в геофизике метод решения неопределенных СЛАУ основан на сингулярном разложении матрицы \mathbf{A} (singular value decomposition, SVD) [Pulkkinen et al., 2003]. В этом методе рассчитывается псевдообратная матрица \mathbf{A}^+ , по которой находится решение СЛАУ.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T, \\ \mathbf{A}^+ &= \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^+ \mathbf{U}^T, \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^+ \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Выполнение одной итерации BiCGStab изменяет все элементы вектора \mathbf{x} , поэтому выделить отдельные столбцы (оптимальный спектр) не удается. Это относится и к SVD — в матрице \mathbf{A} не будет нулевых столбцов, даже если занулить все сингулярные числа кроме первого. Следовательно, не будет и нулевых значений координат вектора \mathbf{x} . Таким образом, SVD и BiCGStab не позволяют выбрать подмножество столбцов СЛАУ (оптимальный спектр аппроксимации), как это делает МНВ.

Сравним методы решения обратной задачи на примере хорошо изученной изолированной суббури 27.08.2001 [Mishin et al., 2017]. Решим систему (1)

методом МНВ и двумя вышеуказанными методами для момента 03:55 UT предварительной фазы указанной суббури. Поскольку на подготовительной фазе суббури имеет место плавное усиление стационарной магнитосферной конвекции, эквивалентный ток Холла (аналог ионосферной конвекции) [Лунюшкин, Пенских, 2019] должен отражать классическую ровную двухвихревую систему магнитосферно-ионосферной конвекции.

На рис. 4 представлены эквивалентные токовые функции для Северного и Южного полушарий, рассчитанные для выбранного события тремя разными методами. Видно, что в Северном полушарии все методы в целом дают схожие по структуре эквивалентные токовые функции, но в приполюсной области методы МНК и SVD показывают мелкошабные изменения двухвихревой системы конвекции. В Южном полушарии ожидаемую (симметричную) двухвихревую систему ионосферной конвекции удалось получить только с помощью МНВ.

Одной из характеристик токовой функции является трансполярный ток, отражающий интенсивность ионосферной конвекции через полярную шапку [Базаржапов и др., 1979; Lunyushkin et al., 2019]. В таблице на основе рис. 4 для каждого метода представлены значения токовой функции в двух основных фокусах, трансполярный ток, а также межполушарное соотношение трансполярных токов.

Магнитосферные и авроральные суббури происходят в двух полушариях одновременно [Akasofu, 1977]. Двухвихревая система ионосферных токов, величина ПГВ для двух полушарий в целом должны быть одинаковы, поскольку они в равной степени зависят как от внешних параметров солнечного ветра и ММП, так и от внутренних магнитосферных процессов. На межполушарную асимметрию в первую очередь влияет угол наклона геомагнитного диполя. При большом угле одно из полушарий оказывается более освещенным Солнцем, что увеличивает проводимость ионосферы и, как следствие, ионосферный ток.

Угол наклона диполя для 27.08.2001 03:55 UT равен 0.24° , поэтому освещенность и создаваемая ею волновая проводимость в Северном и Южном полушариях в дипольной системе координат практически одинаковы. Следовательно, эквивалентные токовые функции и трансполярный ток Северного и Южного полушарий также должны быть практически одинаковы. Как видно из таблицы, это условие выполняется для МНВ, но не выполняется для двух других методов. Эквивалентные токовые функции двух полушарий, полученные с помощью МНВ, в целом являются подобными, а отношение трансполярных токов составляет 0.94, т. е. близко к 1. Напротив, для двух других методов эквивалентные токовые функции Северного и Южного полушарий значительно отличаются друг от друга, а трансполярный ток Северного полушария превышает трансполярный ток Южного полушария более чем в два раза.

