Плоские отражения от кривых

Two-dimensional reflections from curves

Жихарев Л.А.
Ассистент кафедры инженерной графики РТУ МИРЭА
e-mail: Zhabafrog@mail.ru

Zhikharev L. A.
Assistant of the department of engineering graphics of MIREA – Russian Technological University
e-mail: Zhabafrog@mail.ru

Карпова Ю.С.
Студентка РТУ МИРЭА
e-mail: yuliakarpova01@mail.ru

Karpova Y. S.
Student at MIREA
e-mail: yuliakarpova01@mail.ru

Аннотация
Данное исследование посвящено дальнейшей проработке метода отражения точек от кривых, описанного в [6]. Отражения точек от окружности представляют собой замкнутые контуры, асимметрия которых определяется смещением отражаемого объекта относительно центра. Окружность имеет постоянное искривление, т.е. вторая производная по такой кривой неизменна. При отражении же от эллипса, а тем более от параболы и лемнискаты асимметрия отражения выражена более явно. Вторая производная по таким кривым непостоянна и даже меняет знак в определённых точках, что проявляется в отражениях очень явно. Это может позволить применять отражения, в том числе и для анализа кривых, работающих как зеркало. Лемниската, в отличие от всех предыдущих, является кривой четвёртого порядка. В статье рассмотрены особенности отражений точек и одномерных объектов от эллипса, параболы и лемнискаты на плоскости.
Ключевые слова: эллипс, парабола, лемниската, порядок кривых, точки перегиба.

Abstract
This study is devoted to further development of the method of reflection of points from curves described in [6]. Reflections of points from a circle are closed contours whose asymmetry is determined by the offset of the reflected object relative to the center. The circle has a constant curvature, that is, the second derivative of such a curve is unchanged. When reflected from an ellipse, and even more so from a parabola and lemniscuses, the asymmetry of the reflection is more pronounced. The second derivative of such curves is not constant and even changes its sign at certain points, which is very evident in reflections. This can also allow you to use reflections to analyze curves that work as a mirror. The lemniscuses, unlike all the previous ones, is a fourth-order curve. The article considers the features of reflections of points and one-dimensional objects from an ellipse, parabola, and lemniscuses on a plane.
Keywords: ellipse, parabola, lemniscuses, the order of the curves, point of inflection.

Метод отражения от кривой основан на приближении, в соответствии с которым в некоторых точках кривой по касательной к ней располагаются прямые зеркала (рис. 1). Отражения в этих точках от кривого зеркала и от соответствующего прямого зеркала полностью идентичны. Чтобы отразить точку от кривого зеркала необходимо отразить её от всех возможных касательных прямых зеркал. На практике строится несколько отражённых точек, которые за тем интерполируются гладкой кривой для получения приближённого отражения [8, 10].

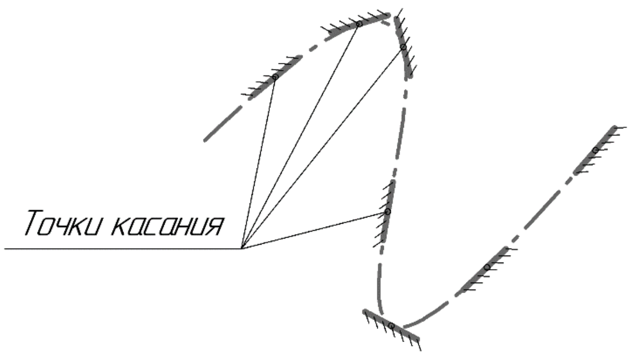

Рис. 1.

Данный метод воплощался с использованием частичной автоматизации построения отражений от кривых зеркал в программе КОМПАС 3D [3]. Отражение точки строится от фиксированных касательных к зеркалу отрезков. При помощи привязки «симметрия» создаётся набор точек, соответствующих точке А. На рис. 2 это соответствие показано отрезками. Отражённые точки соединены сплайном. При перемещении точки А сплайн отражения автоматически перестраивается.

При переходе через зеркало привязки сбиваются, так что модель, представленная на рис. 2, работает только при перемещении А внутри эллипса.

