

УДК 62.752, 621:534.833; 888.6  
 DOI: 10.12737/article\_5a02f9fc346cd0.20512782

А.И. Орленко, С.В. Елисеев, А.В. Елисеев

## ВЛИЯНИЕ СОЧЛЕНЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Предложен метод построения математических моделей механических систем с возможностями уменьшения числа степеней свободы. Показаны особенности упрощений исходных расчетных схем на основе соответствующего выбора систем координат. Использованы методы структурного математического моделирования с применением

передаточных функций систем. Показан ряд конкретных примеров упрощения и выбора систем координат, вовлекаемых в преобразования.

**Ключевые слова:** динамические взаимодействия, сочленения, передаточные функции, системы координат, колебательные системы, технические объекты.

A.I. Orlenko, S.V. Yeliseyev, A.V. Yeliseyev

## ELEMENTS JOINT IMPACT UPON DYNAMIC PROPERTIES OF OSCILLATING SYSTEMS IN PROBLEMS OF ENGINEERING OBJECT DYNAMICS

In the paper there is developed a method for the formation of engineering object simulators, design procedures which may be presented as mechanical systems with some freedom degrees.

The system dynamic states at an external disturbance are defined through parameter relations of elastic and mass-inertial units which affect considerably the forms and properties of frequency characteristics. There is introduced a concept of the interacting elements joint as a certain state at which a binding elastic element obtains high parameter values, in particular, those of rigidity.

At occurrence of a joint the number of freedom degrees decreases in the system and joint element motions which may be considered as certain kinematic pairs. At that a structure of the system also changes which can obtain a lever form and other forms of ele-

ment links. And dynamic properties of the system itself change considerably.

A method is developed for the formation of simulators with joints based on the corresponding choice of a coordinate system with transformation potentialities at utmost transitions arising in joints at the rigidity of a linking elastic element tending to high values.

An option is offered for the realization of the method of a simulator formation with joints on the basis of the system transfer function application. The investigation results are of interest for experts in the field of oscillating engineering machine dynamics and protection of engineering objects operating under conditions of intensive dynamic loading.

**Key words:** dynamic interactions, joints, transfer functions, coordinate systems, oscillating systems, engineering objects.

### Введение

В динамике транспортных средств и технологических машин, работающих в условиях интенсивного вибрационного нагружения, оценка взаимодействий отдельных деталей и узлов технических объектов между собой является важным направлением обеспечения надежности и безопасности реализации производственных процессов [1-3].

Параметры вибрационного состояния транспортных объектов формируются введением в конструкции транспортных машин специальных средств для снижения

уровня вибрации, предотвращения соударений и нежелательного развития колебательных процессов; используются системы рессорного подвешивания, пружины, амортизаторы, демпферы, гасители колебаний и др. [4; 5]. Практика обеспечения безопасности движения ориентирована на возможности применения технологий непосредственного измерения параметров динамического состояния важнейших узлов подвижного состава и использования полученной информации на соответствующих уровнях комплексных систем авто-

матического управления и обеспечения безопасности перевозочных процессов [6; 7].

Вместе с тем нельзя не отметить, что динамика даже отдельных рассматриваемых объектов, таких как электровоз или вагон, представляет собой сложную задачу в силу многофункциональности технических систем и большого количества динамических связей между элементами и агрегатами объектов [8-10]. Аналитические подходы к оценке форм развития динамических процессов и выявлению возможных нежелательных эффектов связаны с упрощениями математических моделей, кото-

рые, как правило, ориентируются на системы с несколькими степенями. Во многих случаях такие подходы являются оправданными и позволяют находить достаточно рациональные конструкторско-технические решения [11].

В статье предлагается метод оценки и учета взаимодействий элементов механических колебательных систем, которые могут быть отнесены к сочленениям как своеобразным связям, возникающим при реализации предельных состояний в установлении контактов между элементами систем.

## Построение математической модели: детализация представлений об особенностях системы

Рассматриваемая в качестве примера механическая колебательная система имеет три степени свободы движений и отображает динамические свойства технического объекта массой  $m$ , опирающегося на упругую промежуточную опору в виде твердого тела с массой  $m_0$  и моментом инерции  $J_0$  относительно центра тяжести (т. О), как показано на рис. 1. Для описания положения элементов системы используются соответственно координаты  $y$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ . Механическая система опирается через упругие элементы  $k$ ,  $k_{01}$ ,  $k_1$ ,  $k_0$ ,  $k_2$  на опорные поверхности, со стороны которых действуют кинематические гармонические возмущения  $z(t)$ ,  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$ ,  $z_3(t)$ . Промежуточное твердое тело ( $m_0$ ,  $J_0$ ) опирается на упругие элементы  $k_1$ ,  $k_0$ ,  $k_2$  и связано с опорными поверхностями; пружина  $k_{01}$  соединяет два твердых тела  $m_0$  и  $m$ . Для описания движения твердого тела  $m_0$  вводится дополнительная система координат  $\phi$ ,  $y_0$  (рис. 1). Точками  $A_1$  и  $A_2$  определены места закрепления пружины  $k_{01}$ , а точками  $B_1$  и  $B_2$  - места закрепления упругого элемента  $k_2$ .