Из-за близкого к нулю угла наклона диполя должно также наблюдаться межполушарное подобие продольных токов и их границ. На рис. 5 представлены продольные токи при однородной проводимости с границами, полученными автоматическим

Сравнение трансполярных токов двух полушарий

	North, kA			South, kA			$I_{tr,N}/I_{tr,S}$
	min	max	I_{tr}	min	max	I_{tr}	
MMC	-90	170	260	-109	168	277	0.94
OLS+BiCGStab	-122	168	290	-56	58	114	2.54
SVD	-95	132	227	-60	43	103	2.20

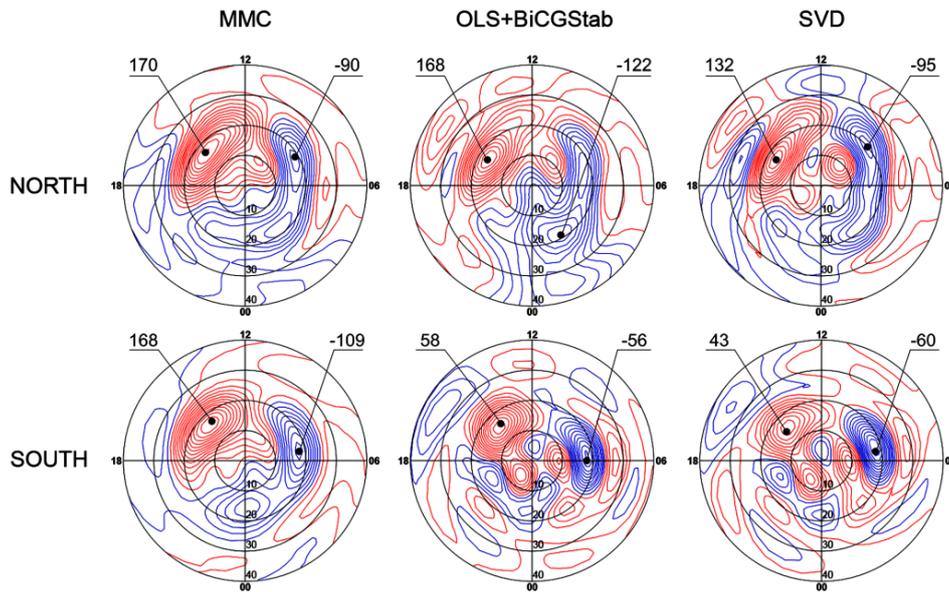


Рис. 4. Сравнение результатов численных методов решения уравнения (1) на примере эквивалентных токовых функций, рассчитанных для момента 03:55 UT изолированной суббури 27.08.2001. Верхний ряд — токовые функции в Северном полушарии, нижний ряд — в Южном. Первый столбец — результаты работы МНВ (MMC — method of maximum contribution), второй — МНК (OLS — ordinary least squares) со стабилизированным методом бисопряженных градиентов (BiCGStab), третий — сингулярного разложения (SVD). Выносными линиями показаны значения токовой функции в главных фокусах (в килоамперах)