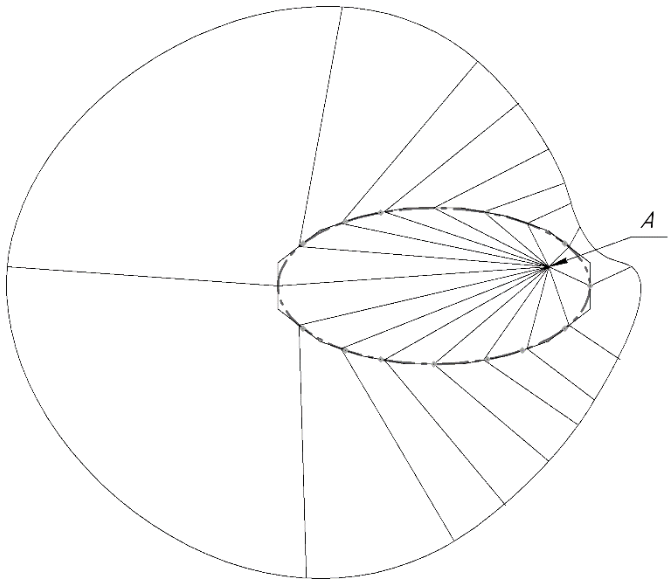

Рис. 2.

Можно выделить 4 типа отражений в зависимости от расположения точки и кривой – точка находится в фокусе зеркала, внутри кривой, на границе и за ее пределами.
Так, наиболее простым построением является отражение точки, расположенной внутри замкнутого зеркала. Устанавливая исходную точку в центре зеркала, получаем изображение, симметричное по осям исходной кривой. Эта симметрия сохраняется при перемещении точки вдоль осей симметрии зеркала. Это видно на примере отражения точки от эллипса: точка в центре (рис. 2, а) смещена по главной оси эллипса, симметрия отражения вдоль которой сохраняется (рис. 2, b) и смещена в произвольном направлении, в этом случае симметрия нарушена (рис. 2, с) [9].

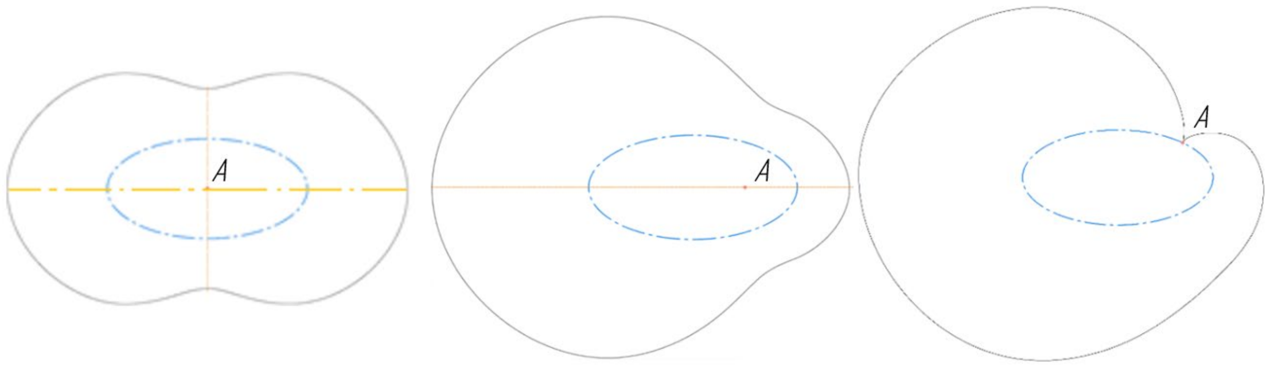

Рис. 3. а – точка в фокусе b – точка на оси c – асимметричная точка

Когда точка занимает положение на зеркале и вне его пределов, появляется такая касательная, при отражении от которой оригинал и изображение совпадают. При переходе через эту точку кривизна отражения изменяет знак, и мы наблюдаем точку перегиба.

Рассмотрим в качестве зеркала параболу. Для незамкнутого симметричного зеркала при отражении точки, расположенной на оси симметрии, справедливо сказанное выше о симметрии отражений относительно этой оси (рис. 4, а).

