

**ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА
АЗИМУТАЛЬНО-МЕЛКОМАСШТАБНЫХ МГД-ВОЛН
В ОДНОМЕРНО-НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ КОНЕЧНОГО ДАВЛЕНИЯ
С КРИВЫМИ СИЛОВЫМИ ЛИНИЯМИ**

**SPATIAL STRUCTURE OF AZIMUTHALLY SMALL-SCALE MHD WAVES
IN ONE-DIMENSIONALLY INHOMOGENEOUS FINITE PRESSURE PLASMA
WITH CURVED FIELD LINES**

А.В. Петрашук

*Институт солнечно-земной физики СО РАН,
Иркутск, Россия, av.petrashchuk@mail.ru*

Д.Ю. Климушкин

*Институт солнечно-земной физики СО РАН,
Иркутск, Россия, klimush@iszf.irk.ru*

A.V. Petrashchuk

*Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS,
Irkutsk, Russia, av.petrashchuk@mail.ru*

D.Yu. Klimushkin

*Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS,
Irkutsk, Russia, klimush@iszf.irk.ru*

Аннотация. Изучено распространение гидромагнитных (МГД) волн в одномерно-неоднородной плазме конечного давления с кривыми силовыми линиями. Магнитные поверхности считаются концентрическими цилиндрами, где радиус цилиндра моделирует радиальную координату в магнитосфере Земли. Предполагается, что волны обладают азимутальной мелкомасштабностью. В данном приближении имеется только две МГД-моды: альфвеновская и медленный магнитный звук (ММЗ). Получено обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее пространственную структуру волнового поля в данной модели. Изучен характер особенностей на поверхностях альфвеновского и ММЗ-резонансов, влияние на него кривизны силовых линий. Определены области прозрачности волн. Установлено существенное расширение области прозрачности ММЗ по сравнению со случаем прямых силовых линий, а само существование альфвеновской области прозрачности обусловлено наличием кривизны силовых линий и конечного давления плазмы: в противном случае пространственная структура представляет локализованный резонанс.

Ключевые слова: МГД-волны, цилиндрическая модель магнитосферы, МГД-резонансы.

Abstract. We have studied propagation of hydro-magnetic (MHD) waves in one-dimensionally inhomogeneous finite pressure plasma with curved field lines. Magnetic surfaces are considered to be concentric cylinders, where the cylinder's radius models the radial coordinate in Earth's magnetosphere. The waves are supposed to be azimuthally small-scale. In this approximation there are only two MHD modes — Alfvén and slow magnetosonic (SMS). We have derived an ordinary differential equation for the spatial structure of the wave field in this model. We have examined the character of the singularity on the surface of Alfvén and SMS resonances and the influence of field line curvature on them. We have determined wave transparent regions. The SMS transparent region was found to essentially broaden as compared to the straight field line case. The very existence of the Alfvén transparent region is caused by the field line curvature and finite plasma pressure; otherwise, the wave structure is represented by a localized resonance.

Keywords: MHD waves, cylinder model of the magnetosphere, MHD resonances.

ВВЕДЕНИЕ

Ультранизкочастотные (УНЧ) волны с большими азимутальными волновыми числами наблюдаются в приэкваториальных областях магнитосферы, характеризующихся достаточно высоким плазменным давлением (отношение плазменного давления к магнитному $\beta \sim 1$) и значительной кривизной силовых линий [Агапитов, Черемных, 2011; Моисеев и др., 2016.; Rubtsov et al., 2018a]. Эти волны генерируются благодаря инъекции в плазму высокоэнергичных частиц [Гульельми, Золотухина, 1980; Магер, Кли-

мушкин, 2007; Костарев, Магер, 2017]. В последние годы азимутально-мелкомасштабные волны интенсивно исследуются с помощью радаров [Бернгардт, 2017; Chelpanov et al., 2018] и спутников [Leonovich et al., 2015; Mager et al., 2018., Takahashi et al., 2018]. Построение теории таких волн является актуальной задачей физики космической плазмы, поскольку они могут отвечать за ускорение заряженных частиц в магнитосфере [Ukhorskiy et al., 2009] и служить триггерами суббурь [Rae et al., 2014].

Как известно, в рамках магнитной гидродинамики (МГД) в плазме могут существовать три моды коле-

баний — альфвеновские волны, быстрый магнитный звук (БМЗ) и медленный магнитный звук (ММЗ). При учете неоднородности плазмы эти моды «сцепляются», т. е. не могут распространяться независимо друг от друга. Простейшей моделью магнитосферы является одномерно-неоднородная модель с прямыми силовыми линиями, учитывающая только неоднородность магнитосферы поперек магнитных оболочек (box model) [Southwood, 1974; Chen, Hasegawa, 1974; Мазур, Чуйко, 2013]. Эта модель позволила установить явление альфвеновского резонанса, суть которого заключается в следующем. Процессы на границе магнитосферы порождают БМЗ-волну, распространяющуюся вглубь магнитосферы. На некоторой поверхности, расположенной внутри магнитосферы, БМЗ отражается. Однако часть энергии БМЗ туннелирует и с экспоненциально уменьшающейся амплитудой распространяется еще глубже внутрь магнитосферы, пока не достигнет магнитной поверхности, где ее частота совпадает с локальной частотой альфвеновской волны. На соответствующей магнитной поверхности имеется резкий пик амплитуды альфвеновской волны. Азимутальная компонента электрического поля волны, а также радиальные компоненты магнитного поля и скорости плазмы имеют логарифмическую особенность, радиальная компонента электрического поля и азимутальные компоненты магнитного поля и скорости — особенность типа полюса.

Обобщение этой модели на случай конечного плазменного давления было проведено в работе [Yumoto, 1985], в которой было показано, что в плазме с $\beta > 0$ должен существовать также резонанс на магнитной поверхности, где частота волны равна локальной частоте ММЗ-волн. Особенность на этой поверхности оказалась такой же, как на поверхности альфвеновского резонанса.

В пределе азимутальной мелкомасштабности роль БМЗ можно пренебречь, поскольку область его прозрачности оказывается локализованной непосредственно вблизи магнитопаузы и в магнитосферу поступает лишь экспоненциально малая часть энергии БМЗ [Гульельми, Потапов, 1984]. Двумя основными модами МГД-колебаний в этом случае являются альфвеновские моды и ММЗ, сцепленные из-за кривизны силовых линий [Southwood, Saunders, 1985; Walker, 1987; Cheremnykh, Parnowski, 2004]. Пространственная структура этих мод в двумерно-неоднородной модели магнитосферы с непостоянной кривизной силовых линий изучалась в работах [Климушкин, 1997; Klimushkin, 1998; Klimushkin et al., 2004]. Было показано, что в рассмотренной модели имеются две области локализации моды — альфвеновская и ММЗ области прозрачности. Каждая из них ограничена с одной стороны резонансной поверхностью, на которой радиальная компонента волнового вектора k_r обращается в бесконечность, и поверхностью отражения, на которой k_r обращается в нуль. Внутри каждой из областей прозрачности $k_r^2 > 0$. Были изучены особенности волнового поля на резонансных поверхностях. На альфвеновской резонансной поверхности особенность оказалась такой же, как и в одномерно-неоднородной плазме. Однако

на резонансной поверхности ММЗ особенность оказалась иной, чем в одномерно-неоднородной модели.

Осталось не вполне понятным, в какой мере можно доверять полученным в работах [Климушкин, 1997; Klimushkin, 1998; Klimushkin et al., 2004] результатам, поскольку математические методы исследования двумерно-неоднородной модели магнитосферы разработаны еще недостаточно. Для разрешения этих трудностей в работах [Черемных и др., 2014, 2016] была исследована цилиндрическая модель магнитосферы, в которой магнитные поверхности считаются концентрическими цилиндрами и учитывается только неоднородность поперек магнитных поверхностей. Несмотря на свою относительную простоту, эта модель сохраняет такие базовые черты магнитосферной плазмы, как радиальная неоднородность и кривизна силовых линий. При этом она позволяет обойти ряд математических трудностей, характерных для более реалистичных двумерно-неоднородных моделей. Цилиндрическая модель использовалась также для изучения МГД-волн в солнечной короне [Kaneko et al., 2015, Cheremnykh et al., 2018].

Основные результаты более ранних работ [Климушкин, 1997; Klimushkin, 1998., Klimushkin et al., 2004] в части, касающейся альфвеновских мод, были подтверждены. Однако в статьях [Черемных и др., 2014, 2016] не была подробно рассмотрена пространственная структура ММЗ. Остались за кадром также вопросы соответствия цилиндрической модели и плоской модели магнитосферы, изученной в работе [Yumoto, 1985]. В предлагаемой статье мы заполняем этот пробел.

1. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ

Для описания ультранизкочастотных волн обычно используют систему МГД-уравнений:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \vec{v} &= -\nabla P + \frac{1}{c} [\vec{J} \times \vec{B}], \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0, \\ J &= \frac{c}{4\pi} [\nabla \times \vec{B}], \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -[\nabla \times \vec{E}], \\ \frac{d}{dt} \frac{P}{\rho^\gamma} &= 0, \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}], \end{aligned} \quad (1)$$

где $\vec{v}, \vec{J}, \vec{B}$ — скорость, ток и магнитное поле; ρ, P — плотность и давление плазмы; \vec{E} — электрическое поле; γ — показатель адиабаты; $\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)$.

Линеаризируя систему (1), получаем

$$\rho_0 \frac{d \vec{v}_1}{dt} = -\nabla P_1 + \frac{1}{c} \left([\vec{J}_1 \times \vec{B}_0] + [\vec{J}_0 \times \vec{B}_1] \right), \quad (2)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = -[\nabla \times \vec{E}_1], \quad (3)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -(\vec{v}_1 \cdot \nabla) P_0 - \gamma P_0 (\nabla \cdot \vec{v}_1), \quad (4)$$

$$\vec{E}_1 = -\frac{1}{c} [\vec{v}_1 \times \vec{B}_0], \quad (5)$$

где величины с индексом 0 представляют собой равновесные значения $\bar{v}, \bar{\rho}, \bar{P}, \bar{J}, \bar{B}, \bar{E}$, а с индексом 1 — малые отклонения от равновесия.

Следуя работе [Cheremnykh et al., 2018], рассмотрим одномерно-неоднородную цилиндрическую модель плазмы, в которой силовые линии магнитного поля являются концентрическими окружностями и все равновесные величины зависят только от радиальной координаты r — радиуса окружности (рис. 1).

