УДК: 539.6
DOI: 10.30987/2658-3488-2019-2019-4-33-37

В.А. Крысько, А.Д. Тебякин, О.А. Салтыкова

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Целью работы является получение аналитического решения уравнения теплопроводности для различных граничных условий в случае двумерного тела. В качестве метода решения применяется метод вариационных итераций. В работе получено как аналитическое, так и численное решение поставленной задачи для граничных условий различных типов и с учётом внутреннего источника тепла. Для получения численного решения применялся метод конечных разностей. Проведено сравнение результатов и сделан вывод о достоверности полученных решений.

Ключевые слова: *уравнение теплопроводности, метод вариационных итераций, аналитическое решение, метод конечных разностей.*

V.A. Krysko, A.D. Tebyakin, O.A. Saltykova

ANALYTICAL SOLUTION OF THE EQUATION OF CONDUCTIVITY FOR VARIOUS BOUNDARY CONDITIONS

The aim of the work is to obtain an analytical solution of the heat equation for various boundary conditions in the case of a two-dimensional body. As a solution method, the method of variational iterations is used. In the work, both an analytical and a numerical solution of the problem are obtained for the boundary conditions of various types and taking into account the internal heat source. To obtain a numerical solution, the finite difference method was used. The results are compared and the conclusion is made on the reliability of the decisions.

Keywords: *heat equation, method of variational iterations, analytical solution, finite difference method.*

Введение

При проектировании и создании различных инженерных конструкций и устройств, составными частями которых являются балки, пластинки, оболочки необходимо учитывать влияние окружающей среды и внешних воздействий различной природы, в том числе температурных [1, 2].

Для учета температурных воздействий используется дифференциальное уравнение теплопроводности [3]. При решении дифференциального уравнения в частных производных численными методами необходимо обосновать достоверность получаемого численного решения. В настоящей работе проведено сравнение численного решения уравнения второго порядка в частных производных и аналитического решения. Для получения аналитического решения используется метод вариационных итераций [4]. Этот метод был использован в работах [5, 6] для решения уравнения, описывающего перемещения тонкой прямоугольной пластины. Применяемый метод вариационных итераций обладает рядом преимуществ. Этот метод позволяет свести исходное дифференциальное уравнение в частных производных к решению обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и избавляет от необходимости выбирать начальное приближение, удовлетворяющее заданным граничным условиям, как в методе Бубнова-Галеркина [7]. Заданные вначале функции, выбранные произвольно, в процессе вычислений уточняются, исходя из решения системы дифференциальных уравнений. Данный подход позволит сравнить решения уравнения теплопроводности, полученные двумя принципиально разными методами: аналитически – методом вариационных итераций и численно – методом конечных разностей.

1. Постановка задачи

Имеется дифференциальное уравнение теплопроводности для двумерного тела.

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{1}$$

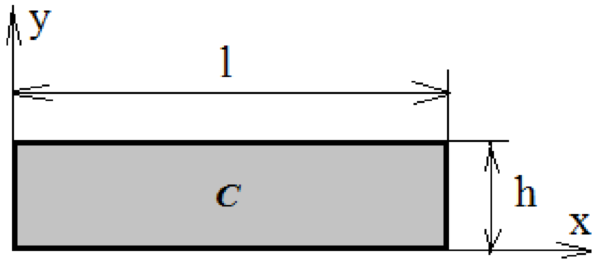

Рис. 1. Расчетная схема двумерного тела

Граничные условия:

$$T(x,0) = 0 \;\; 0 \le x \le l; T(0, y) = 0 \;\; 0 \le y \le h;\; T(l, y) = 0 \;\; 0 \le y \le h; \tag{2}$$
$$T(x, h) = 0 \;\; 0 \le x \le l;\; f(x, y) = C \ne 0 - const.$$

Граничные условия (2) соответствуют случаю, когда на границах присутствует тепловая изоляция и постоянный нагрев по всему телу, величиной *C*. Этот вариант будет решён аналитически, а так же, в качестве достоверности, найдём решение численным методом.