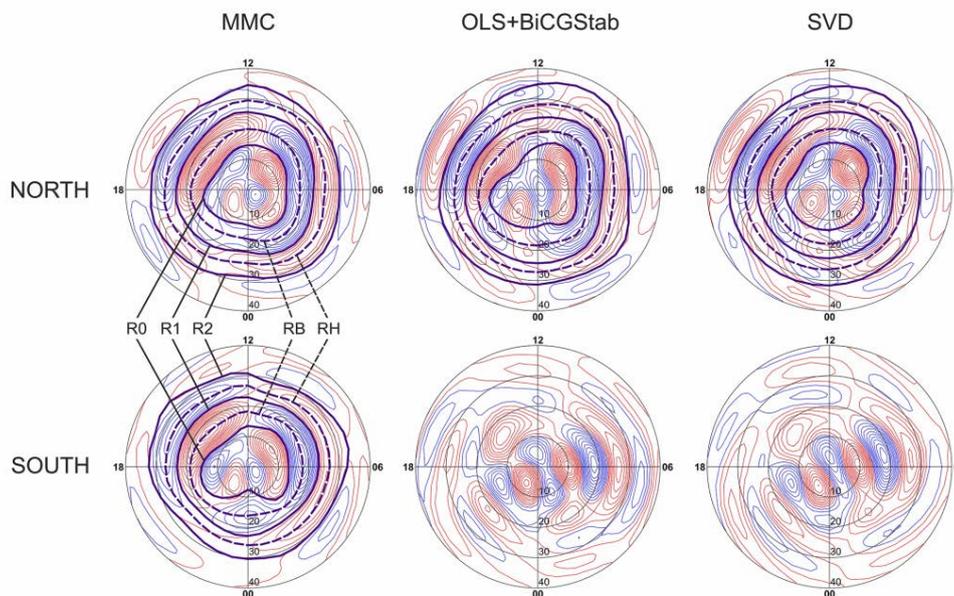


Рис. 5. Сравнение результатов численных методов решения уравнения (1) на примере продольных токов при однородной проводимости, рассчитанных для момента 03:55 UT изолированной суббури 27.08.2001. Верхний ряд — продольные токи в Северном полушарии, нижний ряд — в Южном. Первый столбец — результаты работы МНВ (MMC — method of maximum contribution), второй — МНК (OLS — ordinary least squares) со стабилизированным методом бисопряженных градиентов (BiCGStab), третий — сингулярного разложения (SVD). R0 — граница полярной шапки, RB — граница обращения конвекции (линия максимума продольных токов зоны 1), R1 — граница между зоной 1 и зоной 2 продольных токов, RH — линия максимума продольных токов зоны 2, R2 — экваториальная граница аврорального овала

методом [Лунюшкин, Пенских, 2019]. Продольные токи двух полушарий, полученные с помощью МНВ, в целом являются подобными, подобны также и границы ПТ. Этого не удалось получить методами МНК и SVD, поскольку распределения ПТ Северного и Южного полушарий значительно различаются, а выделить зоны ПТ практически невозможно.

Таким образом, можно сделать вывод, что решение, полученное с помощью МНВ, оказалось лучшим из трех рассмотренных методов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе дано подробное описание оригинального МНВ, используемого в ТИМ. Продемонстрирована работа параметра релаксации ξ в МНВ и показано, что алгоритм стабильно сходится при значении параметра релаксации $0 < \xi < 2$. Влияние параметра релаксации ξ в МНВ имеет сходство с коэффициентом обучения в методах градиентного спуска, что делает возможным применение известных алгоритмов для оптимизации. Предложены модификации оригинального метода МНВ, повышающие точность и/или скорость решения СЛАУ.

Для задачи ТИМ проведено сравнение методов МНВ, OLS+BiCGstab и SVD. МНВ показал наиболее правдоподобный результат, особенно для Южного полушария. Расчеты на основе МНВ также подтверждают ожидаемую межполушарную симметрию эквивалентных токовых функций, трансполлярных токов, распределений продольных токов и их границ.

Автор выражает признательность создателям оригинального метода наибольших вкладов В.М. Мишину, Г.Б. Шпыневу, А.Д. Базаржапову и Д.Ш. Ширавову. Автор благодарит С.Б. Лунюшкина за поставленную задачу и плодотворные дискуссии, а также В.В. Мишина и А.В. Ташчилина — за полезные замечания.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-35-90046.