Вне зависимости от положения точки, мы имеем участок кривой, где угол наклона касательной к это кривой будет приближаться к 90°. Отражение от такой касательной будет асимптотически стремиться к горизонтальной прямой, проходящей через отражаемую точку (рис. 4, б).

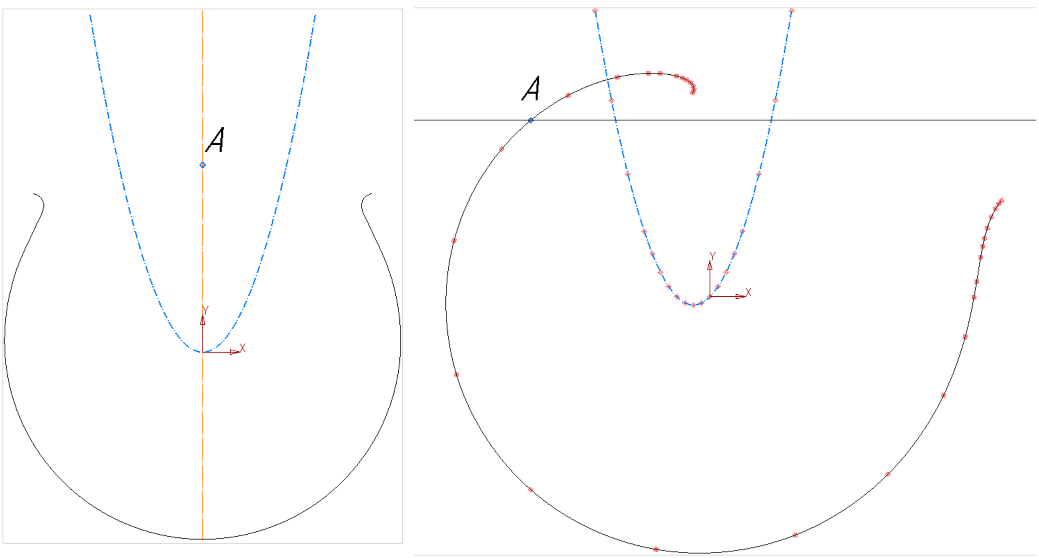

Рис. 4. а – симметричное внутреннее расположение б – асимметричное внешнее

Обратимся к более сложной замкнутой кривой – лемнискате. В раннее рассмотренных кривых наблюдалось полное отражение. Лемниската является двухконтурным зеркалом и помимо отражения от внешнего контура, возникает отражение от внутреннего контура. В данном случае также имеется такая касательная, при отражении от которой оригинал и изображение совпадают, а при переходе через эту точку меняется кривизна отражения (рис. 6).

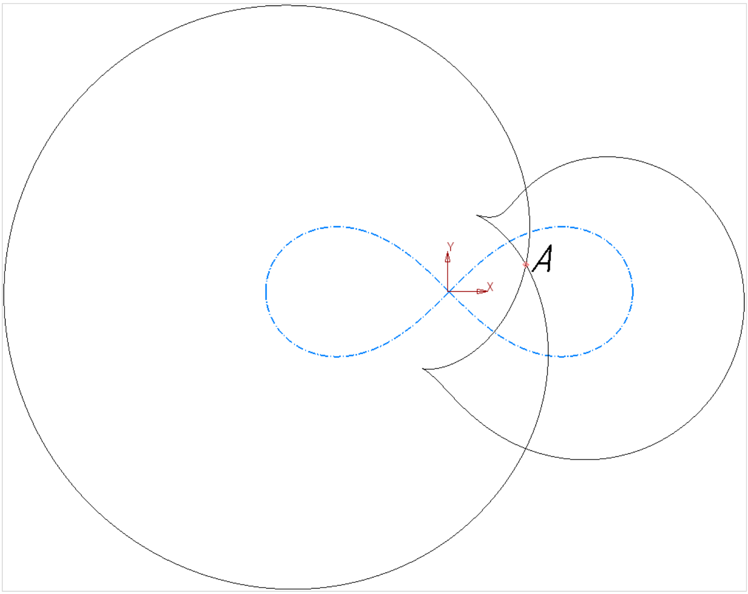

Рис. 4.