Определенные точки закрепления упругих элементов ( $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ) в дальнейшем используются для формирования так называемых сочленений, получаемых при увеличении жесткости упругих эле-

ментов ( $k_{01} \rightarrow \infty$  или  $k_0 \rightarrow \infty$  и др.). Существуют и другие подходы к формированию сочленений, детали которых можно найти в [12; 13]. Более сложные формы сочленений, допускающие одновременное соединение нескольких звеньев, рассматриваются в [14-16].

1. Обоснование возможностей упрощения может быть построено на использовании ряда последовательных преобразований математических моделей исходной системы, приведенной на рис. 1.

Движение элементов системы, имеющей три степени свободы, может быть описано в нескольких системах координат, каждая из которых отображает те или иные особенности динамических свойств системы. При решении задач вибрационной защиты в качестве объектов защиты могут выбираться различные фрагменты системы: твердое тело массой  $m$  (координата  $y$ ) или промежуточное твердое тело ( $m_0$ ,  $J_0$ ) с координатами  $y_0$ ,  $\phi$  (рис. 1).

В качестве внешних возмущений рассматриваются вибрации опорных поверхностей как известные гармонические функции  $z(t)$ ,  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$  и  $z_3(t)$  (рис. 1).

2. Для построения математической модели системы (рис. 1) в координатах  $y$ ,  $y_0$ ,  $\phi$  используются выражения для кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_0 \dot{y}_0^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\phi}^2, \quad (1)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k(y-z)^2 + \frac{1}{2}k_{01}(y-y_1)^2 + \frac{1}{2}k_1(y_1-z_1)^2 + \frac{1}{2}k_0(y_0-z_2)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2-z_3)^2. \quad (2)$$

Между координатами и параметрами системы имеется ряд соотношений:

$$y_0 = ay_1 + by_2, \quad \varphi = c(y_2 - y_1),$$

где  $a = \frac{l_2}{l_1 + l_2}$ ;  $b = \frac{l_1}{l_1 + l_2}$ ;  $c = \frac{1}{l_1 + l_2}$ .

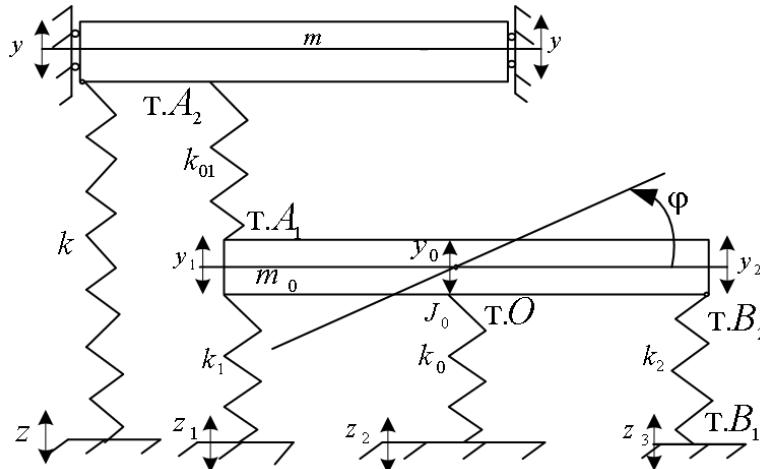


Рис. 1. Принципиальная схема технического объекта с тремя степенями свободы, образующего виброзащитную систему от кинематического возмущения

Уравнения движения системы могут быть получены на основе известных подходов [15-17] и принимают вид

$$a_{11}\bar{y} + a_{12}\bar{y}_0 + a_{13}\bar{\varphi} = \bar{Q}_1, \quad (3)$$

$$a_{21}\bar{y} + a_{22}\bar{y}_0 + a_{23}\bar{\varphi} = \bar{Q}_2, \quad (4)$$

$$a_{31}\bar{y} + a_{32}\bar{y}_0 + a_{33}\bar{\varphi} = \bar{Q}_3, \quad (5)$$

где  $a_{ij}$  ( $i = \overline{1,3}$ ,  $j = \overline{1,3}$ ) – коэффициенты математической модели в виде трех дифференциальных уравнений второго порядка с

постоянными коэффициентами в операторной форме. Значения  $a_{ij}$  представлены в табл. 1.

