«Правильные» многопсевдогранники, образованные отсеками гиперболических параболоидов

«Regular» polypseudohedrons formed by compartments of hyperbolic paraboloids

Ефремов А.В.
ассистент кафедры инженерной графики РТУ МИРЭА
e-mail: efremov@mirea.ru

Efremov A.V.
Assistant, Department of Engineering Graphics, MIREA – Russian Technological University
e-mail: efremov@mirea.ru

Аннотация
С древних времен геометры проявляли интерес к правильным многогранникам. Первые артефакты, связанные с правильными многогранниками значительно старше Платона и его современников, которые лишь систематизировали знания о правильных многогранниках, а Платон вплел их в свою философию, сопоставив разные тела разным стихиям. Однако, правильные многогранники базируются на гранях – плоских фигурах, ребра которых образуют правильные многоугольники. Если попытаться «выйти из плоскости» и рассмотреть тела, образованные не гранями, а псевдогранями – отсеками криволинейных поверхностей, то в большинстве случаев, получаемые тела в отличие от правильных многогранников, невозможно сопрячь между собой двумя псевдогранями. В данной работе рассматривается одно из исключений из этого общего правила – тела, образованные отсеками гиперболических параболоидов.
Ключевые слова: гиперболические параболоиды, правильные многогранники, симметрия, пространственные соты.

Abstract
Since ancient times, geometers have shown interest in regular polyhedra. The first examples of regular polyhedrons are much older than Plato and his contemporaries, who only systematized knowledge of regular polyhedrons, and Plato wove them into his philosophy, comparing different bodies to different elements. However, regular polyhedraare based on faces — planar shapes whose edges form regular polygons. If you try to "get out of the plane" and consider the bodies formed not by faces, but by pseudo-faces - compartments of curved surfaces, then in most cases, the resulting bodies, unlike regular polyhedra, cannot be mated with two pseudo-faces. In this paper, we consider one of the exceptions to this general rule - bodies formed by compartments of hyperbolic paraboloids.
Keywords: hyperbolic paraboloids, regular polyhedra, symmetry, honeycomb

Постановка задачи

Правильные многогранники известны с древнейших времен и хорошо изучены. Описаны различные методы их построения, в том числе с использованием САПР [1, 2]. Попытки же описания высокосимметричных тел, ограниченных криволинейными поверхностями, были немногочисленны и носили стохастический характер. Можно вспомнить, к примеру, осоэдры, биконусы, олоиды, фигуру Штейнмаца [3]. Автор задался целью систематизировать уже описанные подобные тела, а также провести работу по моделированию ранее не описанных тел высокой степени симметрии, ограниченных отсеками различных криволинейных поверхностей (псевдогранями). В рамках этой работы, в числе прочих, исследовались тела, образованные отсеками гиперболических параболоидов − гипаров. Гипары – частный случай линейчатых поверхностей, и в отличие от остальных элементарных криволинейных поверхностей, могут обладать зеркально-поворотной симметрией относительно плоскости касательной в седловой точке и нормали к этой плоскости в седловой точке [4], что позволяет совместить разные стороны поверхности гипара друг с другом, так же как можно совместить в пространстве разные стороны плоской поверхности. Это свойство позволяет создать многопсевдогранник такой, что если взять два одинаковых многопсевдогранника, их можно сопрячь между собой двумя псевдогранями. В данной работе рассматриваются подходы к моделированию таких многопсевдогранников.

Зеркально-поворотная симметрия отсека гиперболического параболоида будет наблюдаться при следующих условиях: 1) отсек ограничен ребрами – отрезками прямых; 2) проекция ребер на плоскость касательную в седловой точке – квадрат. То есть отсек гипара ограничен пространственным четырехугольником с ребрами равной длины, диагонали которого – отрезки, скрещивающиеся под прямым углом, а отрезок, соединяющий середины диагоналей, имеет длину кратчайшего расстояния между диагоналями (рис. 1).

