УДК 517.956.35
DOI: 10.12737/article_5a02f9fbca0633.98055214

И.А. Рудаков

# ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ

Получены условия существования одного или счетного числа периодических решений для нелинейного уравнения колебаний балки.

**Ключевые слова:** уравнение колебаний балки, периодические решения, задача Штурма - Лиувилля, принцип Лере - Шаудера, ряд Фурье.

I.A. Rudakov

# I BEAM PERIODIC OSCILLATIONS

The paper reports the consideration of the problem on cyclic solutions of the quasi-linear equation of I beam oscillations with various types of homogeneous boundary conditions. The spectrum of a differential operator is under investigation, an ortho-standardized system of own functions is formed, a lemma on a reverse operator is proved. In theorem 1 there are obtained conditions of periodic solution existence and unicity in case when a non-linear summand satisfies the condition of non-resonance. In theorem 2 the countable number existence of cyclic solutions for the quasi-linear equation of I beam oscillations is proved, if a non-linear summand has a power growth. In the proof of theorems a variation method and Leray-Schauder principle on a fixed point are used.

**Key words**: equation of beam oscillations, periodic solutions, Srurm-Liouville problem, Leray-Schauder principle, Fourier series.

## Введение

Исследуется задача о периодических решениях уравнения колебаний балки:

$$u_{tt} + u_{xxxx} - a u_{xx} = g(x,t,u) + f(x,t),\ 0 < x < \pi,\quad t \in R; \tag{1}$$

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(\pi,t) = u_{xx}(\pi,t) = 0,\quad t \in \mathrm{R}; \tag{2}$$

$$u(x,t+T) = u(x,t),\ \ 0 < x < \pi,\ \ t \in R. \tag{3}$$

Здесь $g(x,t,u), f(x,t)$ есть $T$-периодические по $t$ функции ($T > 0$) и константа $a$ является положительной.

Уравнение (1) является математической моделью колебаний двутавровой балки [1] и продольных колебаний стержней (проводов), способных сопротивляться изгибу и растяжению [2]. Задача (1)-(3) при $a = 0$ изучалась во многих работах (например, статьи [3-6]). В [6] доказано существование счетного числа периодических решений уравнения (1) в случае $a = 0$ при других однородных граничных условиях. При $a \neq 0$ задача (1)-(3) рассмотрена в статье [7] для случая, когда внешняя сила $f$ имеет малую амплитуду. В этой работе доказано существование решений задачи (1)-(3) малой амплитуды. Целью данной статьи является доказательство существования периодических решений задачи (1)-(2), если нелинейное слагаемое растет не быстрее линейной функции либо имеет степенной рост по $u$.

## Свойства дифференциального оператора

Рассмотрим следующую задачу Штурма - Лиувилля:

$$X^{(4)} - a X'' = \lambda X,$$

$$X(0) = X''(0) = X(\pi) = X''(\pi) = 0.$$

Собственными функциями данной задачи являются функции $X_n(x) = \sin(nx)$. Соответствующими им собственными значениями являются числа $\lambda_n = n^4 + an^2$.

Обозначим $\Omega = [0,\pi] \times R \setminus (TZ)$ и рассмотрим полную, ортонормированную в $L_2(\Omega)$ систему функций

$$\left\{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi T}}\sin(n\,x),\frac{2}{\sqrt{\pi T}}\sin(nx)\cos\left(\frac{2\pi}{T}mt\right),\frac{2}{\sqrt{\pi T}}\sin(nx)\sin\left(\frac{2\pi}{T}mt\right)\right\}_{m,n\in N}. \qquad (4)$$

Введем следующие обозначения: $T_0=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi T}}$, $T_m=\frac{2}{\sqrt{\pi T}}$ при $m\in N$,

$$e^c_{nm}=T_m\sin(nx)\cos\left(\frac{2\pi}{T}mt\right), e^s_{nm}=T_m\sin(nx)\sin\left(\frac{2\pi}{T}mt\right),\quad \mu_{nm}=\lambda_n-\left(\frac{2\pi}{T}m\right)^2.$$

Замыкание $L$ дифференциального оператора, соответствующего задаче (1)-(3), можно построить следующим образом. Область определения $L$ есть

$$D(L)=\left\{u=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(a_{nm}\,e^c_{nm}+b_{nm}\,e^s_{nm})\in L_2(\Omega)\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\mu^2_{nm}(a^2_{nm}+b^2_{nm})<\infty\right\},$$

$$Lu=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\mu_{nm}(a_{nm}e^c_{nm}+b_{nm}e^s_{nm}) \text{ при } u=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(a_{nm}\,e^c_{nm}+b_{nm}\,e^s_{nm})\in D(L).$$

Функции из системы (4) составляют множество всех собственных функций оператора $L$, а числа $\mu_{nm}$ являются собственными значениями $L$.