Коэффициенты уравнений (3) - (5) в координатах  $\bar{y}$ ,  $\bar{y}_0$ ,  $\bar{\varphi}$

Таблица 1

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$mp^2 + k + k_{01}$	$-k_{01}$	$k_{01}l_1$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$-k_{01}$	$m_0p^2 + k_{01} + k_1 + k_0 + k_2$	$-k_{01}l_1 - k_1l_1 + k_2l_2$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
$k_{01}l_1$	$-k_{01}l_1 - k_1l_1 + k_2l_2$	$J_0p^2 + k_{01}l_1^2 + k_1l_1^2 + k_2l_2^2$
<b>Обобщенные силы</b>		
$\bar{Q}_1$	$\bar{Q}_2$	$\bar{Q}_3$
$k\bar{z}$	$k_1\bar{z}_1 + k_0\bar{z}_2 + k_2\bar{z}_3$	$-k_1l_1\bar{z}_1 + k_2l_2\bar{z}_3$

Система уравнений движения в операторной форме в общем виде может быть представлена как структурная схема.

При выводе (3) - (5) используются преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях:  $p = j\omega$  - комплексная переменная;  $\bar{y}$ ,  $\bar{y}_0$ ,  $\bar{\varphi}$  - изображения переменных по Лапласу.

3. На рис. 2 приведена структурная схема системы, отражающая особенности связей, возникающих между элементами структуры при действии внешних кинематических возмущений (для упрощения принято, что  $\bar{z} = \bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \bar{z}_3$ ).

Система состоит из трех парциальных блоков, которые связаны между собой элементами, отражающими упругие взаимодействия. В общем случае входные возмущения действуют одновременно на все три входа. В дальнейших исследованиях полагается, что система совершают малые колебания относительно положения устойчивого равновесия и обладает линейными свойствами. При учете одновременного действия нескольких возмущений полагается, что все сигналы имеют одинаковые частоты с возможностями реализации принципа суперпозиции [18].

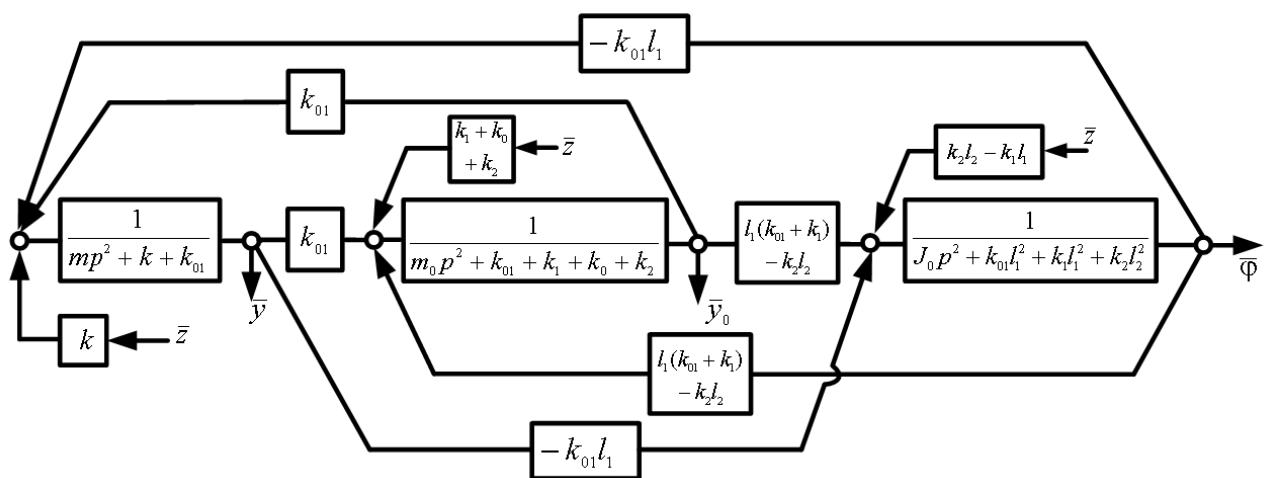


Рис. 2. Структурная схема исходной механической системы (рис. 1) при кинематическом возмущении от опорной поверхности

Рассматриваемая исходная система (рис. 1) имеет структурную математическую модель, которая отражает основные динамические свойства. Так, система обладает тремя частотами собственных колебаний. Кроме того, по каждой из коорди-

нат возможными являются режимы динамического гашения колебаний.

4. Используя структурную схему на рис. 2, можно в данных условиях возмущения ввести передаточные функции [19]

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{k(a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + (k_1 + k_0)(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) - k_1l_1(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}{A(p)}, \quad (6)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_0}{\bar{z}} = \frac{k(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + (k_1 + k_0)(a_{11}a_{33} - a_{13}^2) - k_1l_1(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23})}{A(p)}, \quad (7)$$

$$W_3(p) = \frac{\bar{\varphi}}{\bar{z}} = \frac{k(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + (k_1 + k_0)(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) - k_1l_1(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{A(p)}, \quad (8)$$

где

$$A(p) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 + 2a_{12}a_{23}a_{31} \quad (9)$$

- характеристическое частотное уравнение системы [18].