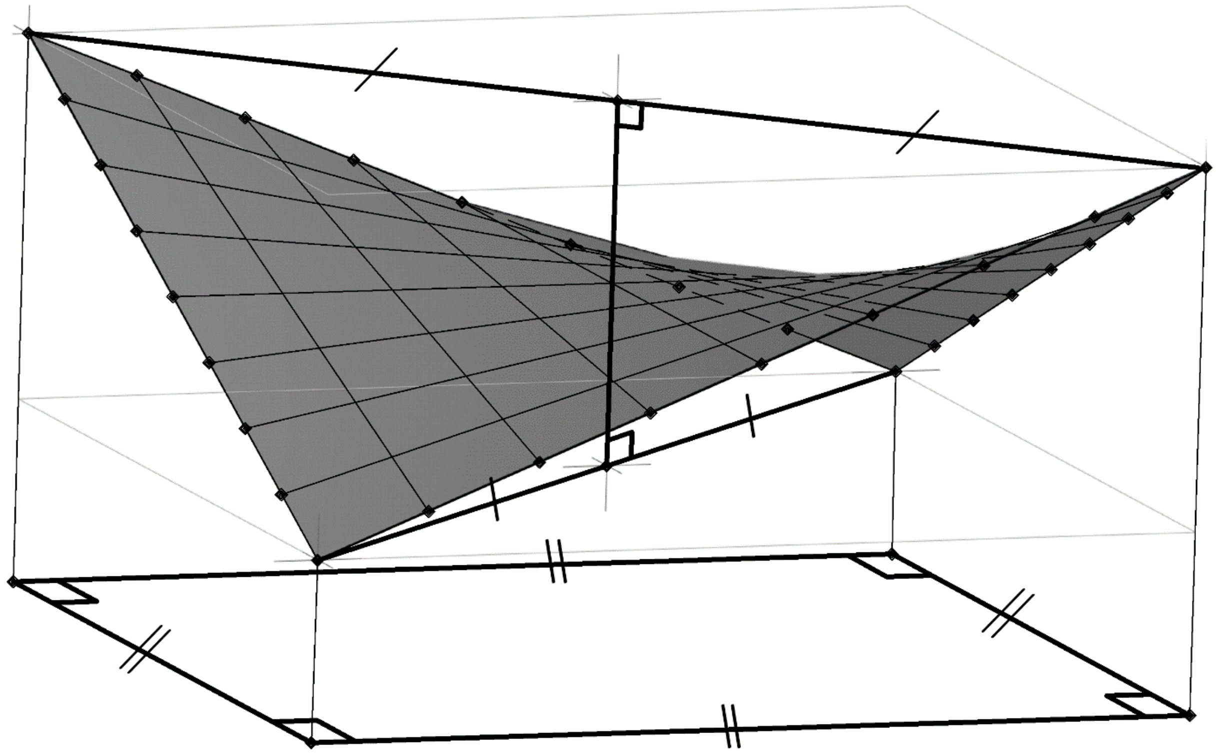


Рис. 1. «Правильный» отсек гипара

Типы симметрии реализуемых многопсевдогранников

Поворотная симметрия псевдограней

Все псевдограни многопсевдогранника обладают попарной поворотной симметрией относительно единственной оси. Порядок симметрии равен числу псевдограней. Осью симметрии выступает одна из диагоналей пространственного четырехугольника, ограничивающего псевдогрань – отсек гипара, она является общей для всех таких псевдограней. Оставшиеся диагонали псевдограни образуют правильный многоугольник с количеством сторон равным порядку поворотной симметрии. Для построения таких многопсевдогранников необходимо построить правильный n-угольник, через центр n-угольника построить нормальный к плоскости n-угольника отрезок, середина которого совпадает с центром n-угольника, а длина равна длине стороны n-угольника. Вершины n-угольника необходимо соединить отрезками с вершинами осевого отрезка и на получившихся пространственных четырехугольниках построить отсеки гипаров (рис. 2).