Организации и сотрудники, которым автор выражает глубокую признательность за возможность использования данных наземных магнитометров: Мировая сеть магнитных обсерваторий ИНТЕРМАГНЕТ; Дж. Дж. Лав (Геологическая служба США, USGS); Я. Манн (CARISMA); CANMOS; К. Юмото и К. Шиокава (база данных S-RAMP); база данных SPIDR; О. Трошичев (AARI); М. Энгебретсон (программа MACCS); отдел геомагнетизма Геологической службы Канады; GIMA; MEASURE, UCLA IGPP и Флоридский технологический институт; Е. Зеста (SAMBA); К. Юмото (Chain 210); Ф. Онари (SAMNET); Э. Тансканен (институты, которые поддерживают сеть магнитометров IMAGE); PENGUIN; М. Коннорс (AUTUMN); Р. Бельке (DTU Space); Л.Дж. Ланцаротти и А.Т. Везервакс (магнитометр МакМердо); ICESTAR; RAPIDMAG; Британская антарктическая служба; Р. Чи (McMac); С. Макмиллан (BGS); Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Пушкова (ИЗМИРАН); Дж. Мацка (GFZ); Б. Хейлиг

(MFGI); Дж. Реда (IGFPAS); М. Велланте (Университет Аквилы); В. Лесур и А. Чембодат (BCMT); М. Костелло (данные получены в сотрудничестве с Австралийским агентством по наукам о Земле); Дж.В. Гьерлоев (SuperMAG). Данные, использованные в настоящем исследовании, доступны на сайте SuperMAG [<http://supermag.jhuapl.edu>].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Базаржапов А.Д., Мишин В.М., Немцова Э.И., Платонов М.Л. Способ аналитического представления «мгновенных» полей магнитных вариаций // Геомагнитные исследования. 1966. № 8. С. 5–22.
- Базаржапов А.Д., Матвеев М.И., Мишин В.М. Геомагнитные вариации и бури. Новосибирск: Наука, 1979. 248 с.
- Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. 7-е изд. М.: Высшая школа, 1998. 320 с.
- Бенькова Н.П. Спокойные солнечно-суточные вариации земного магнетизма. Л.: Гидрометеиздат, 1941. 76 с.
- Лунюшкин С.Б., Пенских Ю.В. Диагностика границ аврорального овала на основе техники инверсии магнитограмм // Солнечно-земная физика. 2019. Т. 5, № 2. С. 97–113. DOI: [10.12737/szf-52201913](https://doi.org/10.12737/szf-52201913).
- Мишин В.М. Спокойные геомагнитные вариации и токи в магнитосфере. Новосибирск: Наука, 1976. 208 с.
- Мишин В.М., Базаржапов А.Д. Выбор спектра полиномов Лежандра, аппроксимирующих наблюдаемое Sq-поле // Геомагнитные исследования. 1966. № 8. С. 23–30.
- Мишин В.М., Шпынев Г.Б., Базаржапов А.Д. Непрерывный расчет электрического поля и токов в земной магнитосфере по наземным геомагнитным измерениям // Иссл. по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. 1982. № 58. С. 178–186.
- Мишин В.М., Базаржапов А.Д., Шпынев Г.Б. Математический анализ поля геомагнитных вариаций // Геомагнетизм и аэрономия. 1984. Т. 24, № 1. С. 160–162.
- Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. 2-е изд. М.: Наука, 1979. 284 с.
- Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. 2-е изд., доп. М.: Физматгиз, 1963. 734 с.
- Ширавов Д.Ш., Мишин В.М. Моделирование глобальных электродинамических процессов в геомагнитосфере. Улан-Удэ: ВСТГУ, 2009. 217 с.
- Ширавов Д.Ш., Мишин В.М., Базаржапов А.Д., Сайфудинова Т.И. Улучшенный вариант техники инверсии магнитограмм и его применение к проблеме динамики открытого магнитного потока в хвосте геомагнитосферы // Иссл. по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. 2000. № 111. С. 154–172.
- Шпынев Г.Б., Базаржапов А.Д., Мишин В.М. Выбор оптимального спектра аппроксимирующих функций при аналитическом представлении экспериментальных данных // Иссл. по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. 1974. № 32. С. 60–65.
- Яновский Б.М. Земной магнетизм. Л.: ЛГУ, 1978. 592 с.
- Akasofu S.-I. Physics of Magnetospheric Substorms. Dordrecht, Holland, Springer, 1977. 619 p. DOI: [10.1007/978-94-010-1164-8](https://doi.org/10.1007/978-94-010-1164-8).
- Backus G., Parker R.L., Constable C. Foundations of Geomagnetism. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1996. 369 p.
- Barraclough D.R. Spherical harmonic models of the geomagnetic field // Geomagn. Bull. Inst. Geol. Sci. 1978. V. 8. P. 1–68.
- Chapman S., Bartels J. Geomagnetism. V. I-II. London, Great Britain, Oxford University Press, 1940. 1049 p.
- Fougere P.F. Spherical harmonic analysis: 1. A new method and its verification // J. Geophys. Res. 1963. V. 68, N 4. P. 1131–1139. DOI: [10.1029/JZ068i004p01131](https://doi.org/10.1029/JZ068i004p01131).