В зависимости от специфики решаемых задач может использоваться та система координат, в рамках которой более детализированно отображается специфика

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_0(a\dot{y}_1 + b\dot{y}_2)^2 + \frac{1}{2}J_0c^2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2, \\ \Pi &= \frac{1}{2}k(y - z)^2 + \frac{1}{2}k_{01}(y - y_1)^2 + \frac{1}{2}k_1(y_1 - z_1)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2}k_0(ay_1 + by_2 - z_2)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_3)^2. \end{aligned}$$

Коэффициенты уравнений движения системы в координатах  $\bar{y} = \bar{y}_1 = \bar{y}_2$  в операторной форме приведены в табл. 2.

Таблица 2  
Коэффициенты уравнений движения системы с тремя степенями свободы в координатах  $\bar{y} = \bar{y}_1 = \bar{y}_2$

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$mp^2 + k + k_{01}$	$-k_{01}$	0
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$-k_{01}$	$(m_0a^2 + J_0c^2)p^2 + k_{01} + k_1 + k_0a^2$	$(m_0ab - J_0c^2)p^2 + k_0ab$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
0	$(m_0ab - J_0c^2)p^2 + k_0ab$	$(m_0b^2 + J_0c^2)p^2 + k_0b^2 + k_2$
<b>Обобщенные силы</b>		
$\bar{Q}'_1$	$\bar{Q}'_2$	$\bar{Q}'_3$
$k\bar{z}$	$k_1\bar{z}_1 + k_0a\bar{z}_2$	$k_0b\bar{z}_2 + k_2\bar{z}_3$

Аналогично передаточные функции системы могут быть построены с использованием выражений (6) - (9) с учетом возможностей упрощения обобщенных сил  $\bar{Q}'_1$ ,  $\bar{Q}'_2$  и  $\bar{Q}'_3$  при  $\bar{z} = \bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \bar{z}_3$ .

формируемых связей во взаимодействиях элементов системы.

В частности, в системе координат  $y$ ,  $y_1$ ,  $y_2$  выражения (1), (2) для кинетической и потенциальной энергий трансформируются и примут вид

Таблица 2

Коэффициенты уравнений движения системы с тремя степенями свободы в координатах  $\bar{y} = \bar{y}_1 = \bar{y}_2$

Разные системы координат отображают специфические формы движений взаимодействующих элементов, возникающие рычажные связи между координатами и формы самоорганизации совместных (или связанных) движений.

### Некоторые формы упрощения механических колебательных систем

Механическая колебательная система, приведенная на рис. 1, может быть упрощена путем введения сочленений, когда  $k_{01} \rightarrow \infty$  и точки  $A_1$  и  $A_2$  образуют кинематическую пару А (т. А); аналогично может быть образован шарнир в т. О при  $k_0 \rightarrow \infty$ . При этом происходит уменьшение числа степеней свободы движений по сравнению с исходной принципиальной схемой. В данном случае схема на рис. 1

может быть трансформирована в упрощенную систему (рис. 3), в которой динамическое состояние объекта защиты будет определяться только одной координатой ( $y$ ,  $y_1$ ,  $y_2$  или  $\phi$ ). Кинематические параметры системы должны определяться с учетом сложного характера движения и колебаний опорной поверхности, определяющей параметры переносного движения.

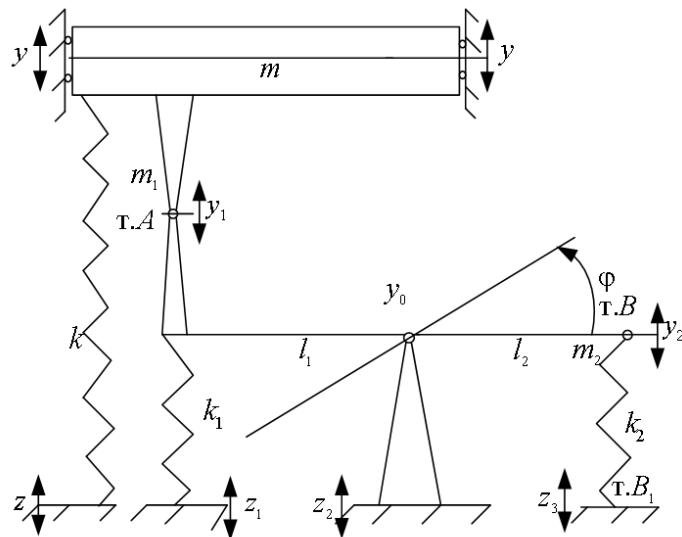


Рис. 3. Принципиальная схема системы с одной степенью свободы и двумя сочленениями при кинематическом возмущении

1. Исходная принципиальная схема технического объекта с тремя степенями свободы ( $y$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ ) может быть упрощена путем введения сочленений. В данном случае под сочленением понимается структурное образование в колебательной системе, когда жесткость упругого элемента, соединяющего выделенные точки (например,  $A_1$  и  $A_2$  или  $B_1$  и  $B_2$ ), ограничивается в относительных движениях условием, что  $k_{01} \rightarrow \infty$  или  $k_0 \rightarrow \infty$ . Возможны

ситуации, когда оба упругих элемента одновременно приобретают высокие значения коэффициентов жесткости.