Координата y , направленная вдоль оси симметрии системы, играет роль азимутальной координаты в магнитосфере. В этой модели магнитное поле $B_0 = (0, B_{0\varphi}(r), 0)$ и плазменное давление $P_0(r)$ удовлетворяют условию равновесия

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(P_0 + \frac{B_0^2}{8\pi} \right) = \frac{B_0^2}{4\pi r}. \quad (6)$$

Рассмотрим монохроматическую волну с частотой ω . Ввиду симметрии системы по координатам φ и y скорость плазмы можно записать в виде

$$\bar{v}_1(r, t) = \bar{v}_1(r) e^{i(-\omega t + k_y y + N\varphi)},$$

где k_y — азимутальная компонента волнового вектора; N — натуральное число. Роль азимутального волнового числа m в цилиндрической модели магнитосферы играет величина $m = k_y r$. Величину $k_{\parallel} = N/r$ можно считать аналогом продольной (вдоль магнитного поля) компоненты волнового вектора.

Тогда уравнение движения (2) можно записать по компонентам в виде

$$\begin{aligned} -i\rho_0\omega v_{1r} &= \partial_r \delta P - 2 \frac{B_0 B_{1\varphi}}{4\pi r} + ik_{\square} \frac{B_0 B_{1r}}{4\pi r}, \\ -i\rho_0\omega v_{1\varphi} &= -ik_{\square} \delta P + ik_{\square} \frac{B_0 B_{1\varphi}}{4\pi} - \frac{B_{1r}}{4\pi r} \partial_r (r B_0), \\ -i\rho_0\omega v_{1y} &= -ik_y \delta P + i \frac{k_{\square} B_0 B_{1y}}{r 4\pi}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\partial_r = \partial / \partial r$, а δP — возмущение полного давления (суммы плазменного и магнитного давлений):

$$\delta P = P_1 + \frac{B_0 B_{1\varphi}}{4\pi}.$$

С помощью уравнения (4) получаем

$$\begin{aligned} \delta P &= -i \frac{v_{1r}}{\omega} \partial_r P_0 - i \frac{\gamma P_0}{\omega} \times \\ &\times \left(\frac{1}{r} \partial_r (r v_{1r}) + ik_y v_{1y} + ik_{\parallel} v_{1\varphi} \right) + \frac{B_0 B_{1\varphi}}{4\pi}. \end{aligned} \quad (8)$$

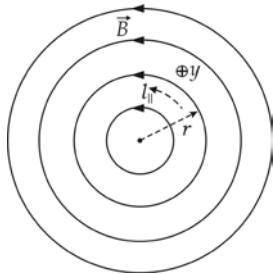


Рис. 1. Одномерно-неоднородная цилиндрическая модель

После преобразований с учетом (7) получаем:

$$\begin{aligned} \delta P &= \frac{\rho_0}{\omega} (v_A^2 + v_s^2) \left(\frac{\omega^2 - \omega_A^2(r)}{\omega^2 - \omega_+^2(r)} \right) \left(\frac{\omega^2 - \omega_c^2(r)}{\omega^2 - \omega_-^2(r)} \right) \times \\ &\times \left[\frac{1}{r} \partial_r (r v_{1r}) + 2 \frac{v_A^2}{v_A^2 + v_s^2} \frac{v_{1r}}{r} \frac{\omega^2 - \omega_s^2(r)}{\omega^2 - \omega_c^2(r)} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{где } v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}, \quad v_s = \sqrt{\gamma \frac{P_0}{\rho_0}}, \quad v_c = \frac{v_A v_s}{\sqrt{v_A^2 + v_s^2}} \quad (10)$$

альфвеновская, звуковая и медленная магнитозвуковая скорости,

$$\begin{aligned} \omega_A(r) &= k_{\square} v_A, \quad \omega_s(r) = k_{\square} v_s, \quad \omega_c(r) = k_{\square} v_c, \\ \omega_{\pm}^2(r) &= \frac{(v_A^2 + v_s^2)(k_{\square}^2 + k_y^2)}{2} \times \\ &\times \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4k_{\square}^2 v_A^2 v_s^2}{(v_A^2 + v_s^2)^2 (k_{\square}^2 + k_y^2)}} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Ниже будет показано, что частоты ω_A и ω_c соответствуют альфвеновскому и ММЗ-резонансам, частоты ω_{\pm} — точкам отражения БМЗ и ММЗ соответственно. Азимутально-мелкомасштабному случаю соответствует предел $k_y \gg k_{\parallel}$. В этом случае выражения для частот ω_{\pm} сводятся к виду

$$\omega_{+}^2 = (v_A^2 + v_s^2)(k_{\parallel}^2 + k_y^2), \quad (12)$$

$$\omega_{-}^2 = \omega_c^2 \left(1 + \frac{\omega_c^2}{\omega_{+}^2} \right). \quad (13)$$

Если теперь подставить δP из (9) в систему (7), можно получить дифференциальное уравнение, описывающее пространственную структуру альфвеновских волн, БМЗ- и ММЗ-волн:

$$\begin{aligned} \partial_r \left[(v_A^2 + v_s^2) \frac{(\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \omega_c^2)}{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} \rho_0 \frac{1}{r} \partial_r (r v_{1r}) \right] - \\ - 2 \frac{v_{1r}}{r} \partial_r \left[\rho_0 v_A^2 \frac{(\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \omega_s^2)}{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} \right] + \\ + \rho_0 (\omega^2 - \omega_A^2) v_{1r} - 2P_0 \chi_P \chi_c v_{1r} + \\ + 4 \frac{\rho_0 \chi_c^2 \omega^2 k_y^2 v_A^2 v_s^2 v_{1r}}{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь $\chi_c(r) = -1/r$ — функция кривизны силовых линий, $\chi_P(r) = P_0^{-1} \partial_r P_0$ — радиальный масштаб изменения плазменного давления. Это уравнение совпадает с полученным в работе [Черемных и др., 2014] более наглядном виде.

Зная радиальную компоненту скорости, с помощью выражения (9) можно найти возмущение полного давления δP . Далее с помощью (7) компоненты $v_{1\varphi}$ и v_{1y} выражаются через v_{1r} и δP следующим образом:

$$\rho_0 (\omega^2 - \omega_c^2) v_{1\varphi} = ik_{\square} \omega \left(\frac{v_c^2}{v_A^2} \delta P - 2\rho_0 \frac{v_c^2}{r} v_{1r} \right), \quad (15)$$

$$\rho_0 (\omega^2 - \omega_c^2) v_{1y} = ik_y \omega \delta P.$$

Отметим, что в магнитосфере компонента v_{1y} , направленная по бинормали к силовым линиям, играет роль азимутальной компоненты скорости, а компонента $v_{1\varphi}$ — роль продольной компоненты, направленной вдоль силовых линий. Как нетрудно видеть из формул (15), продольная компонента скорости в отличие от радиальной и азимутальной компонент исчезает при стремлении давления плазмы к нулю (т. е. при $v_c \rightarrow 0$).

2. ПЛОСКИЙ СЛУЧАЙ: ПРЕНЕБРЕЖИМО МАЛАЯ КРИВИЗНА СИЛОВЫХ ЛИНИЙ

С целью сопоставления с результатами, полученными в цилиндрической модели, рассмотрим сначала случай прямых параллельных силовых линий (box model), ранее рассмотренной в работе [Yumoto, 1985]. При $\chi_c = 0$ из (14) следует уравнение для гидромагнитных мод [Yumoto, 1985]:

$$\partial_r \left[(v_A^2 + v_s^2) \frac{(\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \omega_c^2)}{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} \rho_0 \partial_r v_{1r} \right] + \rho_0 (\omega^2 - \omega_A^2) v_{1r} = 0. \quad (16)$$

У этого уравнения имеются четыре особых точки, определяющиеся условиями

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_c^2(r), & \omega^2 &= \omega_-^2(r), \\ \omega^2 &= \omega_A^2(r), & \omega^2 &= \omega_+^2(r). \end{aligned} \quad (17)$$

Решениями этих четырех уравнений являются точки с координатами $r_c(\omega)$, $r_-(\omega)$, $r_A(\omega)$ и $r_+(\omega)$ соответственно. При небольших значениях параметра β и для поперечно-мелкомасштабных колебаний ($k_y \gg k_r$) между соответствующими частотами имеются соотношения

$$\omega_c < \omega_- \ll \omega_A \ll \omega_+.$$

При этом в большей части магнитосферы функции $\omega_c^2(r)$, $\omega_-^2(r)$, $\omega_A^2(r)$, $\omega_+^2(r)$ являются убывающими [Moore et al., 1987]. Следовательно, ближе всего к Земле должна быть расположена точка r_c , далее идут последовательно точки r_- , r_A и r_+ (рис. 2).

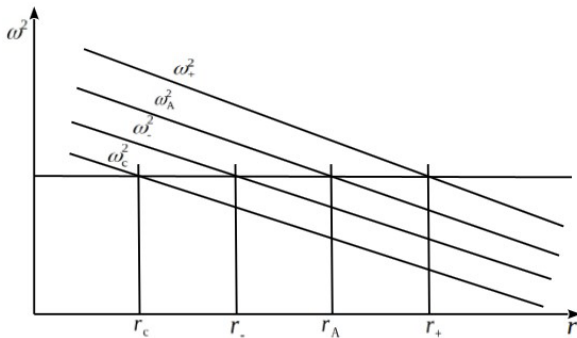


Рис. 2. Графическое решение уравнений (16) и магнитные поверхности (плоская модель)

Сначала рассмотрим область $|\omega - \omega_c|$, $|\omega - \omega_-| \ll \omega_A$, соответствующую области прозрачности ММЗ. В этой области уравнение (16) сводится к виду

$$\partial_r \left[\rho_0 \frac{\omega^2 - \omega_c^2(r)}{\omega^2 - \omega_-^2(r)} \partial_r v_{1r} \right] - \rho_0 (k_{\square}^2 + k_y^2) v_{1r} = 0. \quad (18)$$

Если искать решение этого уравнения в ВКБ-приближении, значение радиальной компоненты волнового вектора $k_r(r, \omega)$ будет определяться из соотношения

$$k_r^2(r, \omega) = - (k_y^2 + k_{\square}^2) \frac{\omega^2 - \omega_-^2(r)}{\omega^2 - \omega_c^2(r)}. \quad (19)$$

График зависимости величины $k_r^2(r, \omega)$ от квадрата частоты ω^2 изображен на рис. 3. Из формулы (19) видно, что в точках r_c и r_- величина k_r обращается в бесконечность и нуль соответственно. Поэтому эти точки могут быть названы точкой ММЗ-резонанса и точкой отражения ММЗ-волны. Область между ними, где $k_r^2 > 0$, может быть названа областью прозрачности ММЗ-волны.