Обозначим $w=\frac{2\pi}{T}$, $M(n,m)=|\sqrt{n^4+an^2}-wm|$, $Q_l=\left\{\frac{m}{l}\mid m\in N\right\}$ при $l\in N$.

Будем предполагать, что выполнено одно из следующих условий:

$$a=1,\ w=1; \qquad (5)$$

существует $l\in N$ ,такое, что $w\in Q_l$, $a=\frac{p}{q}\notin Q_l, p,q\notin Q_l, p,q\in N,(p,q)=1$, $q$ не квадрат; (6)

$$a\notin Q,\ w\in Q, w>0. \qquad (7)$$

***Лемма***. Если выполнено одно из условий (5), (6), (7), то существует положительная константа $C_0$, такая, что

$$M(n,m)\geq C_0 \quad \forall n,m\in N.$$

Доказательство. Если выполнено одно из условий (6),(7), то утверждение леммы вытекает из теоремы 4.1 [7]. Пусть выполнено условие (5).

Если $m\leq n^2$, то

$$M(n,m)=\frac{n^4+n^2-m^2}{\sqrt{n^4+n^2}+m}\geq\frac{n^2}{m+\sqrt{2}\,n^2}=\frac{1}{m/n^2+\sqrt{2}}\geq\sqrt{2}-1.$$

При $n^2+1\leq m\leq(n+1)^2$ имеем

$$M(n,m)=m-\sqrt{n^4+n^2}=\frac{m^2-n^4-n^2}{\sqrt{n^4+n^2}+m}\geq\frac{(n^2+1)^2-n^4-n^2}{\sqrt{n^4+n^2}+(n+1)^2}>$$

$$>\frac{1}{1+2n/(n^2+1)+n/\sqrt{n^2+1}}>\frac{1}{3}.$$

Пусть $m>(n+1)^2$. Тогда

$$M(n,m)=m-\sqrt{n^4+n^2}>(n+1)^2-\sqrt{n^4+n^2}=\frac{4n^3+5n^2+4n+1}{(n+1)^2+\sqrt{n^4+n^2}}>\frac{4n+5}{4+\sqrt{2}}>1.$$

Таким образом, $|\sqrt{n^4+n^2}-m|>\dfrac{1}{3}$ при всех натуральных $n,m$. Лемма доказана.

***Следствие***. Если выполнено одно из условий (5), (6), (7), то

$$|\mu_{nm}|\geq C_0(n^2+wm) \quad \forall n,m\in N. \tag{8}$$

Обозначим $\sigma(L)=\{\mu_{nm} \mid n\in N, m\in Z_+\}$. Из (8) следует, что при выполнении одного из условий (5), (6), (7) множество $\sigma(L)$ не ограничено ни снизу, ни сверху и не имеет конечных предельных точек.

**Квазилинейное уравнение**

Рассмотрим вначале случай, когда нелинейное слагаемое $g(x,t,u)$ растет не быстрее линейной функции по $u$ и удовлетворяет следующим условиям.

Существуют константы $\alpha,\beta,C$, такие, что $\alpha\leq\beta$, $C>0$ и

$$\alpha\leq\frac{g(x,t,u)}{u}\leq\beta \text{ , если } u\in(-\infty,-C]\bigcup[C,+\infty),\ (x,t)\in\Omega. \tag{9}$$

Обозначим $D_0$ множество конечных линейных комбинаций элементов системы (4), $H_k(\Omega)=W_2^k(\Omega)$, $H_k=W_2^k([0,\pi])$ $(k\in N)$ - пространства Соболева.

***Определение.*** Обобщенным решением задачи (1)-(3) называется функция $u\in L_2(\Omega)$, такая, что

$$\int_\Omega u(\varphi_{tt}+\varphi_{xxxx}-a\varphi_{xx})\,dxdt=\int_\Omega (g(x,t,u)+f)\varphi\,dxdt \quad \forall\varphi\in D_0.$$

***Теорема 1.*** Пусть выполнено одно из условий (5), (6), (7), функция $g$ является $T$-периодической по $t$, $g\in C^1(\Omega\times R)$ и удовлетворяет условию (9) с константами $\alpha,\beta,C$, такими, что $C>0$, $\alpha<\beta$ и $[\alpha,\beta]\bigcap\sigma(A)=\varnothing$. Тогда для любой функции $f\in H_1(\Omega)$ задача (1)-(3) имеет обобщенное решение $u\in H_2(\Omega)\bigcap C^1(\Omega)$ и $u_{xxx}\in C(\Omega)$.