На рис. 3 приведена механическая колебательная система с одной степенью свободы (координата  $\bar{y}$ ); при этом для упрощения принимается также, что  $k_2 = 0$ .

С учетом сочленений в точках А и В выражения для кинетической и потенциальной энергий можно записать так:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m + m_1)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2, \\ \Pi &= \frac{1}{2}k(y - z)^2 + \frac{1}{2}k_1(y - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - z_3)^2, \end{aligned}$$

где  $m_1$ ,  $m_2$  - приведенные массы, сосредоточенные на концах жесткого стержня длиной  $l_1 + l_2$ , эквивалентного по динамическим параметрам промежуточному твердому телу с массой  $m_0$  (рис. 1).

$$\begin{aligned} \bar{y}[(m + m_1 + m_2 i^2)p^2 + k + k_1 + k_2 i^2] &= \\ &= m_2(1+i)p^2 \bar{z}_2 + k \bar{z} + k_1 \bar{z}_1 + \bar{z}_2 k_2(1+i) - k_2 i \bar{z}_3. \end{aligned}$$

С учетом кинематических соотношений составного движения для т. В, входящей в рычажные связи,

$$\dot{y}_2 = -i\dot{y} + \dot{z}_2,$$

2. Дифференциальное уравнение движения системы в операторной форме с использованием преобразований и соотношений можно записать как

где  $i = \frac{l_2}{l_1}$  при  $z = z_1 = z_2 = z_3$ .

Получим передаточные функции системы при кинематическом возмущении:

$$W'(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{m_2(1+i)p^2 + k}{(m + m_1 + m_2 i^2)p^2 + k}. \quad (10)$$

Более подробная информация о возможностях упрощений, привносимых сочленениями, приводится в [11; 13; 20]. Отметим, что сочленение элементов в конечном итоге выражается через рычажные связи, определяемые передаточным отно-

шением  $i = \frac{l_2}{l_1}$ , а система приобретает ряд динамических особенностей. В частности, система с одной степенью свободы приобретает режим динамического гашения колебаний при кинематическом возмущении со стороны опорной поверхности

$$\omega_{\text{дин}}^2 = \frac{k}{m_2(1+i)}.$$

В области высоких частот внешних воздействий проявляется динамический эффект запирания, отражающий опреде-

ленные формы самоорганизации движения элементов (при  $p \rightarrow \infty$ ). Получим, что

$$W'(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{m_2(1+i)i}{m + m_1 + m_2 i^2}.$$

3. Приведенная технология введения в механическую колебательную систему сочленений приводит к упрощению исходной системы путем снижения числа степеней свободы, что можно рассматривать как метод построения математических моделей для технических объектов, работающих в условиях вибрационных взаимодействий. Технология метода реализуется путем построения передаточных функций системы с последующим преобразованием числителя и знаменателя передаточной функции через предельный переход параметра жесткости соединительного упругого элемента [21] к большим значениям.

## Использование выбора системы координат

В предыдущих разделах статьи развиты методологические основы построения структурных математических моделей механических колебательных систем с несколькими степенями свободы. В частности, построены математические модели в координатах  $y, y_0, \phi$ , а также  $y, y_1, y_2$  (табл. 1 и 2).

Вместе с тем динамическое состояние системы может быть описано в системе координат, которая имеет специфику формирования сочленения. Так, например, полагая, что точки  $A_1$  и  $A_2$  и  $B_1$  и  $B_2$  (рис.

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{y} - \dot{x})^2 + \frac{1}{2}m_2(a_0\dot{y}_{10} + a_0\dot{z}_2 - i\dot{y} + i\dot{x})^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k(y - z)^2 + \frac{1}{2}k_1(y - x - z_1)^2 + \frac{1}{2}k_0(y_{10})^2 + \frac{1}{2}k_2(a_0y_{10} - iy + ix + z_0)^2 + \frac{1}{2}k_{10}x^2,$$

где приняты следующие обозначения:

$$z_0 = a_0z_2 - z_3, i = \frac{a}{b} = \frac{l_2}{l_1}, a_0 = \frac{1}{b}.$$

Полученная система коэффициентов уравнений движения в координатах  $y_{10}, y, x$  приведена в табл. 3.

1) определяют возможности введения сочленения, можно использовать также систему координат  $\phi, y_0, y_{10}$ .