Применимость ВКБ-приближения в области локализации ММЗ-волны заслуживает отдельного обсуждения. ВКБ-приближение можно применять в том случае, когда в области прозрачности укладывается много длин волн. Необходимым (но не достаточным) условием этого является наличие некоторого большого параметра в волновом уравнении. В случае уравнения (18) большим параметром естественно считать величину k_y .

Однако, как следует из (13), сама разность $\omega_-^2 - \omega_c^2$ обратно пропорциональна квадрату этой величины:

$$\omega_-^2 - \omega_c^2 = \omega_c^2 \frac{k_{\square}^2}{k_y^2} \frac{v_c^2}{v_A^2 + v_s^2}.$$

Таким образом, с ростом k_y область прозрачности сужается. Как нетрудно видеть, условие применимости ВКБ-приближения имеет вид

$$L k_y \frac{k_{\square}^2}{k_y^2} \frac{v_c^2}{v_A^2 + v_s^2} \gg 1,$$

где L — характерный масштаб радиальной неоднородности плазмы. Таким образом, ВКБ-приближение применимо только в слабонеоднородной плазме, когда величина L очень велика.

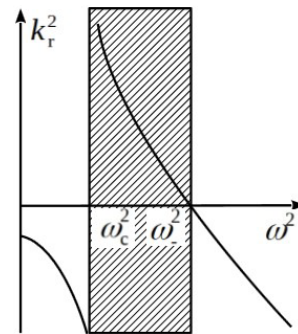


Рис. 3. Зависимость квадрата компоненты волнового вектора от квадрата частоты в МЗ-области прозрачности (плоская модель)

В окрестности точки ММЗ-резонанса $r \approx r_c$ можно воспользоваться линейным разложением $\omega^2 - \omega_c^2(r) = \omega_c^2 \frac{r - r_c}{l_c}$, где величина $l_c = -\frac{\omega_c^2(r_c)}{[\omega_c^2(r_c)]'}$

имеет смысл характерного масштаба изменения магнитосферных параметров. Величина l_c одного порядка с L . Тогда уравнение (18) примет вид

$$\partial_r^2 v_{1r} + \frac{1}{r - r_c} \partial_r v_{1r} - \frac{\tilde{\lambda}_c^{-1}}{r - r_c} v_{1r} = 0. \quad (20)$$

Здесь $\tilde{\lambda}_c = (k_y^2 l_c)^{-1} \frac{\omega_c^2}{\omega_c^2 - \omega_-^2}$ — длина ММЗ-волны

вблизи поверхности (точки) резонанса r_c . Решением этого уравнения являются функции Бесселя нулевого порядка

$$v_{1r} = \tilde{v}_1 K_0 \left(2 \sqrt{\frac{r - r_c}{\tilde{\lambda}_c}} \right) + \tilde{v}_2 I_0 \left(2 \sqrt{\frac{r - r_c}{\tilde{\lambda}_c}} \right), \quad (21)$$

где \tilde{v}_1 и \tilde{v}_2 — произвольные постоянные. Запишем асимптотику этого решения при $|r - r_c| \ll \tilde{\lambda}_c$:

$$v_{1r} \sim \ln \sqrt{\frac{r - r_c}{\tilde{\lambda}_c}}. \quad (22)$$

Таким образом, в непосредственной окрестности точки r_c решение имеет логарифмическую особенность — точку ММЗ-резонанса. При обходе логарифмической особенности в область $r - r_c < 0$ возникает скачок $i\pi/2$:

$$v_{1r} \sim \ln \sqrt{\frac{r - r_c}{\tilde{\lambda}_c}} - \frac{i\pi}{2}. \quad (23)$$

С помощью соотношений (15) нетрудно определить поведение и двух других компонент скорости плазмы. Продольная (вдоль внешнего магнитного поля) компонента скорости имеет особенность типа полюса:

$$v_{1\phi} = \frac{\tilde{\lambda}_c}{r - r_c}.$$

То же самое относится и к компоненте v_{1y} , направленной по бинормали к магнитным оболочкам:

$$v_{1y} \sim -\frac{\tilde{\lambda}_c}{r - r_c}.$$

Компоненты электрического и магнитного поля также будут иметь особенности:

$$E_{1r} \sim E_0 \frac{\tilde{\lambda}_c}{r - r_c}, E_{1y} \sim E_0 \ln \sqrt{\frac{r - r_c}{\tilde{\lambda}_c}}, E_{1\phi} = 0, \\ E_{1r} = E_{1y} = 0, E_{1\phi} \sim E_0 \frac{\tilde{\lambda}_c}{r - r_c}.$$

Теперь определим решение вблизи точки отражения ММЗ r_- , когда $|\omega - \omega_-| \ll \omega_c$. В этом случае уравнение (18) может быть преобразовано к виду

$$\partial_r^2 v_{1r} - \frac{1}{r - r_-} \partial_r v_{1r} - \lambda_-^{-3} (r - r_-) v_{1r} = 0. \quad (24)$$

Здесь обозначено $\lambda_-^{-3} = \omega_-^2 (\omega_-^2 - \omega_c^2)^{-1} \frac{k_y^2}{L}$,

$L = -\omega_-^2 / [\omega_-^2(r_-)]'$. Это уравнение для производных функций Эйри. Его общее решение имеет вид

$$v_{1r} = a_- Ai' \left(\frac{r - r_-}{\lambda_-} \right) + b_- Bi' \left(\frac{r - r_-}{\lambda_-} \right). \quad (25)$$

где a_- и b_- — константы, Ai и Bi — функции Эйри первого и второго рода. Штрихами обозначены производные по r . Таким образом, наличие особенности в точке r_- в волновом уравнении (16) не приводит к особенности решения.

В области локализации альфвеновской волны, когда $\omega \approx \omega_A$ и $\omega_c \ll \omega \ll \omega_+$, общее уравнение (15) сводится к виду

$$\partial_r [\omega^2 - \omega_A^2(r)] \partial_r v_{1r} - (k_y^2 + k_\square^2) \times \\ \times [\omega^2 - \omega_A^2(r)] v_{1r} = 0. \quad (26)$$

Разлагая функцию $\omega_A^2(r)$ в окрестности точки $r \approx r_A$ с точностью до первого члена

$$\omega^2 - \omega_A^2(r_A) \approx -[\omega_A^2(r_A)]' (r - r_A), \quad \text{получим}$$

уравнение

$$\partial_r^2 v_{1r} + \frac{1}{r - r_A} \partial_r v_{1r} - (k_y^2 + k_\square^2) v_{1r} = 0, \quad (27)$$

представляющее из себя модифицированное уравнение Бесселя нулевого порядка. Его общее решение имеет вид

$$v_{1r} = v_+ I_0 \left(\sqrt{k_y^2 + k_\square^2} (r - r_A) \right) + \\ + v_- K_0 \left(\sqrt{k_y^2 + k_\square^2} (r - r_A) \right), \quad (28)$$

где $I_0(z)$, $K_0(z)$ — модифицированные функции Бесселя, v_+ , v_- — произвольные постоянные. В окрестности альфвеновского резонанса это решение имеет логарифмическую особенность

$$v_{1r} \sim \ln \left[\sqrt{k_y^2 + k_\square^2} (r_A - r) \right]. \quad (29)$$

В соответствии с правилом обхода особенности аналитическое продолжение этого решения на область $r < r_A$ имеет вид

$$v_{1r} \sim \ln \left[\sqrt{k_y^2 + k_\square^2} (r - r_A) \right] - i\pi. \quad (30)$$

При этом азимутальная компонента скорости $v_{1\phi}$ имеет особенность типа полюса:

$$v_{1\phi} \sim \frac{1}{r - r_A},$$

в то время как продольная компонента $v_{1\phi}$ особенностей не имеет.

Наконец, при достаточно большой частоте волны ($\omega \gg \omega_A$) уравнение (16) сводится к виду

$$\partial_r \rho_0 \frac{v_A^2 + v_s^2}{\omega^2 - \omega_+^2(r)} \partial_r v_{1r} + \rho_0 v_{1r} = 0. \quad (31)$$

При решении этого уравнения в ВКБ-приближении квадрат радиальной компоненты волнового вектора определяется выражением

$$k_r^2 = \frac{\omega^2}{v_A^2 + v_s^2} - (k_y^2 + k_z^2). \quad (32)$$

Это выражение непосредственно получается из дисперсионного уравнения для БМЗ [Southwood, 1974]. Из (32) видно, что точка r_+ , где выполняется равенство $\omega^2 - \omega_+^2(r) = 0$, является точкой отражения БМЗ, поскольку в этой точке радиальная компонента волнового вектора обращается в нуль.

Рассмотрим решение вблизи этой точки подробнее. Разлагая функцию $\omega_+^2(r)$ в ряд в области $r \approx r_+$,

$$\omega^2 - \omega_+^2(r) \approx -[\omega_+^2(r_+)]' (r - r_+) = \omega_+^2 \frac{r - r_+}{l_+},$$

получим

$$\partial_r v_{1r} - \frac{1}{r - r_+} \partial_r v_{1r} + \lambda_+^{-3} (r - r_+) v_{1r} = 0, \quad (33)$$

где $\lambda_+^{-3} = l_+^{-1} \frac{\omega_+^2}{v_A^2 + v_s^2}$. Решением (33) будет

$$v_{1r} = a_+ Ai' \left(-\frac{r - r_+}{\lambda_+} \right) + b_+ Bi' \left(-\frac{r - r_+}{\lambda_+} \right). \quad (34)$$

Это решение регулярно. Как и в случае точки отражения ММЗ, наличие особенности в волновом уравнении не приводит к особенности решения.

3. АЗИМУТАЛЬНО-МЕЛКОМАСШТАБНЫЕ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В работе [Черемных и др., 2014] было получено дифференциальное уравнение с помощью которого найдена пространственная структура ММЗ и альфвеновских мод. Однако вопрос о пространственной структуре ММЗ не был решен до конца. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

В азимутально-мелкомасштабном случае (когда $k_y \gg k_z$) частота волны много меньше частоты отражения БМЗ: $\omega \ll \omega_+$. Тогда дифференциальное уравнение (14) приводится к виду

$$\begin{aligned} & -\partial_r \left[\frac{(\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \omega_c^2)}{\omega^2 - \omega_-^2} \right] \frac{\rho_0}{r} \partial_r (r v_{1r}) + \\ & + \frac{2}{r} \frac{v_A^2}{v_A^2 + v_s^2} v_{1r} \partial_r \left[\rho_0 \frac{(\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \omega_s^2)}{\omega^2 - \omega_-^2} \right] + \\ & + k_y^2 \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}{\omega^2 - \omega_-^2} v_{1r} = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь $\omega_{1,2}$ — решение биквадратного уравнения

$$\left(\omega^2 - \omega_A^2 - 2P_0 \frac{\chi_p \chi_c}{\rho_0} \right) (\omega^2 - \omega_-^2) - 4\chi_c^2 \omega^2 v_c^2 = 0.$$

Запишем выражения для частот $\omega_{1,2}$:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 = & \frac{1}{2} \left[(\omega_p^2 + \omega_-^2 4v_c^2 \chi_c^2) \pm \right. \\ & \left. \pm \sqrt{(\omega_p^2 - \omega_-^2)^2 + 8(\omega_p^2 + \omega_-^2) v_c^2 \chi_c^2 + 16v_c^4 \chi_c^4} \right], \end{aligned} \quad (36)$$

где обозначено

$$\omega_p^2 = \omega_A^2 + (2P_0/\rho_0) \chi_p \chi_c. \quad (37)$$

Выражение (35) полностью согласуется с уравнением полученным в работе [Черемных и др., 2014] для специальных альфвеновских и ММЗ-мод.