2. Практическая часть

Найдем решение уравнения (1), в случае, когда учитывается внутренний источник тепла С в виде (3):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = C. \tag{3}$$

Граничные условия запишем в виде:

$$\begin{aligned} &T(x,0) = 0,\;\; 0 \le x \le l;\\ &T(0, y) = 0,\; 0 \le y \le h;\\ &T(l, y) = 0,\; 0 \le y \le h;\\ &T(x, h) = 0, 0 \le x \le l. \end{aligned} \tag{4}$$

В используемом методе полагается что:

$$T(x, y) = A(x)B(y); \tag{5}$$

$$\int_0^l \int_0^h \left(\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial z^2} - C \right) T(x,y)dxdy = 0. \qquad (6)$$

Для нахождения искомого решения полагаем, что *B(y)* - любая функция, имеющая непрерывную вторую производную и не равную нулю. Тогда:

$$\int_0^l \left[\int_0^h \left(\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} B(y) + \frac{\partial^2 B(y)}{\partial y^2} A(x) - C \right) B(y)dy \right] A(x)dx = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^h \left(\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} B(y) + \frac{\partial^2 B(y)}{\partial y^2} A(x) - C \right) B(y)dy = 0; \qquad (7)$$

$$\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} \int_0^h B^2(y)dy + A(x) \int_0^h \frac{\partial^2 B(y)}{\partial y^2} B(y)dy - C \int_0^h B(y)dy = 0;$$

$$R_1 = \int_0^h B^2(y)dy > 0; \; R_2 = \int_0^h \frac{\partial^2 B(y)}{\partial y^2} B(y)dy; \; R_3 = \int_0^h B(y)dy$$

Пусть получилось неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами относительно функции *A(x)*.

$$A''(x) + \frac{R_2}{R_1} A(x) = \frac{R_3}{R_1} C. \qquad (8)$$

Решается неоднородное дифференциальное уравнение, находятся корни характеристического уравнения. В зависимости от знака константы R_2 определяется тип решения дифференциального уравнения.

$$\begin{aligned} &R_2 > 0 \Rightarrow A(x) = C_1 \cos\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}x + C_2 \sin\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}x + \frac{R_3}{R_1}C; \\ &R_2 < 0 \Rightarrow A(x) = C_1 e^{x\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}} + C_2 e^{-x\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}} + \frac{R_3}{R_1}C. \end{aligned} \qquad (9)$$

Находим константы C_1, C_2 относительно граничных условий (4). Так как константы две, нужно использовать 2 точки на границах двумерного тела. Эти точки должны лежать на одной прямой и быть параллельными оси *x*.

Аналогичным образом находиться функция *B(y)*. В ходе решения *A(x)* заменяется на *B(y)* и повторяются те же рассуждения. В итоге мы получаем функцию вида (7). Для уточнения решения проводим вторую итерацию.

Итак, для нахождения функции *T(x,y)* положим что *B(y)=sin y*, *l=h=1* и внутренний источник тепла *C=1.* Выполнив первую итерацию, получаем аналитическое решение уравнения (3) вида (10)

$$\begin{aligned} &T(x,y) = (-0.453402e^{x} - 1.2324745e^{-x} - 1.685877) * \\ &(-0.264576e^{3.166166x} - 0.625940e^{-3.166166x} + 0.652333). \end{aligned} \qquad (10)$$

На рисунке 2 приведем поверхность, соответствующую аналитическому решению.