Gauss J.C.F. Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus. Resultate aus den Beobachtungen des Magnetischen Verein im Jahre 1838. Leipzig, Göttinger Magnetischer Verein, 1839. P. 119–175.

Gjerloev J.W. The SuperMAG data processing technique // *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2012. V. 117, N A9. P. A09213. DOI: [10.1029/2012ja017683](https://doi.org/10.1029/2012ja017683).

Goldberg D. What every computer scientist should know about floating-point arithmetic // *ACM Computing Surveys.* 1991. V. 23, N 1. P. 5–48. DOI: [10.1145/103162.103163](https://doi.org/10.1145/103162.103163).

Haines G.V., Torta J.M. Determination of equivalent current sources from spherical cap harmonic models of geomagnetic field variations // *Geophys. J. Intern.* 1994. V. 118, N 3. P. 499–514. DOI: [10.1111/j.1365-246X.1994.tb03981.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1994.tb03981.x).

Jacobs R.A. Increased rates of convergence through learning rate adaptation // *Neural Networks.* 1988. V. 1, N 4. P. 295–307. DOI: [10.1016/0893-6080\(88\)90003-2](https://doi.org/10.1016/0893-6080(88)90003-2).

Kahan W. Further remarks on reducing truncation errors // *Communications of the ACM.* 1965. V. 8, N 1. DOI: [10.1145/363707.363723](https://doi.org/10.1145/363707.363723).

Klein A.A. Generalized Kahan-Babuška-Summation-Algorithm // *Computing.* 2006. V. 76. P. 279–293. DOI: [10.1007/s00607-005-0139-x](https://doi.org/10.1007/s00607-005-0139-x).

Lunyushkin S.B., Mishin V.V., Karavaev Y.A., et al. Studying the dynamics of electric currents and polar caps in ionospheres of two hemispheres during the August 17, 2001 geomagnetic storm // *Solar-Terr. Phys.* 2019. V. 5, N 2. P. 15–27. DOI: [10.12737/stp-52201903](https://doi.org/10.12737/stp-52201903).

Mandea M., Korte M. (Eds.). *Geomagnetic Observations and Models*. Dordrecht, Holland, Springer, 2010. 360 p. DOI: [10.1007/978-90-481-9858-0](https://doi.org/10.1007/978-90-481-9858-0).

Mishin V.M. The magnetogram inversion technique and some applications // *Space Sci. Rev.* 1990. V. 53, N 1-2. P. 83–163. DOI: [10.1007/bf00217429](https://doi.org/10.1007/bf00217429).

Mishin V.M., Mishin V.V., Lunyushkin S.B., et al. 27 August 2001 substorm: Preonset phenomena, two main onsets, field-aligned current systems, and plasma flow channels in the ionosphere and in the magnetosphere // *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2017. V. 122, N 5. P. 4988–5007. DOI: [10.1002/2017ja023915](https://doi.org/10.1002/2017ja023915).

Olsen N., Glassmeier K.H., Jia X. Separation of the magnetic field into external and internal parts // *Space Sci. Rev.* 2010. V. 152, N 1-4. P. 135–157. DOI: [10.1007/s11214-009-9563-0](https://doi.org/10.1007/s11214-009-9563-0).