Если давление плазмы не очень велико и выполняется условие $\beta(\chi_c/k_z) \ll 1$, частоты $\omega_{1,2}$ можно записать в приближенном виде:

$$\omega_1^2 = \omega_c^2 \left(1 - 4 \frac{\chi_c^2 v_c^2}{\omega_A^2} \chi_p \right), \quad (38)$$

$$\omega_2^2 = \omega_A^2 + 4\chi_c^2 v_c^2 - \beta v_A^2 \chi_c \chi_p = \omega_p^2 - 4\chi_c^2 v_c^2.$$

Следовательно, частота ω_1 ближе к частоте ММЗ-резонанса ω_c , а ω_2 — к альфвеновской резонансной частоте ω_A . Из этих формул видно также, что частота ω_1 всегда меньше частоты ММЗ-резонанса: $\omega_1 < \omega_c$. Однако частота ω_2 может быть как больше, так и меньше альфвеновской резонансной частоты.

Для начала рассмотрим решение этого уравнения в ВКБ-приближении. Квадрат радиальной компоненты волнового вектора определяется из соотношения

$$k_r^2(r, \omega) = -k_y^2 \frac{[\omega^2 - \omega_1^2(r)] [\omega^2 - \omega_2^2(r)]}{[\omega^2 - \omega_c^2(r)] [\omega^2 - \omega_A^2(r)]}. \quad (39)$$

Как видим, при выполнении равенств

$$\omega = \omega_1(r), \quad \omega = \omega_2(r) \quad (40)$$

радиальная компонента волнового вектора обращается в нуль. Следовательно, частоты ω_1 и ω_2 имеют смысл частот отражения ММЗ и альфвеновской мод соответственно. Точки r_1 и r_2 , являющиеся решениями уравнений (39), будем называть точками отражения ММЗ и альфвеновской мод соответственно. Поскольку в большей части магнитосферы функции $\omega_c(r)$, $\omega_A(r)$ и $\omega_{1,2}(r)$ являются убывающими, всегда имеет место неравенство $r_1 < r_c$. В случае $\omega_A < \omega_2$ имеет место неравенство $r_A < r_2$, в противоположном случае $\omega_A > \omega_2$ — неравенство $r_A > r_2$ (рис. 4).

Графики зависимости квадрата радиальной компоненты волнового вектора $k_r^2(r)$ от квадрата частоты ω^2 показаны на рис. 5. Панель *a* соответствует

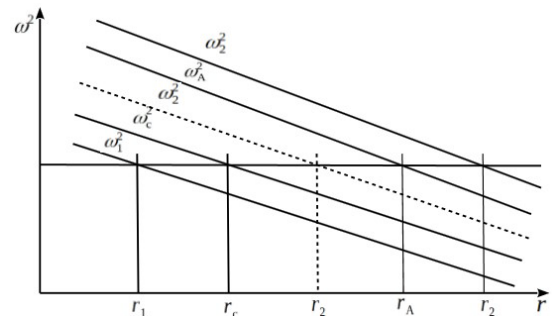


Рис. 4. Графическое решение уравнений (40) и магнитные поверхности $r_c(\omega)$, $r_1(\omega)$, $r_A(\omega)$, $r_2(\omega)$ (последняя показана в двух случаях: $\omega_A < \omega_2$ и $\omega_A > \omega_2$)

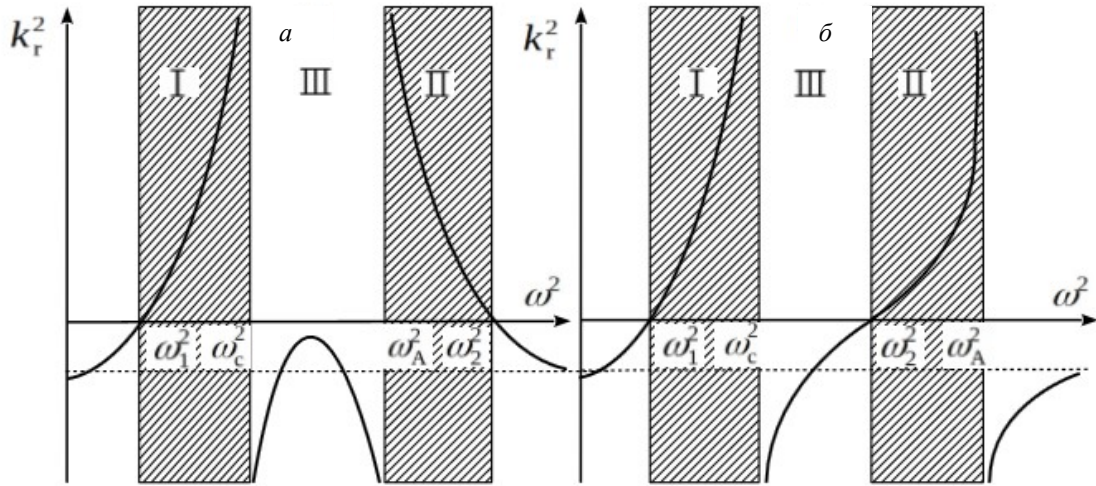


Рис. 5. Зависимость квадрата радиальной компоненты волнового вектора от квадрата частоты ω^2 . При $\omega \approx \omega_A$ и $\omega \approx \omega_c$ $k_r^2(r)$ претерпевает разрыв от $-\infty$ до ∞ , а при переходе через точки ω_1^2 и ω_2^2 функция $k_r^2(r)$ меняет знак $k_r^2(r) < 0$

случаю $\omega_A < \omega_c$, панель \bar{b} — случаю $\omega_A > \omega_c$. Цифрами I и II обозначены области распространения ММЗ и альфвеновских волн соответственно. Цифрой III обозначена область частот, при которых распространение волн невозможно. Соответственно область прозрачности ММЗ лежит в диапазоне $r_1 < r < r_c$, область прозрачности альфвеновской моды — в диапазоне $r_A < r < r_2$ (a) и в диапазоне $r_2 < r < r_A$ (б).

Для альфвеновской области прозрачности резонансная поверхность r_A называется еще тороидальной поверхностью, поверхность отражения r_2 — полоидальной поверхностью [Leonovich, Mazur, 1993]. В случае $k_r \rightarrow \infty$ силовые линии как бы скользят по невозмущенным магнитным поверхностям (цилиндрам в нашем случае), а в случае $k_r = 0$ осциллируют вдоль нормали к магнитным оболочкам.

Если область непрозрачности значительно шире областей прозрачности каждой из мод, уравнение (35) допускает дальнейшее упрощение в альфвеновской и ММЗ-областях прозрачности. Рассмотрим альфвеновскую область прозрачности в случае $|\omega_A - \omega_2| \ll \omega$ и $\omega_A, \omega_2 \gg \omega_c, \omega_1$ при больших значениях k_y . Тогда уравнение (35) сведется к виду

$$-\partial_r [\omega^2 - \omega_A^2(r)] \partial_r v_{1r} + k_y^2 [\omega^2 - \omega_2^2(r)] v_{1r} = 0, \quad (41)$$

что совпадает с уравнением для альфвеновской моды, полученным в статье [Черемных и др., 2014]. Поскольку в ней был дан достаточно подробный анализ решения этого уравнения, мы не будем на нем останавливаться. Отметим только, что вблизи резонансной поверхности по-прежнему имеет место логарифмическая особенность волнового поля, как и в плоском случае:

$$v_{1r} \sim \ln \sqrt{\frac{r-r_A}{\lambda_A}}, \quad v_{1\phi} \sim \ln \sqrt{\frac{r-r_A}{\lambda_A}},$$

где $\lambda_A = k_y^2 l_A (\omega_A^2 - \omega_2^2) / \omega_A^2$, $l_A = -\omega_A^2 / [\omega_A^2(r_A)]'$.

Азимутальная компонента скорости v_{1y} будет иметь вид

$$v_{1y} \sim \frac{1}{r-r_A}.$$

Компоненты электрического и магнитного поля имеют вид

$$E_{1r} \sim E_0 \frac{\lambda_A}{r-r_A}, \quad E_{1y} \sim E_0 \ln \sqrt{\frac{r-r_A}{\lambda_A}}, \quad E_{1\phi} = 0,$$

$$E_{1r} = E_{1y} = 0, \quad E_{1\phi} \sim E_0 \frac{\lambda_A}{r-r_A}.$$

Однако при отходе от резонансной поверхности поведение волнового поля оказывается иным, чем в плоском случае. Если в плоском случае альфвеновская волна представляла собой изолированный резонансный пик, то в кривой геометрии решение вблизи точки резонанса имеет осцилляторный характер, причем длина волны уменьшается по мере приближения к особенности. Это также соответствует результатам работ [Климушкин, 1997; Klimushkin, 1998; Klimushkin et al., 2004], выполненных для двумерно-неоднородной модели магнитосферы с переменной кривизной силовых линий и продольной неоднородностью плазмы.