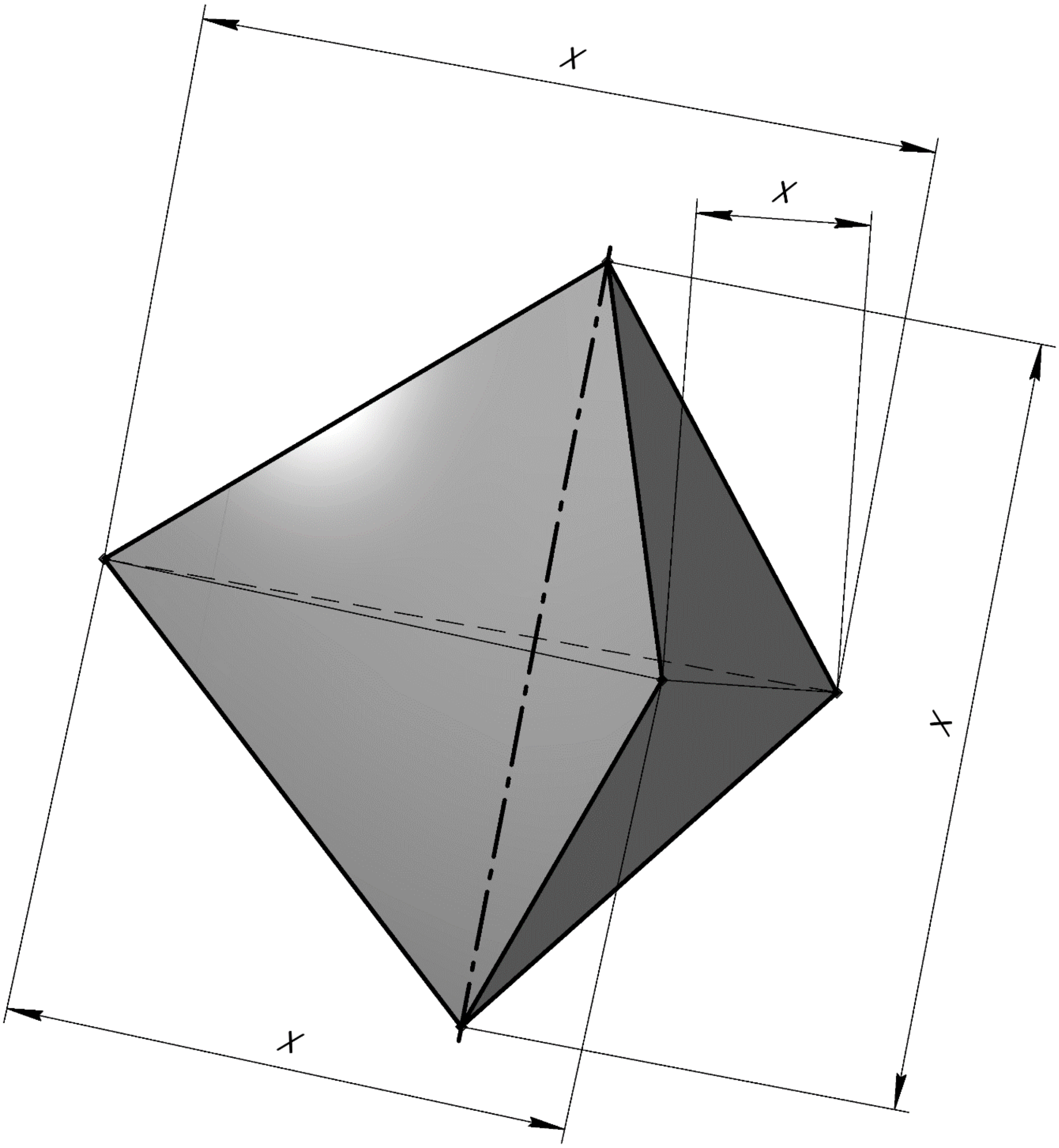


Рис. 2. Трёхпсевдогранник, реализованный поворотной симметрией псевдограней

Особый интерес в этой группе многопсевдогранников вызывает четырёхпсевдогранник. Он представляет собой ранее не описанный тип геометрической соты – объемной фигуры, которой можно замостить пространство без наложений и пустот, при этом образуется 3 группы разнонаправленных четырёхпсевдогранников, в каждой из которых поворотные оси симметрии параллельны соответствующим осям выбранной декартовой системы координат (рис. 3).