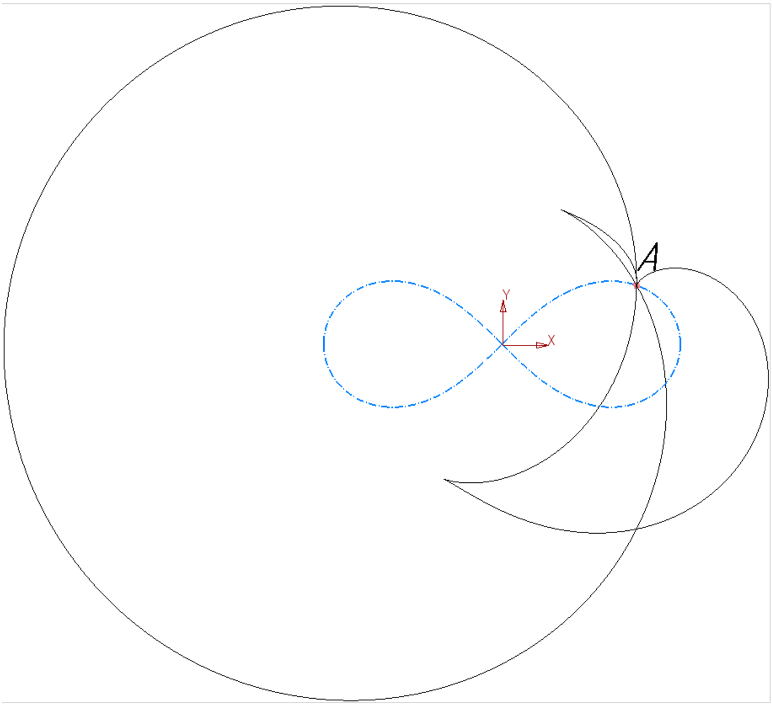

Рис. 6.

Отражения, полученные с использованием эллипса, являются кривыми четвёртого порядка, отражения от параболы – третьего, а от лемнискаты – шестого. Геометрически порядок кривой определяется максимальным количеством точек её пересечения с прямой, однако частные случаи характеризуются наличием мнимых точек, что следует учитывать в конечном ответе [2, 4, 5, 7]. Учитывая, что эллипс и парабола задаются уравнением второго порядка, а лемниската – четвёртого, порядок отражённых кривых не может быть определён простым правилом и требует более детального исследования при помощи приёмов аналитической геометрии [1].

Отражение отрезков можно представить через совокупность отражений каждой точки отрезка от кривого зеркала. В таком случае результатом отражения отрезка от кривого зеркала будет двумерный объект. Можно заметить, что отражение заполняет пространство неравномерно, хотя точки отрезка распределены с одинаковой плотностью (рис. 7, 8).