Основным предметом внимания данной статьи является область прозрачности ММЗ. Рассмотрим предельный случай $|\omega_c - \omega_1| \ll \omega$ и $\omega_c, \omega_1 \ll \omega_A, \omega_2$. В этом случае уравнение (35) сведется к виду

$$\partial_r \left[\frac{\omega^2 - \omega_c^2(r)}{\omega^2 - \omega_-^2(r)} \right] \partial_r v_{1r} - \frac{2}{r} \frac{v_A^2}{v_A^2 + v_s^2} \times$$

$$\times v_{1r} \partial_r \left[\frac{\omega^2 - \omega_s^2(r)}{\omega^2 - \omega_-^2(r)} \right] - k_y^2 \frac{\omega^2 - \omega_1^2(r)}{\omega^2 - \omega_-^2(r)} v_{1r} = 0. \quad (42)$$

Рассмотрим окрестность точки ММЗ-резонанса r_c :

$|\omega - \omega_c| \ll |\omega - \omega_-|, |\omega - \omega_+|$. Тогда уравнение (42) допускает дальнейшее упрощение:

$$\partial_r [\omega^2 - \omega_c^2(r)] \partial_r v_{1r} - k_y^2 [\omega_c^2 - \omega_1^2(r)] v_{1r} = 0. \quad (43)$$

Вблизи резонансной точки $r \approx r_c$ функцию $\omega_c(r)$ можно разложить в степенной ряд $\omega^2 - \omega_c^2(r) \approx -(\omega_c^2)'(r - r_c) = \omega_c^2 \frac{r - r_c}{l_c}$. Тогда дифференциальное уравнение (43) примет вид

$$\partial_r \omega_c^2 \frac{r - r_c}{l_c} \partial_r v_{1r} - k_y^2 (\omega_c^2 - \omega_1^2) v_{1r} = 0. \quad (44)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$v_{1r} = \tilde{v}_1 K_0 \left(\sqrt{\frac{r - r_c}{\lambda_c}} \right) + \tilde{v}_2 I_0 \left(\sqrt{\frac{r - r_c}{\lambda_c}} \right), \quad (45)$$

где обозначено $\lambda_c^{-1} = k_y^2 l_c \frac{\omega_c^2 - \omega_1^2}{\omega_c^2}$.

При $|r - r_c| \ll \lambda_c$ решение (45) имеет точно такую же логарифмическую особенность, как и (23):

$$v_{1r} \sim \ln \sqrt{\frac{r - r_c}{\lambda_c}}. \quad (46)$$

При этом продольная и азимутальная компоненты смещения имеют особенность типа полюса:

$$v_{1\varphi} \sim \frac{\lambda_c}{r - r_c}, \quad v_{1y} \sim \frac{\lambda_c}{r - r_c}.$$

Компоненты электрического и магнитного поля имеют вид

$$E_{1r} \sim B_0 \frac{\tilde{\lambda}_c}{r - r_c}, \quad E_{1y} \sim B_0 \ln \sqrt{\frac{r - r_c}{\tilde{\lambda}_c}}, \quad E_{1\varphi} = 0,$$

$$B_{1r} = B_{1y} = 0, \quad B_{1\varphi} \sim B_0 \frac{\tilde{\lambda}_A}{r - r_c}.$$

Аналитическое продолжение этого решения имеет вид:

$$v_{1r} \sim \ln \sqrt{\frac{r_c - r}{\lambda_c}} - i \frac{\pi}{2}. \quad (47)$$

Рассмотрим теперь структуру волнового поля вблизи другой границы области прозрачности ММЗ-волны — точки поворота r_1 . Для этого положим в уравнении (42) $|\omega - \omega_+| \ll |\omega - \omega_-|, |\omega - \omega_c|$. Мы получим уравнение в азимутально-мелкомасштабном приближении

$$\partial_r^2 v_{1r} + k_y^2 \frac{\omega^2 - \omega_1^2(r)}{\omega_c^2 - \omega_-^2(r)} v_{1r} = 0. \quad (48)$$

Используя линейное разложение функции $\omega_1^2(r)$ вблизи точки

$$r \approx r_1, \quad \omega^2 - \omega_1^2(r) \approx -[\omega_1^2(r_1)]'(r - r_1) = \omega_1^2 \frac{r - r_1}{l_1},$$

получим уравнение Эйри

$$\partial_r^2 v_{1r} + \lambda_1^{-3} (r - r_1) v_{1r} = 0, \quad (49)$$

где $\lambda_1^{-3} = k_y^2 \omega_1^2 / l_1 (\omega_c^2 - \omega_-^2)$. Находим решения (49):

$$v_{1r} = a_1 Ai(-\lambda_1^{-1} (r - r_1)) + b_1 Bi(-\lambda_1^{-1} (r - r_1)). \quad (50)$$

Что касается точки r_- (точки поворота в плоском случае), она по-прежнему является особой точкой уравнения для ММЗ и в кривом случае, но смысл ее меняется. В окрестности этой точки, где $|\omega - \omega_-| \gg |\omega - \omega_c|, |\omega - \omega_+|$, уравнение (35) допускает дальнейшее упрощение:

$$-\partial_r \frac{\omega_-^2 - \omega_c^2(r)}{\omega^2 - \omega_-^2(r)} \partial_r v_{1r} + \frac{2}{r} \frac{v_A^2}{v_A^2 + v_s^2} v_{1r} \partial_r \left[\frac{\omega_-^2 - \omega_s^2}{\omega^2 - \omega_-^2} \right] + k_y^2 \frac{\omega^2 - \omega_1^2(r)}{\omega^2 - \omega_-^2(r)} v_{1r} = 0. \quad (51)$$

Если применить линейное разложение функции $\omega_-(r)$ вблизи точки $r \approx r_-$, уравнение (51) может быть преобразовано к виду

$$\frac{1}{r - r_-} \partial_r^2 v_{1r} - \frac{1}{(r - r_-)^2} \partial_r v_{1r} - \frac{\tilde{\lambda}_-^{-1}}{(r - r_-)^2} v_{1r} = 0. \quad (52)$$

Здесь обозначено

$$\tilde{\lambda}_-^{-1} = \frac{2}{r} \frac{v_A^2}{v_A^2 + v_s^2} \left[\frac{\omega_-^2 - \omega_s^2}{\omega_-^2 - \omega_c^2} \right].$$

Общее решение уравнения (52) имеет вид

$$v_{1r} = (r - r_-) \times \left[a J_2 \left(2 \sqrt{\frac{r - r_-}{\tilde{\lambda}_-}} \right) + b Y_2 \left(2 \sqrt{\frac{r - r_-}{\tilde{\lambda}_-}} \right) \right], \quad (53)$$

где $J_2(z), Y_2(z)$ — функции Бесселя второго порядка; a, b — произвольные постоянные.

Если $r \rightarrow r_-$,

$$v_{1r} \sim a(r - r_-) + b \left[-\frac{1}{\pi} + \frac{r - r_-}{2\pi\tilde{\lambda}_-} \left(\ln \sqrt{\frac{r - r_-}{2\tilde{\lambda}_-}} - i \frac{\pi}{2} \right) \right]. \quad (54)$$

Таким образом, по мере приближения к точке r_- амплитуда волны в радиальной компоненте смещения v_{1r} стремится к конечной величине. Однако в азимутальной компоненте волна имеет логарифмическую сингулярность

$$v_{1y} \sim \frac{b}{2\pi\tilde{\lambda}_-} \left(\ln \sqrt{\frac{r - r_-}{2\tilde{\lambda}_-}} - i \frac{\pi}{2} \right). \quad (55)$$

Азимутальная и продольная компоненты электрического и магнитного поля будут иметь вид

$$E_{1r} \sim B_0 \frac{b}{2\pi\tilde{\lambda}_-} \left(\ln \sqrt{\frac{r - r_-}{2\tilde{\lambda}_-}} - i \frac{\pi}{2} \right),$$

$$E_{1y} \sim B_0 \frac{r - r_-}{2\pi\tilde{\lambda}_-} \left(\ln \sqrt{\frac{r - r_-}{2\tilde{\lambda}_-}} - i \frac{\pi}{2} \right),$$

$$E_{1\varphi} = 0, \quad B_{1r} = B_{1y} = 0,$$

$$B_{1\varphi} \sim B_0 \frac{b}{2\pi\tilde{\lambda}_-} \left(\ln \sqrt{\frac{r - r_-}{2\tilde{\lambda}_-}} - i \frac{\pi}{2} \right).$$

Таким образом, если в плоской модели точка $r_$ имела смысл точки отражения, то в кривой модели она является точкой вторичного (логарифмического) резонанса. Аналога этой точки в плоской модели нет.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сопоставим результаты анализа цилиндрической модели с плоской моделью, разобранный в разделе 2, а также с дипольной моделью, изученной в работах [Климушкин, 1997; Klimushkin, 1998; Klimushkin et al., 2004].

Сначала рассмотрим альфвеновскую моду. Как мы видели в разделе 2, в плоском случае у альфвеновской моды в отличие от ММЗ не было поверхности отражения. Поскольку разность $\omega_A^2 - \omega_2^2$ пропорциональна давлению плазмы, в цилиндрической модели, но с холодной плазмой, альфвеновская мода также не имеет поверхности отражения. Таким образом, для альфвеновской моды поверхность отражения существует только в плазме конечного давления с кривыми силовыми линиями. Резонансная особенность носит логарифмический характер, как и в плоской модели, но фаза испытывает скачок на $\pi/2$, а не на π , как в плоской модели. Все эти результаты соответствуют результатам, полученным в дипольной модели магнитосферы, где учитывалась неоднородность плазмы и магнитного поля вдоль силовых линий [Климушкин, 1997; Klimushkin, 1998; Klimushkin et al., 2004].

Ситуация с ММЗ несколько иная. В плоском случае поверхность отражения ММЗ определялась равенством $\omega = \omega_-(r)$ и была расположена правее резонансной поверхности ММЗ. При этом при увеличении азимутальной компоненты волнового вектора k_y , область прозрачности ММЗ сужалась. В цилиндрическом случае поверхность отражения ММЗ определяется соотношением $\omega = \omega_1(r)$. В этом случае она расположена левее резонансной поверхности ММЗ. Разность между частотой отражения ММЗ и соответствующей резонансной частотой определяется только параметрами плазмы и магнитного поля и не зависит от величины k_y . Таким образом, область прозрачности ММЗ в цилиндрической модели значительно шире, чем в плоской модели. Этот результат соответствует результатам дипольной модели [Климушкин, 1997; Klimushkin, 1998].

Характер резонансной особенности в ММЗ в плоской и цилиндрической моделях одинаков. В данном случае дипольная модель дает иные результаты [Климушкин, 1997; Klimushkin, 1998], что, по видимому, является ее артефактом. Действительно, снова обратимся к уравнению (42) для ММЗ. Как уже отмечалось, различие между частотами ω_c и ω_- в азимутально-мелкомасштабном пределе стремится к нулю. Если пренебречь также различием между частотами ω_c и ω_s , в азимутально-мелкомасштабном пределе вторым слагаемым этого уравнения, казалось бы, также можно пренебречь. Тогда оно примет вид

$$\partial_r \partial_r v_{1r} - k_y^2 \frac{\omega^2 - \omega_1^2(r)}{\omega^2 - \omega_c^2(r)} v_{1r} = 0, \quad (56)$$

что совпадает с уравнением для ММЗ, полученным в дипольной модели в работах [Климушкин, 1997; Klimushkin, 1998]. Как нетрудно видеть, резонансная особенность в уравнении (55) имеет вид $v_{1r} \sim (r - r_c) \ln(r - r_c)$, что отличается от правильного результата (46) $v_{1r} \sim \ln(r - r_c)$. Кроме того, уравнение (56) не содержит вторичного (логарифмического) резонанса. Таким образом, можно сделать вывод, что методы исследования азимутально-мелкомасштабных волн в дипольной модели, используемые в [Климушкин, 1997; Klimushkin, 1998], являются слишком грубыми для исследования поведения ММЗ вблизи резонансной поверхности, хотя вполне подходящими для исследования этой моды вблизи поверхности отражения.