Обобщенные силы системы определяются в разных системах координат с учетом установочных положений, изложенных в [16]. В данном случае особенность подхода заключается в переходе от системы координат  $y, y_1, y_2$  к новой системе координат, в которой принимается, что  $y_{10} = y_0 - z_2$ , а  $x = y - y_1$ . Приведем выражения (1) и (2) к виду

Исключая из матрицы столбцы и строки по координатам  $x$  и  $y_{10}$ , получим уравнение движения для системы с координатой  $\bar{y}$ :

$$\ddot{y}(m_1 + m + m_2i^2) + y(k + k_1 + k_2i^2) = m_2a_0i\ddot{z}_2 + kz + k_1z_1 + k_2z_0i.$$

Для построения передаточной функции «смещение  $\bar{y}$  по входу  $\bar{z}_2$ » примем, что  $\bar{z} = \bar{z}_2, \bar{z}_1 = 0, \bar{z}_3 = \bar{z}_2, k_1 = 0, k_2 = 0$ . В

этом случае при  $k_{01} \rightarrow \infty, k_0 \rightarrow \infty$  найдем, что

$$W(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{m_2 a_0 i p^2 + k}{(m + m_1 + m_2 i^2) p^2 + k}.$$

Отметим, что при преобразованиях учтены соотношения  $\frac{1}{b} = \frac{l_1 + l_2}{l_1} = 1 + i$ ; в этом случае

$$W(p) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} = \frac{m_2 (1+i) i p^2 + k}{(m + m_1 + m_2 i^2) p^2 + k}. \quad (11)$$

Выражения (10) и (11) полностью совпадают, что свидетельствует об обоснованности предлагаемого метода.

Таблица 3

Коэффициенты уравнений движения системы (по рис. 1) в операторной форме в координатах  $\bar{y}_{10} = \bar{y} = \bar{x}$

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$m_2 a_0^2 p^2 + k_2 a_0^2 + k_0$	$-m_2 i a_0 p^2 - k_2 a_0 i$	$m_2 i a_0 p^2 + k_2 a_0 i$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$-m_2 i a_0 p^2 - k_2 a_0 i$	$(m_1 + m + m_2 i^2) p^2 + k + k_1 + k_2 i^2$	$(-m_1 - m_2 i^2) p^2 - k_1 - k_2 i^2$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$
$m_2 i a_0 p^2 + k_2 a_0 i$	$(-m_1 - m_2 i^2) p^2 - k_1 - k_2 i^2$	$(m_1 + m_2 i^2) p^2 + k_1 + k_{01} + k_2 i^2$
Обобщенные силы		
$\bar{Q}_{y_{10}}$	$\bar{Q}_y$	$\bar{Q}_x$
$-m_2 a_0^2 p^2 \bar{z}_2 - k_2 a_0 \bar{z}_0$	$m_2 a_0 i p^2 \bar{z}_2 + k \bar{z} + k_1 \bar{z}_1 + k_2 \bar{z}_0 i$	$-m_2 a_0 i p^2 \bar{z}_2 - k_1 \bar{z}_1 - k_2 \bar{z}_0 i$

## Заключение

Сочленения в динамических взаимодействиях элементов механических колебательных систем существенно влияют на многие параметры систем. В физическом смысле сочленения проявляются как некоторый переход к предельному состоянию взаимодействий между двумя инерционными элементами, когда жесткость упругого соединяющего элемента стремится к большим значениям. В таких ситуациях при определенных условиях возможны упрощения структур системы путем

уменьшения числа степеней свободы движения.

Предлагается метод, основанный на использовании возможностей применения различных систем координат, позволяющих ввести в рассмотрение относительные движения. В предельных значениях жесткостей упругих связей твердых тел относительные движения становятся малыми, что упрощает отношения между элементами и делает возможными необходимые оценки динамических свойств.

Предлагаемый метод позволяет находить особенности динамических взаимодействий в системах, которые имеют в своем составе рычажные механизмы и рычажные связи, поскольку специфика возникающих отношений между координатами движения опирается на необходимость учета существования точек вращения элементов, что создается во многих случаях сочленениями.