Доказательство. Стандартно доказывается сходимость ряда $\sum\limits_{n\in N,m\in Z_+}\dfrac{1}{\mu_{nm}^2}$. Поэтому оператор $L^{-1}:L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$ является вполне непрерывным. Поскольку $\alpha\notin\sigma(L)$, то оператор $(L-\alpha I)^{-1}:L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$ также является вполне непрерывным.

Функция $u\in L_2(\Omega)$ является обобщенным решением задачи (1)-(3) тогда и только тогда, когда $u$ есть решение операторного уравнения

$$u=(L-\alpha I)^{-1}(p(x,t,u)+f), \tag{10}$$

где $p(x,t,u)=g(x,t,u)-\alpha u$. Из условий теоремы вытекает существование положительных констант $C_1$, $C_2$, таких, что

$$|p(x,t,u)|\leq(\beta-\alpha)|u|+C_1, \quad p(x,t,u)u+C_2\geq 0 \quad \forall(x,t)\in\Omega,\ u\in R. \tag{11}$$

Обозначим $T(u)=(L-\alpha I)^{-1}(p(x,t,u)+f)$. Оператор $T:L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$ является вполне непрерывным. Рассмотрим уравнение

$$u = \lambda T(u) \tag{12}$$

с параметром $\lambda \in (0,1]$. Оценим $L_2$ норму возможных решений уравнения (12), для чего приведем это уравнение к следующему виду:

$$p(x,t,u) = -\frac{1}{\lambda}(\alpha I - L)(u - \lambda w), \tag{13}$$

где $w = (A - \alpha I)^{-1} f$.

Для функций $f_1, f_2 \in L_2(\Omega)$ стандартно определим скалярное произведение

$$(f_1, f_2) = \int_\Omega f_1(x,t) f_2(x,t)\, dx\, dt \quad \text{и норму} \quad \| f_1 \| = \left( \int_\Omega f_1^2(x,t)\, dx\, dt \right)^{1/2}.$$

Из условий теоремы и свойств $L$ вытекает существование чисел $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(L)$, таких, что $[\alpha, \beta] \subset [\lambda_1, \lambda_2]$ и $(\lambda_1, \lambda_2) \cap \sigma(L) = \varnothing$.

Умножим уравнение (13) скалярно в $L_2(\Omega)$ на $u - \lambda w$. Поскольку $\alpha - \lambda_2$ есть наибольшее отрицательное собственное значение оператора $\alpha I - L$, то

$$(p(x,t,u), u - \lambda w) = -\frac{1}{\lambda}((\alpha I - L)(u - \lambda w), u - \lambda w) \le$$

$$\le \frac{1}{\lambda(\lambda_2 - \alpha)} \| (\alpha I - L)(u - \lambda w) \|^2 = \frac{\lambda}{(\lambda_2 - \alpha)} \| p(x,t,u) \|^2.$$

Отсюда и из (11) выведем:

$$\left( \frac{1}{(\beta - \alpha)} - \frac{1}{(\lambda_2 - \alpha)} \right) \| p(x,t,u) \|^2 - \| w \| \| p(x,t,u) \| - C_3 \le 0, \ \| p(x,t,u) \| \le C_4,$$

$$\| (L - \alpha I)(u - \lambda w) \| \le C_4,$$

где константы $C_3, C_4$ не зависят от $\lambda$. Из последнего неравенства вытекает оценка $\| u \| \le C_5$, где $C_5$ не зависит от $\lambda$. Отсюда и из принципа Лере - Шаудера вытекает существование решения уравнения (10).

Докажем утверждение о гладкости решения. Обозначим $v = g(x,t,u) + f(x,t) \in L_2(\Omega)$. Разложим функцию $v$ в ряд Фурье по системе (4):

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_{nm} e_{nm}^c + b_{nm} e_{nm}^s).$$

Из (10) следует:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \tfrac{1}{\mu_{nm}} (a_{nm} e_{nm}^c + b_{nm} e_{nm}^s).$$

Воспользовавшись неравенством Коши - Буняковского, выведем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \tfrac{1}{|\mu_{nm}|} (| a_{nm} e_{nm}^c | + | b_{nm} e_{nm}^s |) \le \frac{2}{\sqrt{\pi T}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_{nm}^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) \right)^{1/2} < \infty.$$

Следовательно, $u \in C(\Omega)$.