Следует отметить, что есть два вопроса, непосредственно касающиеся темы настоящего исследования, но оставшиеся за рамками статьи. Первый из них — баллонная неустойчивость, для развития которой необходимо наличие кривизны силовых линий и конечное плазменное давление [Burdo et al., 2000; Агапитов и др., 2006; Liu, 1997; Bhattacharjee et al., 1998; Golovchanskaya et al., 2006]. Неустойчивость возникает на ММЗ-ветви колебаний при резком уменьшении давления с расстоянием от Земли [Cheremnykh, Parnowski, 2004; Мазур и др., 2012; Rubtsov et al., 2018b]. В данной статье мы рассматриваем моды, устойчивые относительно баллонных возмущений. Кроме того, в бесстолкновительной плазме (плазме земной магнитосферы) корректный учет конечного давления возможен только в рамках кинетики, когда в плазме возможно существование УНЧ-мод, не возникающих в рамках МГД — таких как дрейфовые компрессионные и зеркальные моды [Михайловский, Фридман, 1966; Hasegawa, 1969; Rosenbluth, 1981]. В неоднородной плазме эти моды сцеплены с альфвеновскими [Chen, Hasegawa, 1991]. Исследование этого сцепления в рамках цилиндрической модели было произведено в работах [Pokhotelov et al., 1985; Woch et al., 1988; Klimushkin et al., 2012], в рамках более реалистичной дипольной модели — в работе [Mager, Klimushkin, 2017].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам анализа цилиндрической модели для одномерно-неоднородной плазмы конечного давления с кривыми силовыми линиями сделано следующее.

1. Получено обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее поперечную структуру альфвеновских, БМЗ- и ММЗ-мод. С помощью ВКБ-приближения установлены области прозрачности данных мод.

2. Исследован характер особенностей на магнитных оболочках альфвеновского и ММЗ-резонансов с учетом кривизны силовых линий и конечного давления. В плоском случае альфвеновская волна представляет собой изолированный резонансный пик, а в кривой геометрии решение вблизи точки резонанса имеет осцилляционный характер, в то время как поведение резонансной особенности ММЗ в плоской и цилиндрической моделях одинаково. Характер резонансной

особенности ММЗ в цилиндрической модели отличается от полученных результатов в дипольной модели в работах [Климушкин, 1997; Klimushkin, 1998].

3. Показано, что поведение ММЗ вблизи поверхности отражения $\omega = \omega_1(r)$ в цилиндрической модели совпадает с поведением в дипольной модели. Что касается точки поворота в плоском случае $\omega = \omega_-(r)$, то при учете кривизны силовых линий она становится точкой вторичного (логарифмического) резонанса уравнения для ММЗ.

Работа выполнена в рамках базового финансирования программы ФНИ П.12. Авторы благодарны П.Н. Магеру за ценные замечания и предложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Агапитов А.В., Черемных О.К. Поляризация резонансных УНЧ-возмущений в магнитосфере Земли // Кинематика и физика небесных тел. 2011. Т. 27. С. 17–27.

Агапитов А.В., Парновский А.С., Черемных О.К. Спектр поперечно-мелкомасштабных возмущений во внутренней магнитосфере Земли // Кинематика и физика небесных тел. 2006. Т. 22, № 6. С. 387–401.

Бернгардт О.И. Влияние факторов космической погоды на работу радиосредств // Солнечно-земная физика. 2017. Т. 3, № 3. С. 40–60. DOI: [10.12737/szf-33201705](https://doi.org/10.12737/szf-33201705).

Бурдо О.С., Черемных О.К., Верхоглядова О.П. Изучение баллонных мод во внутренней магнитосфере Земли // Изв. АН. Сер. физ. 2000. Т. 64, № 9. С. 1896–1900.

Гульельми А.В., Золотухина Н.А. Возбуждение альвеновских колебаний магнитосферы асимметричным кольцевым током // Иссл. по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца. 1980. Вып. 50. С. 129–138.

Гульельми А.В., Потапов А.С. Об особенностях поля МГД-волны в неоднородной плазме // Иссл. по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца. 1984. Вып. 70. С. 149–157.

Золотухина Н.А. О возбуждении альвеновских волн в магнитосфере движущимся источником // Иссл. по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца. 1974. Вып. 34. С. 20–23.

Климушкин Д.Ю., Пространственная структура азимутально-мелкомасштабных гидромагнитных волн в аксиально-симметричной магнитосфере с конечным давлением плазмы // Физика плазмы. 1997. Т. 23, № 10. С. 931–944.

Костарев Д.В., Магер П.Н. Дрейфово-компрессионные волны, распространяющиеся в направлении дрейфа энергичных электронов в магнитосфере // Солнечно-земная физика. 2017. Т. 3, № 3. С. 20–29. DOI: [10.12737/szf-33201703](https://doi.org/10.12737/szf-33201703).

Магер П.Н., Климушкин Д.Ю. Генерация альвеновских волн движущейся неоднородностью плазмы в магнитосфере // Физика плазмы. 2007. Т. 33, № 5. С. 435–442.

Мазур Н.Г., Федоров Е.Н., Пилипенко В.А. Дисперсионное соотношение для баллонных мод и условие их устойчивости в околоземной плазме // Геомагнетизм и аэронаука. 2012. Т. 52, № 5. С. 639–648.

Мазур В.А., Чуйко Д.А. Неустойчивость Кельвина–Гельмгольца на магнитопаузе, МГД-волновод во внешней магнитосфере и альвеновский резонанс в глубине магнитосферы // Физика плазмы. 2013. Т. 39, № 6. С. 556–571.

Михайловский А.Б., Фридман А.М. Дрейфовые волны в плазме конечного давления // Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 51. С. 1430.

Моисеев А.В., Баишев Д.Г., Муллаяров В.А., и др. Развитие компрессионных длиннопериодных пульсаций на восстановительной фазе магнитной бури 23 мая 2007 г. // Космические исследования. 2016. Т. 54, № 1. С. 34–43.

Черемных О.К., Климушкин Д.Ю., Костарев Д.В. О структуре азимутально-мелкомасштабных УНЧ-колебаний

горячей космической плазмы в кривом магнитном поле. Моды с непрерывным спектром // Кинематика и физика небесных тел. 2014. Т. 30, № 5. С. 3–21.

Черемных О.К., Климушкин Д.Ю., Магер П.Н. О структуре азимутально-мелкомасштабных УНЧ-колебаний горячей космической плазмы в кривом магнитном поле. Моды с дискретным спектром // Кинематика и физика небесных тел. 2016. Т. 5, № 3. С. 3–21.

Bhattacharjee A., Ma Z.W., Wang X. Dynamics of thin current sheets and their disruption by ballooning instabilities: A mechanism for magnetospheric substorms // Physics of plasmas. 1998. V. 5. P. 2001–2009. DOI: [10.1063/1.872871](https://doi.org/10.1063/1.872871).

Chen L., Hasegawa A. A theory of long period magnetic pulsations. I. Steady state excitation of field line resonance // J. Geophys. Res. 1974. V. 79. P. 1024–1032. DOI: [10.1029/JA079i007p01024](https://doi.org/10.1029/JA079i007p01024).

Chen L., Hasegawa A. Kinetic theory of geomagnetic pulsations: I. Internal excitations by energetic particles // J. Geophys. Res. 1991. V. 96. P. 1503–1512. DOI: [10.1029/90JA02346](https://doi.org/10.1029/90JA02346).

Chelpanov M.A., Mager O.V., Mager P.N., et al. Properties of frequency distribution of Pc5-range pulsations observed with the Ekaterinburg decameter radar in the nightside ionosphere // J. Atmos. Solar-Terr. Phys. 2018. V. 167. P. 177–183. DOI: [10.1016/j.jastp.2017.12.002](https://doi.org/10.1016/j.jastp.2017.12.002).

Chelpanov M.A., Mager O.V., Klimushkin D.Yu., et al. Experimental evidence of drift compressional waves in the magnetosphere: An Ekaterinburg coherent decameter radar case study // J. Geophys. Res.: Space Phys. 2016. V. 121. P. 1315–1326. DOI: [10.1002/2015JA022155](https://doi.org/10.1002/2015JA022155).

Cheremnykh O.K., Kryshchal A.N., Tkachenko A.A. Kink mode $m = 1$ in magnetic tube with discontinuous magnetic field // Adv. Space Res. 2018. V. 61. P. 603–610. DOI: [10.1016/j.asr.2017.05.026](https://doi.org/10.1016/j.asr.2017.05.026).

Cheremnykh O.K., Parnowski A.S. The theory of ballooning perturbations in the inner magnetosphere of the Earth // Adv. Space Res. 2004. V. 33. P. 769–773.

Golovchanskaya I.V., Kullen A., Maltsev Y.P., et al. Ballooning instability at the plasma sheet-lobe interface and its implications for polar arc formation // J. Geophys. Res. 2006. V. 111. A11216. DOI: [10.1029/2005JA011092](https://doi.org/10.1029/2005JA011092).

Hasegawa A. Drift mirror instability of the magnetosphere // Physics of Fluids. 1969. V. 12. P. 2642–2650. DOI: [10.1063/1.1692407](https://doi.org/10.1063/1.1692407).

Kaneko T., Goossens M., Soler R., et al. Apparent cross-field superslow propagation of magnetohydrodynamic waves in solar plasmas // The Astrophysical J. 2015. V. 812, N 2. P. 2369–2375. DOI: [10.1088/0004-637X/812/2/121](https://doi.org/10.1088/0004-637X/812/2/121).

Klimushkin D.Yu. Theory of azimuthally small-scale hydro-magnetic waves in the axisymmetric magnetosphere with finite plasma pressure // Ann. Geophys. 1998. V. 16. P. 303–321.

Klimushkin D.Yu., Mager P.N., Glassmeier K.H. Toroidal and poloidal Alfvén waves with arbitrary azimuthal wave numbers in a finite pressure plasma in the Earth's magnetosphere // Ann. Geophys. 2004. V. 22, iss. 1. P. 267–288. DOI: [10.5194/angeo-22-267-2004](https://doi.org/10.5194/angeo-22-267-2004).