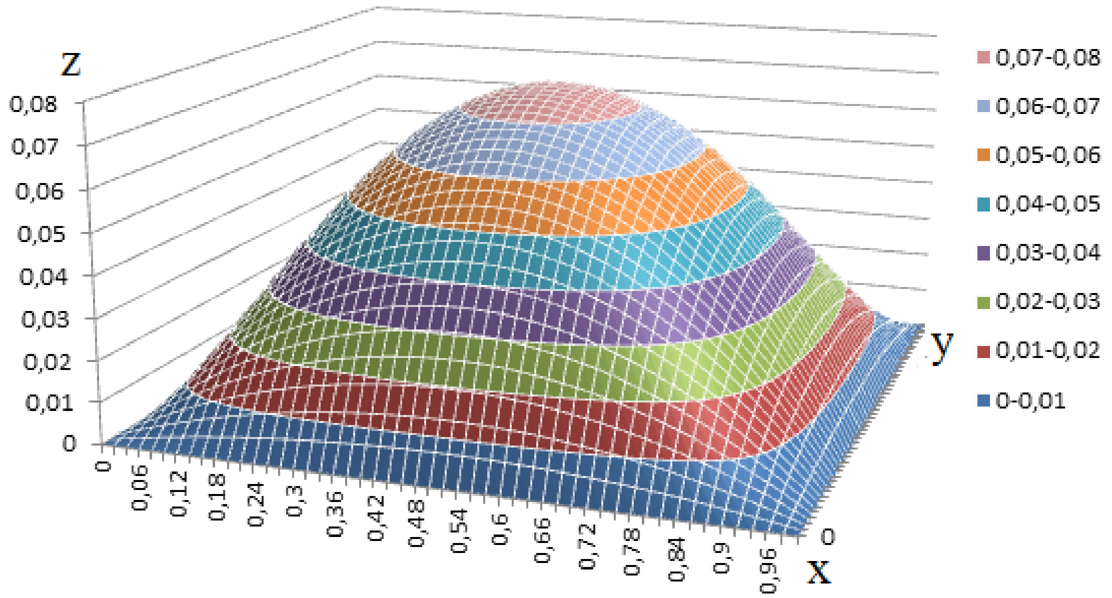

Рис. 2. Аналитическое решение

Для проверки достоверности проведём численное решение уравнения (3) с помощью метода конечных разностей. Решение, полученное методом конечных разностей с аппроксимацией второго порядка, приведено на рисунке 3. Количество разбиений по пространственной координате равно 50.

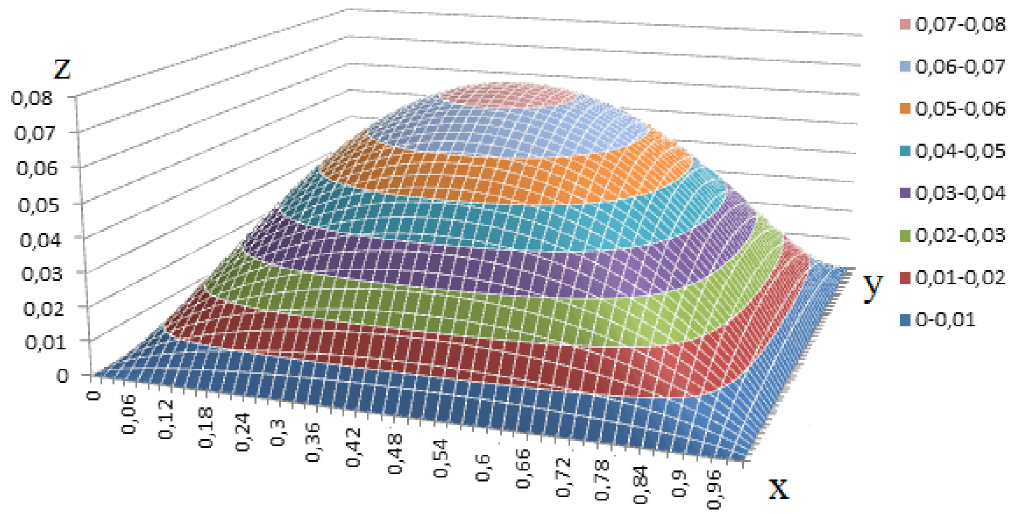

Рис. 3. Численное решение

Максимальное значение аналитического решения составляет 0.07542211, а максимум численного решения 0.07315. Разница между аналитическим и численным решением составляет 0,3 %. Учитывая, что аналитическое решение получено за одну итерацию, можно говорить о точности получаемого численного решения.

Выводы

Совпадение этих двух решений позволяет говорить о достоверности результатов получаемых численными методами и аналитически. При решении уравнения методом вариационных итераций не накладывается каких-либо ограничений на выбор исходной функции. Метод вариационных итераций может быть широко применен для получения аналитических решений дифференциальных уравнений в частных производных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 16-11-10138-П.