Pulkkinen A., Amm O., Viljanen A., BEAR working group. Separation of the geomagnetic variation field on the ground into external and internal parts using the spherical elementary current system method // *Earth, Planets and Space.* 2003. V. 55, N 3. P. 117–129. DOI: [10.1186/BF03351739](https://doi.org/10.1186/BF03351739).

Rangarajan G.K., Rao D.R.K. A Fortran computer programme for spherical harmonic analysis of geomagnetic field by numerical integration // *Proc. Indian Acad. Sci.* 1975. V. 82, N 6. P. 236–244. DOI: [10.1007/bf03046733](https://doi.org/10.1007/bf03046733).

Schmidt A. Tafeln der Normierten Kugelfunktionen. Gotha, Engelhard-Reyher, 1935. 52 p.

Schuster A., Lamb H. The diurnal variation of terrestrial magnetism // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* 1889. V. 180. P. 467–518. DOI: [10.1098/rsta.1889.0015](https://doi.org/10.1098/rsta.1889.0015).

Sneeuw N. Global spherical harmonic analysis by least-squares and numerical quadrature methods in historical perspective // *Geophys. J. Intern.* 1994. V. 118, N 3. P. 707–716. DOI: [10.1111/j.1365-246X.1994.tb03995.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1994.tb03995.x).

Weimer D.R. Models of high-latitude electric potentials derived with a least error fit of spherical harmonic coefficients // *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 1995. V. 100, N A10. P. 19595–19607. DOI: [10.1029/95ja01755](https://doi.org/10.1029/95ja01755).

REFERENCES

Akasofu S.-I. *Physics of Magnetospheric Substorms*. Dordrecht, Holland, Springer, 1977, 619 p. DOI: [10.1007/978-94-010-1164-8](https://doi.org/10.1007/978-94-010-1164-8).

Backus G., Parker R.L., Constable C. *Foundations of Geomagnetism*. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1996, 369 p.

Barracough D.R. Spherical harmonic models of the geomagnetic field. *Geomagn. Bull. Inst. Geol. Sci.* 1978, vol. 8, pp. 1–68.

Bazarzhapov A.D., Matveev M.I., Mishin V.M. *Geomagnitnye variatsii i buri* [Geomagnetic variations and storms]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1979, 248 p. (In Russian).

Bazarzhapov A.D., Mishin V.M., Nemtsova E.I., Platonov M.L. The method of analytical presentation of “instant” fields of magnetic variations. *Geomagnitnye issledovaniya* [Geomagnetic Res.]. 1966, no. 8, pp. 5–22. (In Russian).

Beklemishev D.V. *Kurs analiticheskoi geometrii i lineinoi algebrы* [Course of Analytic Geometry and Linear Algebra]. Moscow, Vysshaya shkola, 1998, 320 p. (In Russian).

Benkova N.P. *Spokoinye solnechno-sutochnye variatsii zemnogo magnetizma* [Quiet Solar Diurnal Variations of Terrestrial Magnetism]. Leningrad, Hydrometeoizdat, 1941. 76 p. (In Russian).

Chapman S., Bartels J. *Geomagnetism, Vol. I-II*. London, Great Britain, Oxford University Press, 1940, 1049 p.

Faddeev D.K., Faddeeva V.N. *Vychislitel'nye metody lineinoi algebrы* [Computational methods of linear algebra]. 2nd Ed. Moscow, Fizmatgiz, 1963, 734 p. (In Russian).

Fougere P.F. Spherical harmonic analysis: 1. A new method and its verification. *J. Geophys. Res.* 1963, vol. 68, no. 4, pp. 1131–1139. DOI: [10.1029/JZ068i004p01131](https://doi.org/10.1029/JZ068i004p01131).

Gauss J.C.F. *Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus. Resultate aus den Beobachtungen des Magnetischen Verein im Jahre 1838*. Ed. by V.B. Werke, Leipzig, Göttinger Magnetischer Verein, 1839, pp. 119–175.