Формой реализации развивающегося метода сочленений является использование соответствующих передаточных функций, отражающих необходимые связи между координатами системы. Получение искомых соотношений для динамических связей при реализации сочленений достигается делением на соответствующий коэффициент жесткости числителя и знаменателя передаточной функции с получением предельных соотношений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. De Silva, C.W. Vibration. Fundamentals and Practice / Clarence W. de Silva. – Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. – 957 p.
2. Пановко, Г.Я. Динамика вибрационных технологических процессов: монография / Г.Я. Пановко. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютер. исслед., 2006. – 176 с.
3. Галиев, И.И. Совершенствование рессорного подвешивания подвижного состава / И.И. Галиев, В.А. Nikolaev, B.A. Нехаев // Железнодорожный транспорт / Российские железные дороги. – М., 2015. - № 11. – С. 59-61.
4. Галиев, И.И. Методы и средства виброзащиты железнодорожных экипажей / И.И. Галиев, В.А. Нехаев, В.А. Nikolaev. – М.: Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте, 2010. – 340 с.
5. Орленко, А.И. Комплексная диагностика электродвигателя электровоза / А.И. Орленко, М.Н. Петров, О.А. Терегулов. – Красноярск, 2016. – 218 с.
6. Соколов, В.М. Гасители колебаний подвижного состава: справочник / В.М. Соколов, В.И. Варава, Г.М. Левит. – М.: Транспорт, 1985. – 216 с.
7. Хоменко, А.П. Динамика и управление в задачах виброзащиты и виброизоляции подвижных объектов / А.П. Хоменко. – Иркутск: ИГУ, 2000. – 296 с.
8. Вершинский, С.В. Динамика вагона / С.В. Вершинский, В.И. Данилов, В.Д. Хусидов; под ред. С.В. Вершинского. – М.: Транспорт, 1978. – 234 с.
9. Ушkalov, B.F. Математическое моделирование колебаний рельсовых транспортных средств / B.F. Ушkalov, L.M. Резников, B.C. Иккол; под ред. B.F. Ушkalova. - Киев: Наук. думка, 1989. – 240 с.
10. Мямлин, С.В. Моделирование динамики рельсовых экипажей / С.В. Мямлин. – Днепропетровск: Новая идеология, 2002. – 240 с.
11. Хоменко, А.П. Соchленения в виброзащитных системах как процесс уменьшения числа степеней свободы движения / А.П. Хоменко, С.В. Елисеев // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – Иркутск: ИрГУПС, 2010. – № 4 (28). – С. 8-15.
12. Елисеев, С.В. Соchленения звеньев в механических колебательных системах комбинированного типа / С.В. Елисеев, Ю.В. Ермошенко, Р.С. Большаков // Вестник Иркутского государственного технического университета. – Иркутск: ИрГТУ, 2011. – № 5 (52). – С. 20-29.
13. Елисеев, С.В. Соchленения звеньев в динамике механических колебательных систем: монография / С.В. Елисеев, Ю.В. Ермошенко. – Иркутск: ИрГУПС, 2012. – 156 с.
14. Елисеев, С.В. Изменение динамических свойств механических колебательных систем при введении в них сочленений звеньев / С.В. Елисеев, С.В. Белокобыльский, П.А. Лонцих // Наука и образование: электрон. науч.-техн. изд. – М., 2012. – № 4. – С. 1-13.
15. Хоменко, А.П. Виброзащитные системы с сочленениями звеньев. Метод построения математических моделей / А.П. Хоменко, С.В. Елисеев // Повышение динамических качеств подвижного состава и поезда: сб. науч. тр. – Омск, 2011. – С. 26-42.
16. Ковригина, А.П. Новые подходы в условиях расчета и проектирования механических систем с сочленениями твердых тел / А.П. Ковригина //