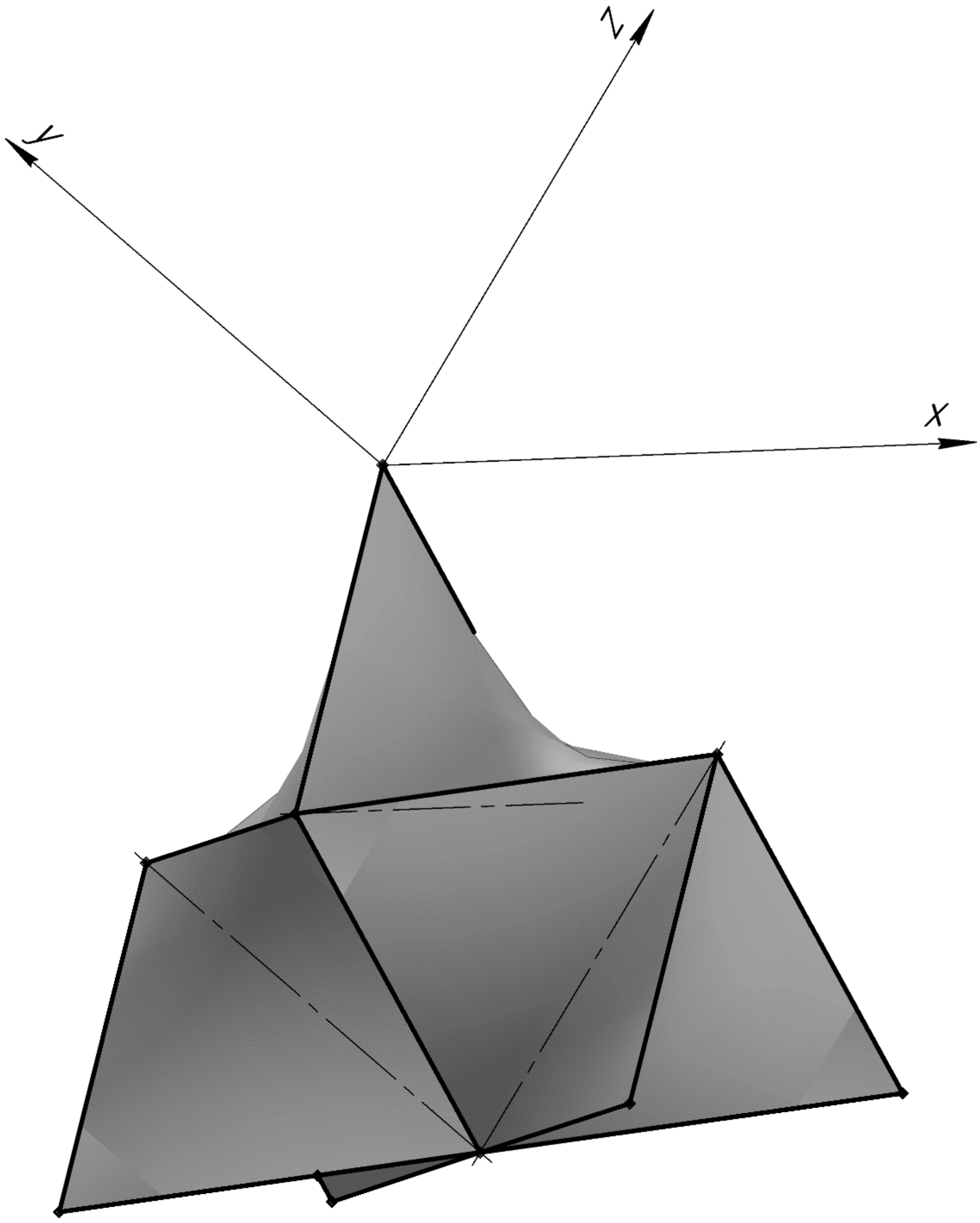


Рис. 3. Кластер из трёх ортонаправленных сопряженных четырёхпсевдогранников – геометрических сот