Из (8) вытекает существование положительной константы $C_6$, такой, что

$$\left| \frac{m}{\mu_{nm}} \right| \le C_6, \left| \frac{n}{\mu_{nm}} \right| \le C_6 \quad \forall n \in N, m \in Z_+. \tag{14}$$

Поскольку системы функций $\{(e_{nm}^c)_x,(e_{nm}^s)_x \,|\, n\in N, m\in Z_+\}$ и $\{(e_{nm}^c)_t,(e_{nm}^s)_t \,|\, n\in N, m\in Z_+\}$ являются ортогональными, то из (14) вытекает включение $u\in H_1(\Omega)$. Докажем, что $u\in C^1(\Omega)$ и $u_{xxx}\in C(\Omega)$. Для этого рассмотрим ряды

$$I_1=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m}{|\mu_{nm}|}(|a_{nm}|+|b_{nm}|),\quad I_2=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n^3}{|\mu_{nm}|}(|a_{nm}|+|b_{nm}|).$$

Поскольку также $v\in H_1(\Omega)$, то

$$v_t=w\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(-a_{nm}e_{nm}^s+b_{nm}e_{nm}^c)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}m^2(a_{nm}^2+b_{nm}^2)=\frac{1}{w^2}\|v_t\|^2<\infty. \qquad (15)$$

Следовательно, $I_1\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_{nm}^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}m^2(a_{nm}^2+b_{nm}^2)\right)^{1/2}<\infty$ и $u_t\in C(\Omega)$.

Исследуем сходимость ряда $I_2$. Воспользовавшись неравенством Коши - Буняковского, выведем:

$$I_2\le\frac{1}{w}\|v_t\|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n^6}{m^2\mu_{nm}^2}\right)^{1/2}=\frac{1}{w}\|v_t\|\left(\left(\sum_{n^2\le 2wm}\frac{n^6}{m^2\mu_{nm}^2}\right)^{1/2}+\left(\sum_{n^2>2wm}\frac{n^6}{m^2\mu_{nm}^2}\right)^{1/2}\right)\le$$

$$\le\frac{1}{w}\|v_t\|\left(2w\left(\sum_{n^2\le 2wm}\frac{n^2}{\mu_{nm}^2}\right)^{1/2}+\left(\sum_{n^2>2wm}\frac{n^2}{m^2(\sqrt{n^4+an^2}-wm)^2}\right)^{1/2}\right).$$

При $n^2>2wm$ имеем: $\sqrt{n^4+an^2}-wm>\frac{1}{2}n^2$ и

$$\sum_{n^2>2wm}\frac{n^2}{m^2(\sqrt{n^4+an^2}-wm)^2}<2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty.$$

Докажем сходимость ряда $I_3=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n^2}{\mu_{nm}^2}$. Из леммы вытекает включение $\frac{C_0}{w}\in(0,1/2]$. Следовательно,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-\sqrt{n^4+an^2}/w)^2}<2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-(1-C_0/w))^2}\equiv I_0$$

и

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n^2}{\mu_{nm}^2}=\frac{1}{w^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n^2}{(m-\sqrt{n^4+an^2}/w)^2(mw+\sqrt{n^4+an^2})^2}<$$

$$<\frac{1}{w^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-\sqrt{n^4+an^2}/w)^2}\le\frac{\pi^2}{6}\frac{I_0}{w^2}.$$

Таким образом, $u_{xxx}\in C(\Omega)$, $u\in C^1(\Omega)$.

Из (14), (15) следует $u_{tt} \in L_2(\Omega)$. Кроме того, $u_{tx} = (L^{-1}v_t)_x \in C(\Omega)$. Следовательно, $u \in H_2(\Omega)$. Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда нелинейное слагаемое $g$ растет быстрее линейной функции по $u$. Запишем уравнение (1) в следующем виде:

$$u_{tt} + u_{xxxx} - a u_{xxx} + g(x,t,u) = 0,\ 0 < x < \pi,\quad t \in R. \tag{16}$$

Пусть функция g удовлетворяет следующим условиям:

$$g \in C^1(\Omega \times R),\ T\text{-периодична по } t\text{, не убывает по } u; \tag{17}$$

$$A_3 |u|^{r-1} - A_4 \le \left| g(x,t,u) \right| \le A_1 |u|^{r-1} + A_2 \quad \forall\ (x,t) \in \Omega,\ u \in R, \tag{18}$$

где $A_1, A_2, A_3, A_4, r$ есть положительные числа, такие, что

$$r > 2, \qquad \frac{A_3}{2} > \frac{A_1}{r}. \tag{19}$$

***Определение.*** Обобщенным решением задачи (16) , (2), (3) называется $T$-периодическая по $t$ функция $u \in L_r(\Omega)$, такая, что

$$\int_\Omega u\, L\varphi\, dx\, dt + \int_\Omega g(x,t,u)\ \varphi\, dx\, dt = 0 \qquad \forall\, \varphi \in D_0\ .$$

.