Gjerloev J.W. The SuperMAG data processing technique. *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2012, vol. 117, no. A9, p. A09213. DOI: [10.1029/2012ja017683](https://doi.org/10.1029/2012ja017683).

Goldberg D. What every computer scientist should know about floating-point arithmetic. *ACM Computing Surveys.* 1991, vol. 23, no. 1, pp. 5–48. DOI: [10.1145/103162.103163](https://doi.org/10.1145/103162.103163).

Haines G.V., Torta J.M. Determination of equivalent current sources from spherical cap harmonic models of geomagnetic field variations. *Geophys. J. Intern.* 1994, vol. 118, no. 3, pp. 499–514. DOI: [10.1111/j.1365-246X.1994.tb03981.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1994.tb03981.x).

Jacobs R.A. Increased rates of convergence through learning rate adaptation. *Neural Networks.* 1988, vol. 1, no. 4, pp. 295–307. DOI: [10.1016/0893-6080\(88\)90003-2](https://doi.org/10.1016/0893-6080(88)90003-2).

Kahan W. Further remarks on reducing truncation errors. *Communications of the ACM.* 1965, vol. 8, no. 1. DOI: [10.1145/363707.363723](https://doi.org/10.1145/363707.363723).

Klein A. A Generalized Kahan-Babuška-Summation-Algorithm. *Computing.* 2006, vol. 76, pp. 279–293. DOI: [10.1007/s00607-005-0139-x](https://doi.org/10.1007/s00607-005-0139-x).

Lunyushkin S.B., Mishin V.V., Karavaev Y.A., Pensikh Y.V., Kapustin V.E. Studying the dynamics of electric currents and polar caps in ionospheres of two hemispheres during the August 17, 2001 geomagnetic storm. *Solar-Terr. Phys.* 2019, vol. 5, no. 2, pp. 15–27. DOI: [10.12737/stp-52201903](https://doi.org/10.12737/stp-52201903).

Lunyushkin S.B., Pensikh Y.V. Diagnostics of the auroral oval boundaries on the basis of the magnetogram inversion technique. *Solar-Terr. Phys.* 2019, vol. 5, no. 2, pp. 88–100. DOI: [10.12737/stp-52201913](https://doi.org/10.12737/stp-52201913).

Mandea M., Korte M. (Eds.). *Geomagnetic Observations and Models*, Dordrecht, Holland, Springer, 2010, 360 p. DOI: [10.1007/978-90-481-9858-0](https://doi.org/10.1007/978-90-481-9858-0).

Mishin V.M. *Spokoinye geomagnitnye variatsii i toki v magnitosfere* [Quiet geomagnetic variations and currents in the magnetosphere]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1976, 208 p. (In Russian).

Mishin V.M. The magnetogram inversion technique and some applications. *Space Sci. Rev.* 1990, vol. 53, no. 1-2, pp. 83–163. DOI: [10.1007/bf00217429](https://doi.org/10.1007/bf00217429).

Mishin V.M., Bazarzhapov A.D. Selection of the spectrum of Legendre polynomials approximating the observed Sq-field. *Geomagnitnye issledovaniya* [Geomagnetic Res.]. 1966, no. 8, pp. 23–30. (In Russian).

Mishin V.M., Shpynev G.B., Bazarshapov A.D. Computation of electric field and currents in the Earth's magnetosphere on a continuous basis by means of ground geomagnetic measurements. *Issledovaniya po geomagnetizmu, aeronomii i fizike Solntsa* [Res. on Geomagnetism, Aeronomy and Solar Phys.]. 1982, no. 58, pp. 178–186. (In Russian).

Mishin V.M., Bazarzhapov A.D., Shpynev G.B. Mathematical analysis of the field of geomagnetic variations. *Geomagnetizm i aeronomiya* [Geomagnetism and Aeronomy]. 1984, vol. 24, no. 1, pp. 160–162. (In Russian).