- Системы. Методы. Технологии. – 2015. – № 3 (27). – С. 57-60.
17. Лурье, А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
18. Ким, Д.П. Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы / Д.П. Ким. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с.
19. Дружинский, И.А. Механические цепи / И.А. Дружинский. – Л.: Машиностроение, 1977. – 240 с.
1. De Silva, C.W. Vibration. Fundamentals and Practice / Clarence W. de Silva. – Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. – 957 p.
2. Panovko, G.Ya. Dynamics of vibrating engineering processes: monograph / G.Ya. Panovko. – M. – Izhevsk: RC “Regular and Chaotic Dynamics”, Institute of Computer Investigations, 2006. – pp.176.
3. Galiev, I.I. Spring Suspension Updating in Rolling Stock / I.I. Galiev, V.A. Nikolaev, V.A. Nekhaev // Railway Transport / Russian Railways. – M., 2015. – No.11.- pp. 59-61.
4. Galiev, I.I. Methods and means for vibro-protection of train crews / I.I. Galiev, V.A. Nekhaev, V.A. Nikolaev. - M.: Training-Methodical Center for Education on Railway Transport, 2010. – pp. 340.
5. Orlenko, A.I. Complex Diagnostics of Electric Locomotive Motor / A.I. Orlenko, M.N. Petrov, O.A. Teregulov. – Krasnoyarsk, 2016. – pp. 218.
6. Sokolov, V.M. Rolling Stock Shock Absorbers: reference book / V.M. Sokolov, V.I. Varava, G.M. Levit. – M.: Transport, 1985. – pp. 216.
7. Khomenko, A.P. Dynamics and Control in Problems of Vibro-protection and Vibration Isolation of Moving Objects / A.P. Khomenko. – Irkutsk: ISU, 2000. – pp. 296.
8. Vershinsky, S.V. Car Dynamics / S.V. Vershinsky, V.I. Danilov, V.D. Khusidov: under the editorship of S.V. Vershinsky. – M.: Transport, 1978. – pp. 234.
9. Ushkalov, V.F. Oscillations Simulation of Rail Vehicles / V.F. Ushkalov, L.M. Reznikov, V.S. Ikkol; under the editorship of V.F. Ushkalov. – Kiev: Scientif. Thought, 1989. – pp. 240.
10. Myamlin, S.V. Rail Crew Dynamics Simulation / S.V. Myamlin. – Dnepropetrovsk: New Ideology, 2002. – pp. 240.
11. Khomenko, A.P. Joints in vibro-protection systems as process for freedom degree number decrease / A.P. Khomenko, S.V. Yeliseyev // Current Technologies. System Analysis. Simulation. – Irkutsk; IrUC, 2010. – No. 4 (28). – pp. 8-15.
20. Хоменко, А.П. Динамическое гашение колебаний в виброзащитных системах с сочленениями / А.П. Хоменко, С.В. Елисеев, А.И. Артюнин // Вестник Белорусского государственного университета транспорта: Наука и транспорт. – 2011. – № 1. – С. 83-90.
21. Елисеев, С.В. Динамические свойства колебательных систем при предельных значениях параметров / С.В. Елисеев, А.А. Гордеева, И.В. Фомина // Вестник ВСГТУ. - 2011. - № 4 (35). – С. 45-53.
12. Yeliseyev, S.V. Links joints in mechanical oscillating systems of combined type / S.V. Yeliseyev, Yu.V. Yermoshenko, R.S. Bolshakov // Bulletin of Irkutsk State Technical University. – Irkutsk: IrSTU, 2011. – No.5 (52). – pp. 20-29.
13. Yeliseyev, S.V. Link Joints in Dynamics of Mechanical Vibrating Systems: monograph / S.V. Yeliseyev, Yu.V. Yermoshenko. - Irkutsk: IrSUC, 2012. – pp. 156.
14. Yeliseyev, S.V. Changes of dynamic properties of mechanic vibrating systems at link joints introduction in Them / S.V. Yeliseyev, S.V. Belokobylsky, P.A. Lontsikh // Science and Education: electronic scientif.-tech. edition. – M., 2012. – No. 4. - pp. 1-13.
15. Khomenko, A.P. Vibro-protective systems with link joints. Simulator formation method / A.P. Khomenko, S.V. Yeliseyev // Dynamic Properties Increase in Rolling Stock and Train: Proceedings. – Omsk, 2011. – pp. 26-42.
16. Kovrigina, A.P. New approaches under conditions of computation and design of mechanical systems with solid joints / A.P. Kovrigina // Systems. Methods. Technologies. – 2015. – No.3 (27). – pp. 57-60.
17. Lourie, A.I. Analytical Mechanics / A.I. Lourie. – M.: Science, 1968. – pp. 720.
18. Kim, D.P. Theory of Automatic Management. Vol.1. Linear Systems / D.P. Kim. – M.: Physmathlit, 2003. – pp. 288.
19. Druzhinsky, I.A. Mechanical Chains / I.A. Druzhinsky. – L.: Mechanical Engineering, 1977. – pp. 240.
20. Khomenko, A.P. Dynamic oscillation absorption in vibro-protective systems with joints / A.P. Khomenko, S.V. Yeliseyev, A.I. Artyunin // Bulletin of Belorussian State Transport University: Science and Transport. – 2011. – №.1. – pp. 83-90.
21. Yeliseyev, S.V. Dynamic properties of oscillation systems at utmost values of parameters / S.V. Yeliseyev, A.A. Gordeeva, I.V. Fomina // Bulletin of ESSTU. – 2011. - No.4 (35). – pp. 45-53.

Статья поступила в редакцию 9.06.17.

Рецензент: д.т.н., профессор ИрНИТУ

Лонцук П.А.

**Сведения об авторах:**

**Орленко Алексей Иванович**, к.т.н., директор Красноярского института железнодорожного транспорта Иркутского государственного университета путей сообщения, e-mail: [Orlenko\\_AI@krsk.irgups.ru](mailto:Orlenko_AI@krsk.irgups.ru).

**Елисеев Сергей Викторович**, д.т.н., гл. науч. сотрудник - директор НОЦ современных технологий,

**Orlenko Alexey Ivanovich**, Can. Eng., Director Krasnoyarsk Institute of Railway Transport of Irkutsk State University of Communications, e-mail: [Orlenko\\_AI@krsk.irgups.ru](mailto:Orlenko_AI@krsk.irgups.ru).

**Yeliseyev Sergey Victorovich**, D. Eng., Chief researcher - Director NOC of Modern Technologies, Sys-

системного анализа и моделирования Иркутского государственного университета путей сообщения, e-mail: [eliseev\\_s@inbox.ru](mailto:eliseev_s@inbox.ru).

**Елисеев Андрей Владимирович**, к.т.н., ст. науч. сотрудник Иркутского государственного университета путей сообщения, e-mail: [eavsh@ya.ru](mailto:eavsh@ya.ru).

tem Analysis and Modeling, Irkutsk State University of Communications, e-mail: [eliseev\\_s@inbox.ru](mailto:eliseev_s@inbox.ru).

**Yeliseyev Andrey Vladimirovich**, Can. Eng., Senior researcher Irkutsk State University of Communications, e-mail: [eavsh@ya.ru](mailto:eavsh@ya.ru).