Комбинация поворотной и зеркально-поворотной симметрии

Грани многопсевдогранника делятся на 2 группы. В одной группе псевдограни обладают поворотной симметрией, с порядком, равным числу псевдограней в этой группе (n), имеют одну общую вершину, расстояние же между противоположными к общей вершинами равно длине диагонали. Вторая группа расположена зеркально симметрично относительно плоскости срединной по отношению к плоскостям, одна из которых образована вершинами ближайшими к общей вершине первой группы (соседние вершины), а вторая – вершинами диагональными по отношению к общей вершине первой группы (диагональные вершины). В случае n=2 – относительно к плоскости, равноудаленной от двух скрещивающихся отрезков – первый соединяет соседние вершины по отношению к общей точке, второй – диагональные вершины. Также вторая группа повернута относительно оси, проходящей через общую вершину первой группы и нормальной к срединной (равноудаленной при n=2) плоскости зеркальной симметрии, на угол = π/2n. Таким образом, соседние вершины первой группы совпадают с диагональными вершинами второй группы, а диагональные вершины первой группы совпадают с соседними вершинами второй группы. При n=2 образуется многопсевдогранник, собирающийся из двух многопсевдогранников, рассмотренных в предыдущем разделе с порядком симметрии n=3 (рис. 4).

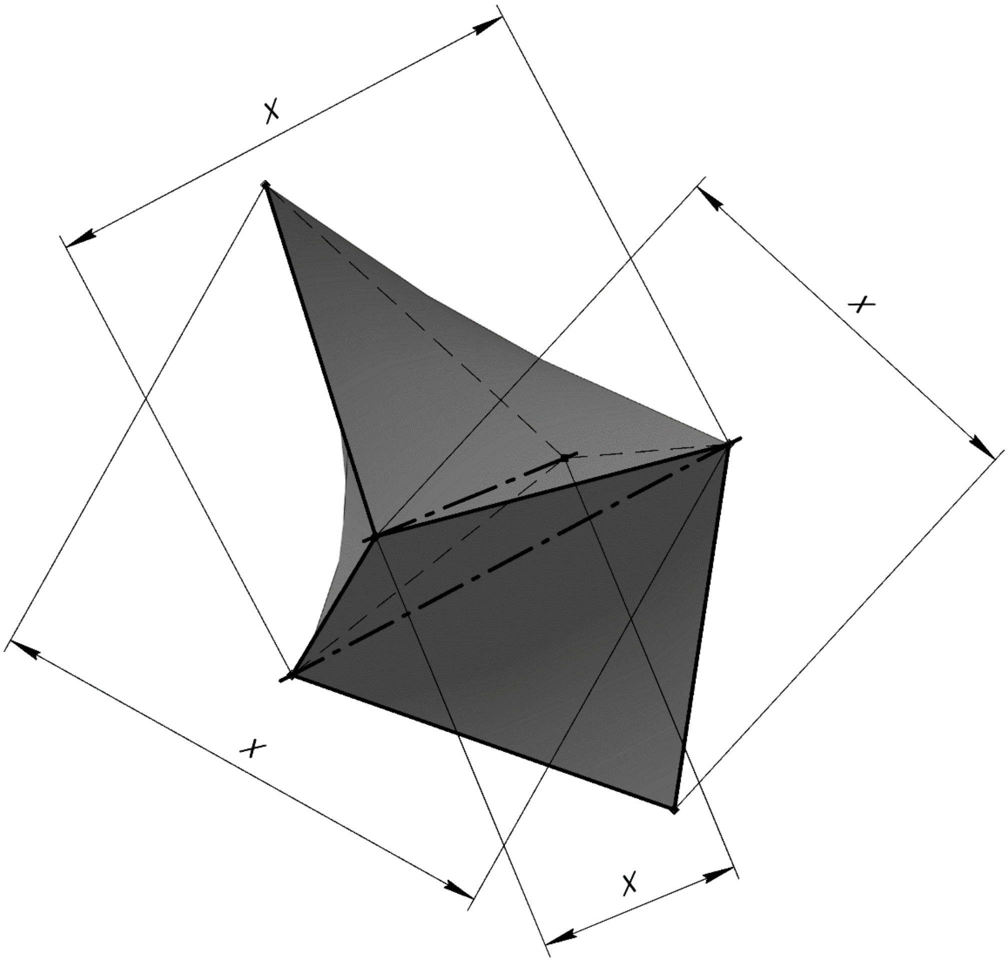
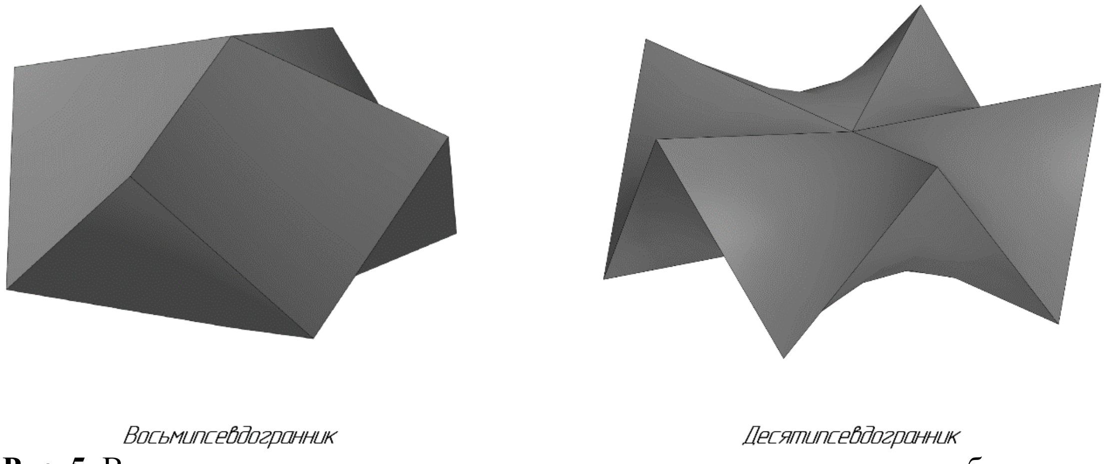