Mishin V.M., Mishin V.V., Lunyushkin S.B., Wang J.Y., Moiseev A.V. 27 August 2001 substorm: Preonset phenomena, two main onsets, field-aligned current systems, and plasma flow channels in the ionosphere and in the magnetosphere. *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2017, vol. 122, no. 5, pp. 4988–5007. DOI: [10.1002/2017ja023915](https://doi.org/10.1002/2017ja023915).

Olsen N., Glassmeier K.H., Jia X. Separation of the magnetic field into external and internal parts. *Space Sci. Rev.* 2010, vol. 152, no. 1–4, pp. 135–157. DOI: [10.1007/s11214-009-9563-0](https://doi.org/10.1007/s11214-009-9563-0).

Pulkkinen A., Amm O., Viljanen A., BEAR working group. Separation of the geomagnetic variation field on the ground into external and internal parts using the spherical elementary current system method. *Earth, Planets and Space*. 2003, vol. 55, no. 3, pp. 117–129. DOI: [10.1186/BF03351739](https://doi.org/10.1186/BF03351739).

Rangarajan G.K., Rao D.R.K. A Fortran computer programme for spherical harmonic analysis of geomagnetic field by numerical integration. *Proc. Indian Acad. Sci.* 1975, vol. 82, no. 6, pp. 236–244. DOI: [10.1007/bf03046733](https://doi.org/10.1007/bf03046733).

Schmidt A. *Tafeln der Normierten Kugelfunktionen*. Gotha, Engelhard-Reyher, 1935. 52 p.

Schuster A., Lamb H. The diurnal variation of terrestrial magnetism. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*. 1889, vol. 180, pp. 467–518. DOI: [10.1098/rsta.1889.0015](https://doi.org/10.1098/rsta.1889.0015).

Shirapov D.S., Mishin V.M. *Modeling of the global electrodynamic processes in the geomagnetosphere*. Ulan-Ude, East Siberian State Technological University, 2009, 217 p. (In Russian).

Shirapov D.S., Mishin V.M., Bazarshapov A.D., Saifudinova T.I. An improved version of the magnetogram inversion technique, and its application to the problem of the open magnetic flux dynamics in the geomagnetospheric tail. *Issledovaniya po geomagnetizmu, aeronomii i fizike Solntsa* [Res. on Geomagnetism, Aeronomy and Solar Phys.]. 2000, no. 111, pp. 154–172. (In Russian).

Shpynev G.B., Bazarshapov A.D., Mishin V.M. Selection of the optimal spectrum for approximating functions at analytical representation of experimental data. *Issledovaniya po geomagnetizmu, aeronomii i fizike Solntsa* [Res. on Geomagnetism, Aeronomy and Solar Phys.]. 1974, no. 32, pp. 60–65. (In Russian).

Sneeuw N. Global spherical harmonic analysis by least-squares and numerical quadrature methods in historical perspective. *Geophys. J. Intern.* 1994, vol. 118, no. 3, pp. 707–716. DOI: [10.1111/j.1365-246X.1994.tb03995.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1994.tb03995.x).

Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. *Solution methods for incorrect problems*. Moscow, Nauka Publ, 1979, 284 p. (In Russian).

Weimer D.R. Models of high-latitude electric potentials derived with a least error fit of spherical harmonic coefficients. *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 1995, vol. 100, no. A10, pp. 19595–19607. DOI: [10.1029/95ja01755](https://doi.org/10.1029/95ja01755).

Yanovsky B.M. *Zemnoi magnetism* [Terrestrial Magnetism]. Leningrad, 1978, 592 p. (In Russian).

Как цитировать эту статью:

Пенских Ю.В. Применение метода наибольших вкладов в технике инверсии магнитограмм. *Солнечно-земная физика*. 2020. Т. 6, № 4. С. 67–76. DOI: [10.12737/szf-64202009](https://doi.org/10.12737/szf-64202009).