Klimushkin D.Yu., Mager P.N., Pilipenko V.A. On the ballooning instability of the coupled Alfvén and drift compressional modes // Earth, Planets and Space. 2012. V. 64. P. 777–781. DOI: [10.5047/eps.2012.04.002](https://doi.org/10.5047/eps.2012.04.002).

Leonovich A.S., Klimushkin D.Yu., Mager P.N. Experimental evidence for the existence of monochromatic transverse small-scale standing Alfvén waves with spatially dependent polarization // J. Geophys. Res. Space Phys. 2015. V. 120. P. 5443–5454. DOI: [10.1002/2015JA021044](https://doi.org/10.1002/2015JA021044).

Leonovich A.S., Mazur V.A. A theory of transverse small-scale standing Alfvén waves in an axially symmetric magnetosphere // Planet. Space Sci. 1993. V. 41. P. 697–717. DOI: [10.1016/0032-0633\(93\)90055-7](https://doi.org/10.1016/0032-0633(93)90055-7).

Liu W.W. Physics of the explosive growth phase: Ballooning instability revisited // J. Geophys. Res. 1997. V. 102. P. 4927–4931. DOI: [10.1029/96JA03561](https://doi.org/10.1029/96JA03561).

Mager P.N., Mikhailova O.S., Mager O.V., et al. Eigenmodes of the Transverse Alfvénic Resonator at the Plasmapause: A Van Allen Probes Case Study // *Geophys. Res. Lett.* 2018. V. 45. P. 10,796–10,804. DOI: [10.1029/2018GL079596](https://doi.org/10.1029/2018GL079596).

Mager P.N., Klimushkin D.Yu. Non-resonant instability of coupled Alfvén and drift compressional modes in magnetospheric plasma // *Plasma Phys. Control. Fusion*. 2017. V. 59, N 9. P. 095005. DOI: [10.1088/1361-6587/aa790c](https://doi.org/10.1088/1361-6587/aa790c).

McPherron R.L. Magnetic pulsations: Their sources and relation to solar wind and geomagnetic activity // *Surveys in Geophysics*. 2005. V. 26. P. 545–592. DOI: [10.1007/s10712-005-1758-7](https://doi.org/10.1007/s10712-005-1758-7).

Moore T.E., Gallagher D.L. MHD wave breaking in the outer plasmasphere // *Geophys. Res. Lett.* 1987. V. 14. P. 1007–1010.

Pokhotelov O.A., Pilipenko V.A., Amata E. Drift anisotropy instability of a finite-beta magnetospheric plasma // *Planet. Space Sci.* 1985. V. 33. P. 1229–1241. DOI: [10.1016/0032-0633\(85\)90001-7](https://doi.org/10.1016/0032-0633(85)90001-7).

Rae I.J., Murphy K.R., Watt C.E.J., et al. Field line resonances as a trigger and a tracer for substorm onset // *J. Geophys. Res.: Space Physics*. 2014. V. 119. P. 5343–5363. DOI: [10.1002/2013JA018889](https://doi.org/10.1002/2013JA018889).

Rosenbluth M.N. Magnetic trapped-particle modes // *Phys. Rev. Lett.* 1981. V. 46. P. 1525–1528. DOI: [10.1103/PhysRevLett.46.1525](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.46.1525).

Rubtsov A.V., Agapitov O.V., Mager P.N., et al. Drift Resonance of Compressional ULF Waves and Substorm-Injected Protons From Multipoint THEMIS Measurements // *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2018a. V. 123. P. 9406–9419. DOI: [10.1029/2018JA025985](https://doi.org/10.1029/2018JA025985).

Rubtsov A.V., Mager P.N., Klimushkin D.Yu. Ballooning instability of azimuthally small scale coupled Alfvén and slow magnetoacoustic modes in two-dimensionally inhomogeneous magnetospheric plasma // *Physics of Plasmas*. 2018b. V. 25, N 10. P. 102903. DOI: [10.1063/1.5051474](https://doi.org/10.1063/1.5051474).

Southwood L. Some features of field line resonances in the magnetosphere // *Planet. Space Sci.* 1974. V. 22. P. 483–491. DOI: [10.1016/0032-0633\(74\)90078-6](https://doi.org/10.1016/0032-0633(74)90078-6).

Southwood D.J., Saunders M.A. Curvature coupling of slow and Alfvén MHD waves in a magnetotail field configuration // *Planet. Space Sci.* 1985. V. 33. P. 127–134. DOI: [10.1016/0032-0633\(85\)90149-7](https://doi.org/10.1016/0032-0633(85)90149-7).

Takahashi K., Denton R.E., Motoba T., et al. Impulsively Excited Nightside Ultralow Frequency Waves Simultaneously Observed on and off the Magnetic Equator // *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2018. V. 45. P. 7918–7926. DOI: [10.1029/2018GL078731](https://doi.org/10.1029/2018GL078731).

Ukhorskiy A.Y., Sitnov M.I., Takahashi K., et al. Radial transport of radiation belt electrons due to stormtime Pc5 waves // *Ann. Geophys.* 2009. V. 27. P. 2173–2181. DOI: [10.5194/angeo-27-2173-2009](https://doi.org/10.5194/angeo-27-2173-2009).

Walker A.D.M. Theory of magnetospheric standing hydromagnetic waves with large azimuthal wave number, 1, Coupled magnetosonic and Alfvén waves // *J. Geophys. Res.* 1987. V. 101. P. 27133–27148. DOI: [10.1029/96JA02701](https://doi.org/10.1029/96JA02701).

Woch J., Kremser G., Korth A., et al. Curvature-driven drift mirror instability in the magnetosphere // *Planet. Space Sci.* 1988. V. 36. P. 383–393. DOI: [10.1016/0032-0633\(88\)90126-2](https://doi.org/10.1016/0032-0633(88)90126-2).

Yumoto K. Characteristics of localized resonance coupling oscillations of the slow magnetosonic wave in a non-uniform plasma // *Planet. Space Sci.* 1985. V. 33. P. 1029–1036. DOI: [10.1016/0032-0633\(85\)90021-2](https://doi.org/10.1016/0032-0633(85)90021-2).

REFERENCES

Agapitov A.V., Cheremnykh O.K. Polarization of ULF waves in the Earth's magnetosphere. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. 2011, vol. 27, no. 3, pp. 117–123. DOI: [10.3103/S08845913111030020](https://doi.org/10.3103/S08845913111030020).

Agapitov A.V., Parnowski A.S., Cheremnykh O.K. Spectrum of transversally small-scale perturbations in the inner Earth's magnetosphere. *Kinematika i Fizika Nebesnykh Tel.* [Kinematics and Physics of Celestial Bodies]. 2006. vol. 22, no. 6, pp. 387–401. (In Russian).

Berngardt O., Space weather impact on radio device operation. *Solar-Terr. Phys.* 2017, vol. 3, no. 3, pp. 37–53. DOI: [10.12737/stp-33201705](https://doi.org/10.12737/stp-33201705).

Bhattacharjee A., Ma Z., Wang X. Dynamics of thin current sheets and their disruption by ballooning instabilities: A mechanism for magnetospheric substorms. *Physics of Plasmas*. 1998, vol. 5, pp. 2001–2009. DOI: [10.1063/1.872871](https://doi.org/10.1063/1.872871).

Burdo O.S., Cheremnykh O.K., Verkhoglyadova O.P. Study of ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth. *Izvestiya Akademii nauk. Fizika* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics]. 2000, vol. 64, pp. 1896–1900. (In Russian).

Chen L., Hasegawa A. A theory of long period magnetic pulsations. 1. Steady state excitation of field line resonance. *J. Geophys. Res.* 1974, vol. 79, iss. 7, pp. 1024–1032. DOI: [10.1029/JA079i007p01024](https://doi.org/10.1029/JA079i007p01024).

Chen L., Hasegawa A. Kinetic theory of geomagnetic pulsations: 1. Internal excitations by energetic particles. *J. Geophys. Res.* 1991, vol. 96, pp. 1503–1512. DOI: [10.1029/90JA02346](https://doi.org/10.1029/90JA02346).

Chelpanov M.A., Mager O.V., Mager P.N., Klimushkin D.Yu., Berngardt O.I. Properties of frequency distribution of Pc5-range pulsations observed with the Ekaterinburg decameter radar in the nightside ionosphere. *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.* 2018, vol. 167, pp. 177–183. DOI: [10.1016/j.jastp.2017.12.002](https://doi.org/10.1016/j.jastp.2017.12.002).

Chelpanov M.A., Mager O.V., Klimushkin D.Yu., Berngardt O.I., Mager O.V. Experimental evidence of drift compressional waves in the magnetosphere: An Ekaterinburg coherent decameter radar case study. *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2016. V. 121. P. 1315–1326. DOI: [10.1002/2015JA022155](https://doi.org/10.1002/2015JA022155).

Cheremnykh O.K., Klimushkin D., Kostarev D.V. On the structure of azimuthally small-scale ULF oscillations of hot space plasma in a curved magnetic field. Modes with continuous spectrum. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. 2014, vol. 30, no. 5, pp. 209–222.

Cheremnykh O.K., Klimushkin D.Yu., Mager P.N. On the Structure of Azimuthally Small-Scale ULF Oscillations of a Hot Space Plasma in a Curved Magnetic Field: Modes with Discrete Spectra. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*. 2016, vol. 32, no. 3, pp. 120–128.

Cheremnykh O.K., Kryshchal A.N., Tkachenko A.A. Kink mode $m = 1$ in magnetic tube with discontinuous magnetic field. *Adv. Space Res.* 2018, vol. 61, pp. 603–610. DOI: [10.1016/j.asr.2017.05.026](https://doi.org/10.1016/j.asr.2017.05.026).

Cheremnykh O.K., Parnowski A.S. The theory of ballooning perturbations in the inner magnetosphere of the Earth. *Adv. Space Res.* 2004, vol. 33, pp. 769–773.

Guglielmi A.V., Zolotukhina N.A. Excitation of Alfvén oscillations of the magnetosphere by the asymmetric ring current. *Issledobaniya po geomagnetizmu, aeronomii i fizike Solntsa* [Res. on Geomagnetism, Aeronomy and Solar Physics]. 1980, vol. 50, pp. 129–137. (In Russian).

Guglielmi A.V., Potapov A.S. Concerning one peculiarity of the MHD-wave field in an inhomogeneous plasma. *Issledobaniya po geomagnetizmu, aeronomii i fizike Solntsa* [Res. on Geomagnetism, Aeronomy and Solar Physics]. 1984, vol. 70, pp. 149–157. (In Russian).