Рис. 4. Четырёхпсевдогранник, реализованный методом комбинации поворотной и зеркально-поворотной симметрии

При n=3 многопсевдогранник вырождается в куб, при n=4 и при n=5 образуются оригинальные тела, тем не менее связанные с многопсевдогранниками, о которых речь пойдет впереди (рис. 5).

При n>=6 геометрическая система в эвклидовом пространстве не имеет решений.



Восьмипсевдогранник Десятипсевдогранник

Рис. 5. Восьми- и десятипсевдогранники, реализованные методом комбинации поворотной и зеркально-поворотной симметрии

Симметрия на основе правильных многогранников

Одно ребро – одна грань.

Ребро правильного многогранника преобразуется в грань многопсевдогранника. Ребро становится диагональю псевдограни, а другая диагональ располагается на центральных нормалях, прилегающих к ребру граней исходного правильного многогранника. Попытка создать многопсевдогранник на тетраэдре приводит к вырождению гипара в плоскость и получению куба. Построение многопсевдогранника на кубе и октаэдре приводит к одинаковому результату − двенадцатипсевдограннику, так как эти фигуры являются взаимновписанными по центрам граней. Также и по той же причине одинаковый результат – тридцатипсевдогранник, дает построение на икосаэдре и додекаэдре (рис. 6).

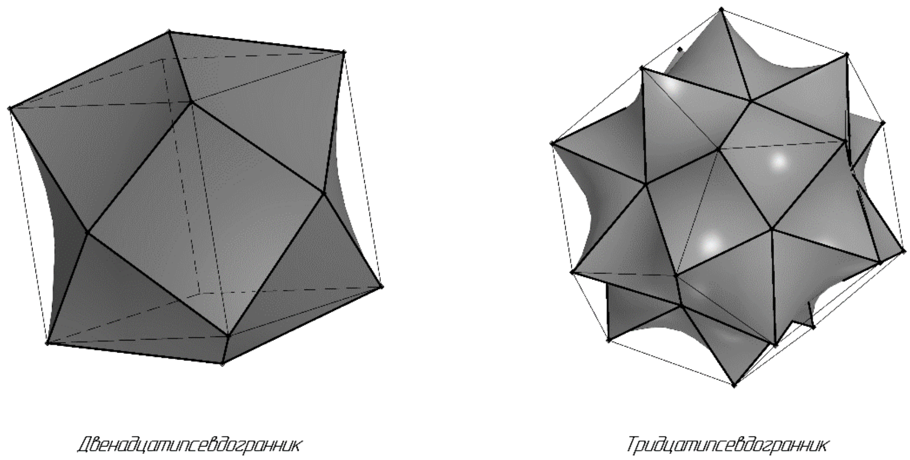


Рис. 6. Двенадцати- и тридцатипсевдогранники, реализованные методом модификации платоновых тел