***Теорема 2.*** Предположим, выполнены условия (17), (18), (19) и одно из условий (5), (6), (7). Пусть либо $g(x,t,-u) = -g(x,t,u) \quad \forall\ (x,t) \in \Omega,\ u \in R$, либо функция $g$ не зависит от $t$. Тогда $\forall\ d > 0$ существует обобщенное решение $u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ задачи (16) , (2), (3), такое, что $u_{xxx} \in C(\Omega)$ и $\|u\|_r \ge d$.

Доказывается теорема 2 аналогично теореме 2 из работы [6].

В доказанных теоремах приведены условия существования периодических по времени решений квазилинейного уравнения колебаний двутавровой балки со свободно опертыми концами.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**


1. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. - М.: Наука, 1968. - 503 с.
2. Ванько, В.И. О собственных частотах колебаний проводов воздушных ЛЭП / В.И. Ванько // Известия вузов. - 1987. - № 8. - С. 48-56.
3. Feireisl, E. Time periodic solutions to a semilinear beam equation / E. Feireisl // Non. An. - 1998. - V. 12. - P. 279-290.
4. Chang, K.C. Nontrivial periodic solution of a nonlinear beam equation / K.C. Chang, L. Sanchez // Math. Meh. in the Appl. Sci. - 1982. - V. 4. - P. 194-205.
5. Рудаков, И.А. Нелинейные уравнения, удовлетворяющие условию нерезонансности / И.А. Рудаков // Труды семинара имени И.Г. Петровского (МГУ им. М.В. Ломоносова). - 2006. - Вып. 25. - С. 226-243.
6. Рудаков, И.А. Периодические решения квазилинейного уравнения колебаний балки с однородными граничными условиями / И.А. Рудаков // Дифференциальные уравнения. - 2012. - Вып. 48. - № 6. - С. 814-825.
7. Yamaguchi, M. Existence of periodic solutions of second order nonlinear evolution equations and applications / M. Yamaguchi // Funkcianalaj Ekvacioj. - 1995. - V. 38. - P. 519-538.

1. Kollats, L *Problems on Own Values* / L. Kollats. – M.: Science, 1968. – pp. 503.
2. Vanko, V.I. On own frequencies of wire oscillations of overhead transmission lines / V.I. Vanko // *College Proceedings*. – 1987. – No.6. – pp. 48-56.
3. Feireisl, E. Time periodic solutions to a semilinear beam equation / E. Feireisl // Non. An. - 1998. - V. 12. - P. 279-290.
4. Chang, K.C. Nontrivial periodic solution of a nonlinear beam equation / K.C. Chang, L. Sanchez // Math. Meh. in the Appl. Sci. - 1982. - V. 4. - P. 194-205.
5. Rudakov, I.A. Nonlinear equations satisfying condition of non-resonance / I.A. Rudakov / *Proceedings of Petrovsky Seminar (Lomonosov State Uni-*

*versity of Moscow).* – 2006. – Edition 25. – pp. 226-243.

6. Rudakov, I.A. Cyclic solutions for quasi-linear equation of beam oscillations with homogenous boundary conditions / I.A. Rudakov // *Differential Equations*. – 2012. – Edition 48. – No.6. – pp. 814-825.
7. Yamaguchi, M. Existence of periodic solutions of second order nonlinear evolution equations and applications / M. Yamaguchi // Funkcianalaj Ekvacioj. - 1995. - V. 38. - P. 519-538.

*Статья поступила в редколлегию 28.06.17.*
*Рецензент: д.т.н., профессор МГТУ им. Н.Э. Баумана*
*Кувыркин Г.Н.*

**Сведения об авторах:**

**Рудаков Игорь Алексеевич,** д.физ.-мат.н., профессор кафедры «Прикладная математика ФН-2» МГТУ им. Н.Э. Баумана, e-mail: rudakov_ia@mail.ru.

**Rudakov Igor Alexeyevich**, D. Phys-Math., Prof. of the Dep. “Applied Mathematics FN-2” Bauman STU of Moscow, e-mail: rudakov_ia@mail.ru.