Golovchanskaya I.V., Kullen A., Maltsev Y.P., Biernat H. Ballooning instability at the plasma sheet-lobe interface and its implications for polar arc formation. *J. Geophys. Res.* 2006, vol. 111, no. A11216. DOI: [10.1029/2005JA011092](https://doi.org/10.1029/2005JA011092).

Hasegawa A. Drift mirror instability of the magnetosphere. *Physics of Fluids*. 1969, vol. 12, pp. 2642–2650. DOI: [10.1063/1.1692407](https://doi.org/10.1063/1.1692407).

Kaneko T., Goossens M., Soler R., Terradas J., Van Doorselaere T., Yokoyama T., Wright A.N. Apparent cross-field superslow propagation of magnetohydrodynamic waves in solar plasmas. *The Astrophysical J.* 2015, vol. 812, no. 2, pp. 2369–2375. DOI: [10.1088/0004-637X/812/2/121](https://doi.org/10.1088/0004-637X/812/2/121).

Klimushkin D.Yu. Spatial structure of small-scale azimuthal hydromagnetic waves in an axisymmetric magnetospheric plasma with finite pressure. *Plasma Phys. Rep.* 1997, vol. 23, pp. 858–871.

Klimushkin D.Yu. Theory of azimuthally small-scale hydromagnetic waves in the axisymmetric magnetosphere with finite plasma pressure. *Ann. Geophys.* 1998, vol. 16, pp. 303–321.

Klimushkin D.Yu., Mager P.N., Glassmeier K.H. Toroidal and poloidal Alfvén waves with arbitrary azimuthal wave numbers in a finite pressure plasma in the Earth's magnetosphere. *Ann. Geophys.* 2004, vol. 22, pp. 267–288. DOI: [10.5194/angeo-22-267-2004](https://doi.org/10.5194/angeo-22-267-2004).

Klimushkin D.Yu., Mager P.N., Pilipenko V.A. On the ballooning instability of the coupled Alfvén and drift compressional modes. *Earth, Planets and Space.* 2012, vol. 64, pp. 777–781. DOI: [10.5047/eps.2012.04.002](https://doi.org/10.5047/eps.2012.04.002).

Kostarev D.V., Mager P.N. Drift-compression waves propagating in the direction of energetic electron drift in the magnetosphere. *Solar-Terr. Phys.* 2017, vol. 3, iss. 3, pp. 18–27. DOI: [10.12737/stp-33201703](https://doi.org/10.12737/stp-33201703).

Leonovich A.S., Klimushkin D.Yu., Mager P.N. Experimental evidence for the existence of monochromatic transverse small-scale standing Alfvén waves with spatially dependent polarization. *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2015, vol. 120, pp. 5443–5454. DOI: [10.1002/2015JA021044](https://doi.org/10.1002/2015JA021044).

Leonovich A.S., Mazur V.A. A theory of transverse small-scale standing Alfvén waves in an axially symmetric magnetosphere. *Planetary Space Sci.* 1993, vol. 41, pp. 697–717. DOI: [10.1016/0032-0633\(93\)90055-7](https://doi.org/10.1016/0032-0633(93)90055-7).

Liu W.W. Physics of the explosive growth phase: Ballooning instability revisited. *J. Geophys. Res.* 1997, vol. 102, no. A3, iss. 2156–2202, pp. 4927–4931. DOI: [10.1029/96JA03561](https://doi.org/10.1029/96JA03561).

Mager P.N., Klimushkin D.Yu. Generation of Alfvén waves by a plasma inhomogeneity moving in the Earth's magnetosphere. *Plasma Phys. Rep.* 2007, vol. 33, pp. 391–398. DOI: [10.1134/S1063780X07050042](https://doi.org/10.1134/S1063780X07050042).

Mager P.N., Mikhailova O.S., Mager O.V., D.Yu. Klimushkin. Eigenmodes of the transverse Alfvénic resonator at the plasmapause: A Van Allen probes case study. *Geophys. Res. Lett.* 2018, vol. 45, pp. 10,796–10,804. DOI: [10.1029/2018GL079596](https://doi.org/10.1029/2018GL079596).

Mager P.N., Klimushkin D.Yu. Non-resonant instability of coupled Alfvén and drift compressional modes in magnetospheric plasma. *Plasma Physics and Controlled Fusion.* 2017, vol. 59, no. 9, p. 095005 DOI: [10.1088/1361-6587/aa790c](https://doi.org/10.1088/1361-6587/aa790c).

Mazur N.G., Fedorov E.N., Pilipenko V.A. Dispersion relation for ballooning modes and condition of their stability in the near-Earth plasma. *Geomagnetism and Aeronomy.* 2012, vol. 52, pp. 603–612.

Mazur V.A., Chuiko D.A. Kelvin-Helmholtz instability on the magnetopause, magnetohydrodynamic waveguide in the outer magnetosphere, and Alfvén resonance deep in the magnetosphere. *Plasma Phys. Rep.* 2013, vol. 39, no. 6, pp. 488–503.

McPherron R.L. Magnetic pulsations: Their sources and relation to solar wind and geomagnetic activity // *Surveys in Geophysics.* 2005. V. 26. P. 545–592. DOI: [10.1007/s10712-005-1758-7](https://doi.org/10.1007/s10712-005-1758-7).

Mikhailovskii A.B., Fridman A.M. Drift waves in a finite-pressure plasma. *Soviet J. Experimental and Theoretical Phys.* 1967, vol. 24, pp. 965–974.

Moiseev A.V., Baishev D.G., Mullayarov V.A., et al. The development of compression long-period pulsations on the recovery phase of the magnetic storm on May 23, 2007. *Cosmic Res.* 2016, vol. 54, pp. 31–39. DOI: [10.1134/S0010952516010123](https://doi.org/10.1134/S0010952516010123).

Moore T.E., Gallagher D.L. MHD wave breaking in the outer plasmasphere. *Geophys. Res. Lett.* 1987, vol. 14, no. 10, pp. 1007–1010.

Pokhotelov O.A., Pilipenko V.A., Amata E. Drift anisotropy instability of a finite-beta magnetospheric plasma. *Planet. Space Sci.* 1985, vol. 33, pp. 1229–1241. DOI: [10.1016/0032-0633\(85\)90001-7](https://doi.org/10.1016/0032-0633(85)90001-7).

Rae I.J., Murphy K.R., Watt C.E.J., Rostoker G., Rankin R., Mann I.R. Field line resonances as a trigger and a tracer for substorm onset. *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2014, vol. 119, no. 1, pp. 5343–5363. DOI: [10.1002/2013JA018889](https://doi.org/10.1002/2013JA018889).

Rosenbluth M.N. Magnetic trapped-particle modes. *Phys. Rev. Lett.* 1981, vol. 46, pp. 1525–1528. DOI: [10.1103/PhysRevLett.46.1525](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.46.1525).

Rubtsov A.V., Agapitov O.V., Mager P.N., Klimushkin D.Yu., Mager O.V., Mozer F.S., Angelopoulos V. Drift resonance of compressional ULF waves and substorm-injected protons from multipoint THEMIS measurements. *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2018a, vol. 123, no. 11, pp. 9406–9419. DOI: [10.1029/2018JA025985](https://doi.org/10.1029/2018JA025985).

Rubtsov A.V., Mager P.N., Klimushkin D.Yu. Ballooning instability of azimuthally small scale coupled Alfvén and slow magnetoacoustic modes in two-dimensionally inhomogeneous magnetospheric plasma. *Physics of Plasmas.* 2018b, vol. 25, no. 10, 102903 p. DOI: [10.1063/1.5051474](https://doi.org/10.1063/1.5051474).

Southwood L. Some features of field line resonances in the magnetosphere. *Planet. Space Sci.* 1974, vol. 22, pp. 483–491. DOI: [10.1016/0032-0633\(74\)90078-6](https://doi.org/10.1016/0032-0633(74)90078-6).

Southwood D.J., Saunders M.A. Curvature coupling of slow and Alfvén MHD waves in a magnetotail field configuration. *Planet. Space Sci.* 1985, vol. 33, pp. 127–134. DOI: [10.1016/0032-0633\(85\)90149-7](https://doi.org/10.1016/0032-0633(85)90149-7).

Takahashi K., Denton R.E., Motoba T., et al. Impulsively Excited Nightside Ultralow Frequency Waves Simultaneously Observed on and off the Magnetic Equator. *J. Geophys. Res.: Space Phys.* 2018, vol. 45, no. 16, pp. 7918–7926. DOI: [10.1029/2018GL078731](https://doi.org/10.1029/2018GL078731).

Ukhorskiy A.Y., Sitnov M.I., Takahashi K., Anderson B.J. Radial transport of radiation belt electrons due to stormtime Pc5 waves. *Ann. Geophys.* 2009, vol. 27, pp. 2173–2181. DOI: [10.5194/angeo-27-2173-2009](https://doi.org/10.5194/angeo-27-2173-2009).

Walker A.D.M. Theory of magnetospheric standing hydromagnetic waves with large azimuthal wave number, 1, Coupled magnetosonic and Alfvén waves. *J. Geophys. Res.* 1996, vol. 101, pp. 27133–27148. DOI: [10.1029/96JA02701](https://doi.org/10.1029/96JA02701).

Woch J., Kremser G., Korth A., Pokhotelov O.A., Pilipenko V.A., Nezlina Yu.M., Amata E. Curvature-driven drift mirror instability in the magnetosphere. 1988, vol. 36, pp. 383–393. DOI: [10.1016/0032-0633\(88\)90126-2](https://doi.org/10.1016/0032-0633(88)90126-2).

Yumoto K. Characteristics of localized resonance coupling oscillations of the slow magnetosonic wave in a non-uniform plasma. *Planet. Space Sci.* 1985, vol. 33, pp. 1029–1036. DOI: [10.1016/0032-0633\(85\)90021-2](https://doi.org/10.1016/0032-0633(85)90021-2).

Zolotukhina N.A. Excitation of Alfvén waves in the magnetosphere by a moving source. *Issledobaniya po geomagnetizmu, aeronomii i fizike Solntsa* [Res. on Geomagnetism, Aeronomy and Solar Physics]. 1974, vol. 34, pp. 20–23. (In Russian).

Как цитировать эту статью

Петрацук А.В., Климушкин Д.Ю. Пространственная структура азимутально-мелкомасштабных МГД-волн в одномерно-неоднородной плазме конечного давления с кривыми силовыми линиями. *Солнечно-земная физика.* 2020. Т. 6, № 1. С. 63–74. DOI: [10.12737/szf-61202006](https://doi.org/10.12737/szf-61202006).