Эти фигуры связаны с рассмотренными в предыдущем разделе восьмипсевдогранником и десятипсевдогранником следующим образом: группа из 4 соседних, имеющих одну общую вершину, псевдограней двенадцатипсевдогранника и группа из 4 соседних, имеющих одну общую вершину, псевдограней восьмипсевдогранника эквивалентны, также как и эквивалентны соответствующие группы из 5 псевдограней в десятипсевдограннике и тридцатипсевдограннике.

Одно ребро – несколько граней

Через ребро правильного многогранника строится плоскость, срединная по отношению к прилегающим к ребру граням. В этой плоскости, через вершины ребра проводится дуга окружности. Дуга делится на целое количество равных отрезков, образующих новые вершины, образующие новые ребра. Эти новые ребра – диагонали псевдограней. Через центр нового ребра проводится перпендикулярная ребру плоскость. Эта плоскость пересекает центральные нормали прилегающих граней исходного правильного многогранника в точках, образующих отрезок, который становится второй диагональю псевдограни. В случае деления дуги на 2 отрезка, образующийся многопсевдогранник состоит из топологически эквивалентных псевдограней (рис. 7, на примере тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра). Следует отметить, что тело, полученное на основе октаэдра, можно собрать из пространственных сот – четырехпсевдогранников.