Список литературы:

1. Сметанников, О. Ю. (2010). Оптимизация остаточного прогиба круглой пластинки из стеклующегося полимера при неравномерном охлаждении. *Вычислительная механика сплошных сред*, *3*(1), 81-92.
2. Крылова, Е. Ю., Кутепов, И. Е., Папкова, И. В., & Крысько, В. А. (2016). Математическое моделирование контактного взаимодействия пологих геометрически нелинейных балок Бернулли-Эйлера в рамках связанной задачи термодинамики. *Нелинейный мир*, *14*(7), 36-46.
3. Добриян, В. В., Кутепов, И. Е., & Крысько, А. В. (2016). Устойчивость гибких криволинейных нано-балок в температурном поле. Молодежь и современные информационные технологии (pp. 96-97).
4. Жигалов, М. В., & Павлов, С. П. (2015). Применение метода вариационных итераций к решению задач изгиба пластин. Математические методы в технике и технологиях-ММТТ, (1), 88-91.
5. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Pavlov S.P., Zhigalov M.V., Krysko V.A. On the iterative methods of linearization, decrease of order and dimension of the Karman-type PDEs. The Scientific World Journal Volume 2014 (2014), Article ID 792829, 15 pages
6. Kerr, A. D., & Alexander, H. (1968). An application of the extended Kantorovich method to the stress analysis of a clamped rectangular plate. *Acta Mechanica*, *6*(2-3), 180-196.
7. Хуршудян, А. Ж. (2015). Метод Бубнова–Галеркина в задачах управления билинейными системами. *Автоматика и телемеханика*, (8), 46-55.

References:

1. Smetannikov, O. Yu. (2010). Optimization of the residual deflection of a glass plate of a glassy polymer during uneven cooling. Computational mechanics of continuous media, 3 (1), 81-92.
2. Krylova, E. Yu., Kutepov, I.E., Pap-kova, I.V. & Krysko, V.A. (2016). Mathematical modeling of the contact interaction of gentle geometrically nonlinear Bernoulli-Euler beams as part of the related problem of thermodynamics. Nonlinear World, 14 (7), 36-46.
3. Dobriyan, V.V., Kutepov, I.E. & Krysko, A.V. (2016). Stability of flexible curved nano-beams in a temperature field. Youth and modern information technologies (pp. 96-97).
4. Zhigalov, M.V., & Pavlov, S.P. (2015). Application of the method of variational iterations to the solution of problems of plate bending. Mathematical methods in engineering and technology-MMTT, (1), 88-91.
5. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Pavlov S.P., Zhigalov M.V., Krysko V.A. On the iterative methods of linearization, decrease of order and dimension of the Karman-type PDEs. The Scientific World Journal Volume 2014 (2014), Article ID 792829, 15 pages
6. Kerr, A. D., & Alexander, H. (1968). An application of the extended Kantorovich method to the stress analysis of a clamped rectangular plate. Acta Mechanica, 6 (2-3), 180-196.
7. Khurshudyan, A. Zh. (2015). The Bubnov – Galerkin method in control problems of bilinear systems. Automation and Telemechanics, (8), 46-55.

Статья поступила в редколлегию 22.10.19.
Рецензент: д.т.н., доцент,
Брянский государственный технический университет
Захарова А.А.
Статья принята к публикации 14.11.19.

Сведения об авторах

Крысько Вадим Анатольевич
д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Математика и моделирование» Саратовский государственный технический университет Гагарина Ю.А.
Тел.: +79372250227
E-mail: tak@san.ru

Салтыкова Ольга Александровна
к.ф.-м.н., доцент каф. «Математика и моделирование» Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
Тел.:+79379610455
E-mail: olga_a_saltykova@mail.ru

Тебякин Алексей Дмитриевич
Магистр каф. «Математика и моделирование» Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
Тел.: +79518857199
E-mail: prototype9235@mail.ru

Information about authors:

Krysko Vadim Anatolyevich
Doctor of Technical Sciences, Professor,
Head of Department "Mathematics and Modeling"
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov
Tel.: +79372250227
E-mail: tak@san.ru

Saltykova Olga Alexandrovna
Ph.D., Associate Professor "Mathematics and Modeling"
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov
Tel ...: +7 9379610455
E-mail: olga_a_saltykova@mail.ru

Tebyakin Alexey Dmitrievich
Masters Dept. "Mathematics and Modeling"
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov
Tel ...: +79518857199
E-mail: prototype9235@mail.ru