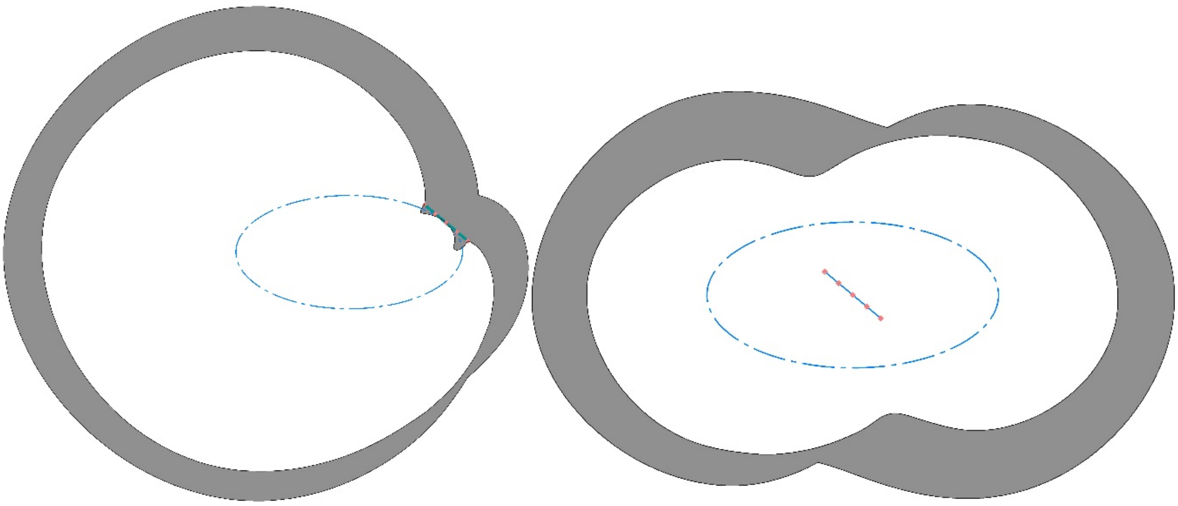

Рис. 7.

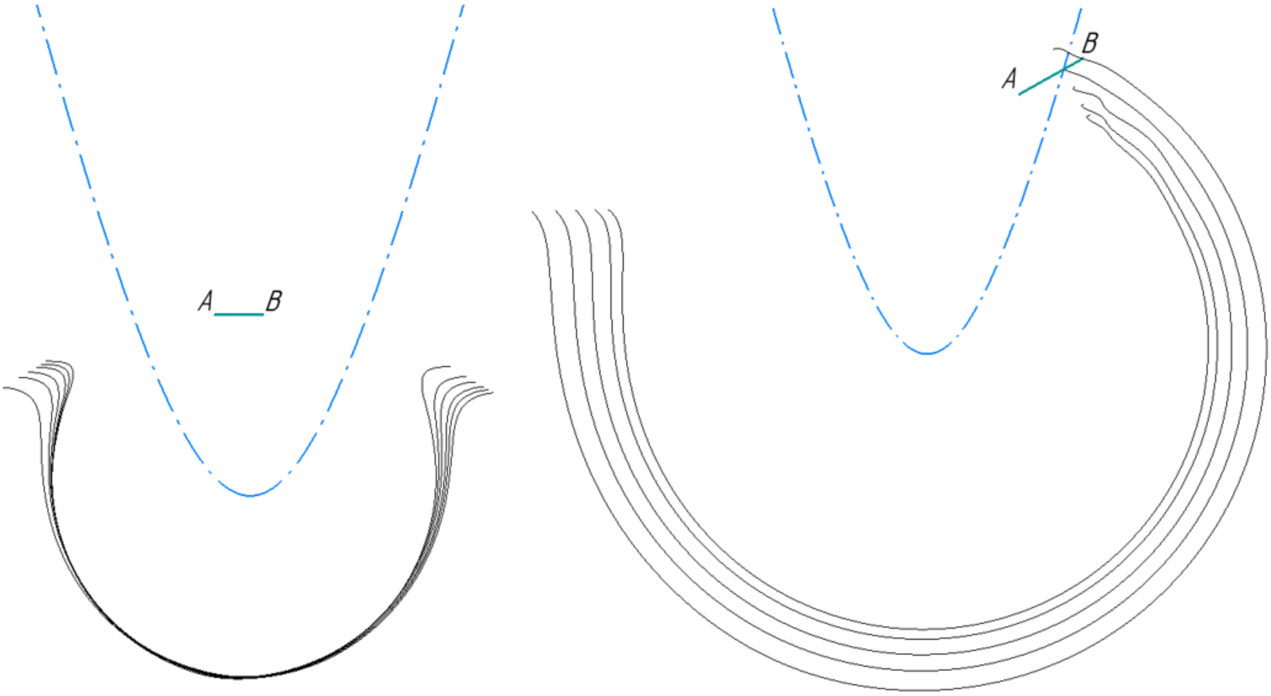

Рис. 8.

Двумерный объект, полученный при отражении отрезка от параболы, также как и в случае отражения точки будет бесконечно простираться вдоль прямой, перпендикулярной оси параболы (рис. 4, б).

Отражение отрезка от лемнискаты представляет собой конечную область причудливой формы (рис. 9).