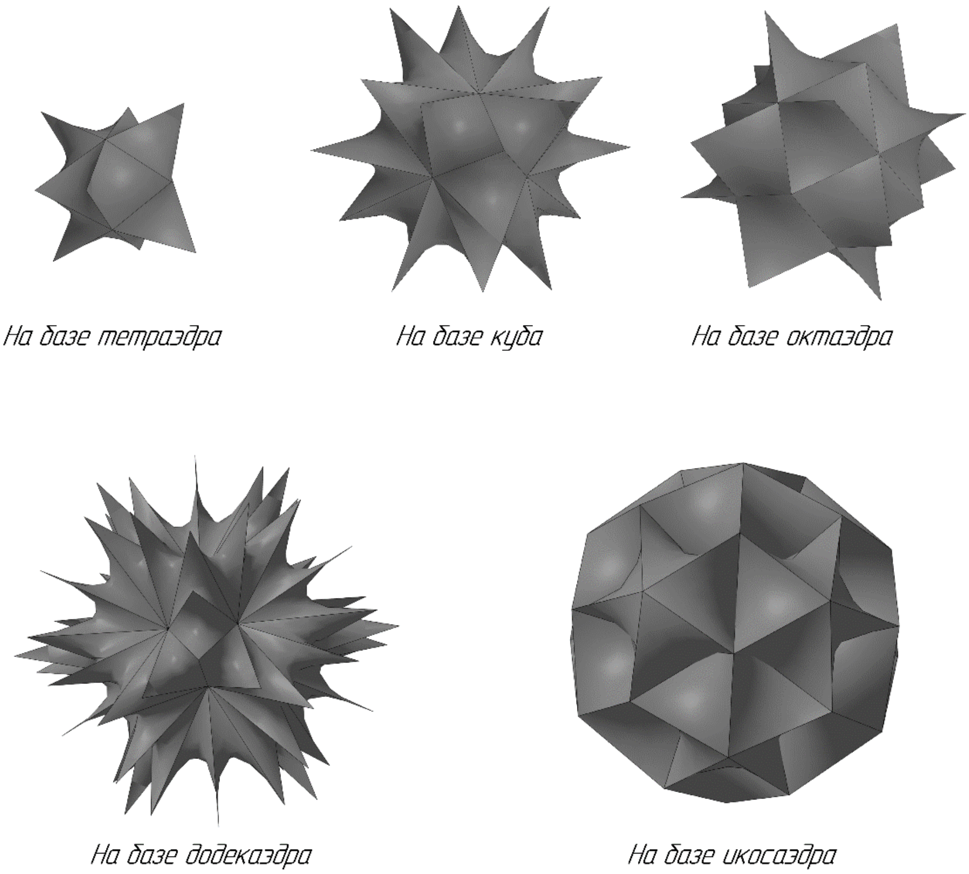


Рис. 7. Многопсевдогранники, реализованные модификацией платоновых тел, преобразованием ребра в две псевдограни

В случае деления дуги на большее количество отрезков, образующийся многопсевдогранник состоит из нескольких групп взаимно топологически неэквивалентных граней (рис. 8 на примере куба и деления ребра на три части).

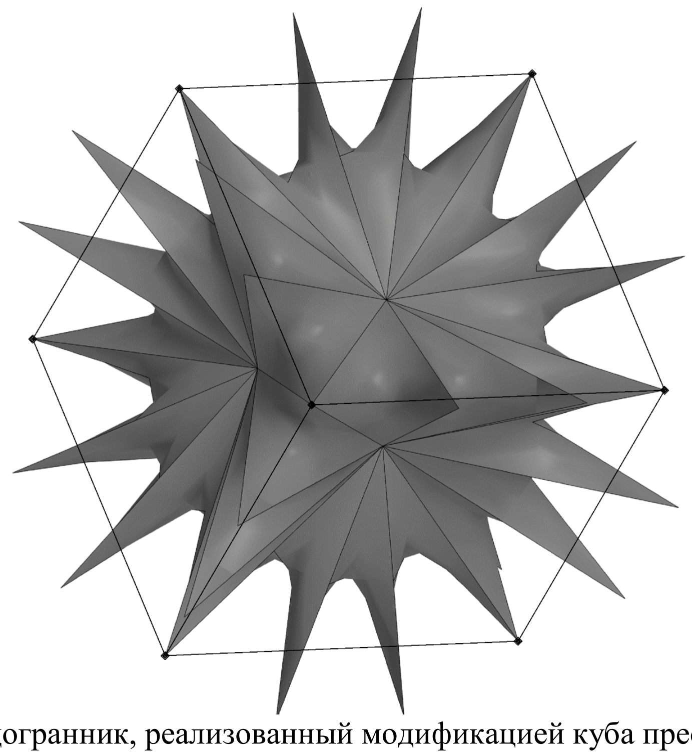


Рис. 8. Многопсевдогранник, реализованный модификацией куба преобразованием ребра в три псевдограни

Выводы

Показана возможность построения тел, поверхность которых образована эквивалентными «правильными» отсеками гиперболических параболоидов таких, что два одинаковых тела можно сопрячь между собой псевдогранями. Найдена новая, ранее не описанная разновидность пространственной соты – четырёхпсевдогранник. Разобраны и классифицированы методы построения. Результаты могут быть применены в архитектуре, индустрии настольных игр и головоломок, дизайне.

Литература

1. *Романова В.А.* Визуализация правильных многогранников в процессе их образования // Геометрия и графика. – 2019. – Т. 7. − № 1. – С. 55–67. – DOI: 10.12737/article_5c91ffd0916d52.90296375
2. *Васильева В.Н.* Золотое сечение и золотые прямоугольники при построении икосаэдра, додекаэдра и тел Архимеда, основанных на них // Геометрия и графика. – 2019. – Т. 7. − № 2. – С. 47–55. – DOI: 10.12737/article_5d2c1ceb9f91b1.21353054
3. Coxeter H. S. M. Regular Polytopes. – New York: Dover Publications Inc., 1973. – ISBN 0-486-61480-8.
4. *Сальков Н.А*. Общие принципы задания линейчатых поверхностей. Часть 3. // Геометрия и графика. – 2019. – Т. 7. − № 2. – С. 13–27. – DOI: 10.12737/article_5d2c170ab37810.30821713.