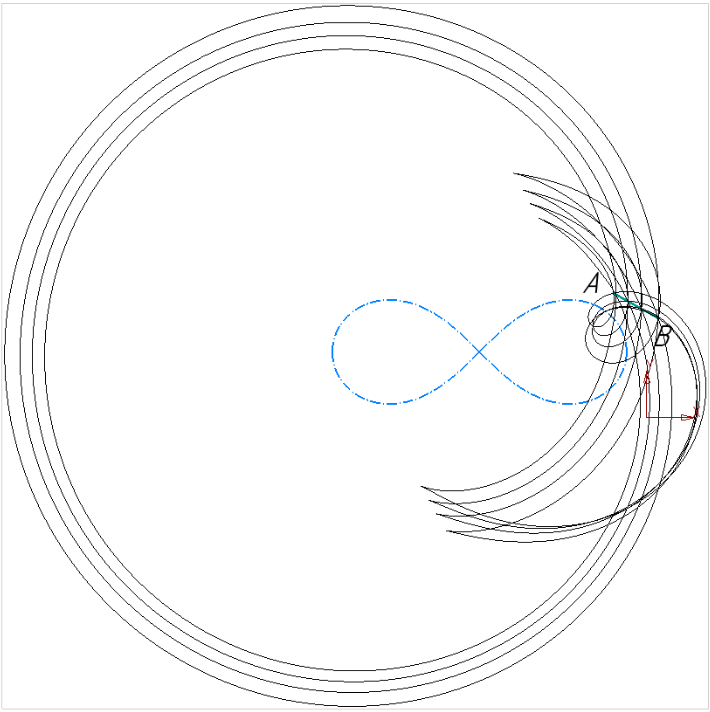

Рис. 9.

Особенностью отражения объектов от кривых является повышение размерности отражения относительно отражаемого объекта. Это можно использовать для задания параметров сложных объектров простым набором данных: геометрическими параметрами кривой, координатами и параметрами отражаемого объекта, но для этого требуется решить обратную задачу построения зеркала и отражаемого объектра по данному отражению. Решение этой задачи требует всестороннего исследования отражений от различных кривых.

Рассмотренные случаи отражения от эллипса, параболы и лемнискаты позволили определить порядок отраженных кривых. Полученные результаты определяют преоритетные направления дальнейших исследований.

Литература

1. *Антонова И.В., Беглов И.А., Соломонова Е.В.* Математическое описание вращения точки вокруг эллиптической оси в некоторых частных случаях // Геометрия и графика. – 2019. – №. 3. – С. 36–50. DOI: 10.12737/article_5dce66dd9fb966.59423840
2. *Волошинов Д.В.* Алгоритмический комплекс для решения задач с квадриками с применением мнимых геометрических образов // Геометрия и графика. – 2020. – №. 2. – С. 3–32. – DOI: 10.12737/2308-4898-2020-3-32
3. *Герасимов А.А.* Автоматизация работы в КОМПАС-График. – БХВ-Петербург, 2010. – С. 585.
4. *Гирш А.Г.* О пользе мнимостей в геометрии // Геометрия и графика. – 2020. – №. 2. – С. 33–40. – DOI: 10.12737/2308-4898-2020-33-40
5. *Гирш А.Г., Короткий В.А.* Мнимые точки в декартовой системе координат // Геометрия и графика. – 2019. – №. 3. – С. 28–35. – DOI: 10.12737/article_5dce651d80b827.498 30821
6. *Жихарев Л.А.* Отражение от криволинейных зеркал в плоскости // Геометрия и графика. – 2019. – №. 1. – С. 46–54. – DOI: 10.12737/article_5c9203adb22641.01479568
7. *Короткий В.А.* Мнимые прямые в декартовой системе координат // Геометрия и графика. – 2019. – №. 4. – С. 5–17. – DOI: 10.12737/2308-4898-2020-5-17
8. *Лысов В.А., Шевченко О.В., Щеголев А.В.* Аппроксимация плоских криволинейных контуров гладкими кривыми на дискретном множестве опорных точек // Научно-технический вестник Поволжья. – 2011. – № 3. – С. 146–150.

9. *Селиверстов А.В.* О симметрии проективных кривых //Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. – 2016. – №. 3. – С. 59–66.
10. *Юрков В.Ю.* Аппроксимация множеств прямых на плоскости // Геометрия и графика. – 2019. – № 3. – С. 60–69. – DOI: 10.12737/article_5dce6cf7ae1d70.85408915