

УДК 621.833

DOI: 10.30987/article\_5d9dc9b8b76216.23606767

Б.П. Тимофеев, д.т.н., Н.Т. Дан, аспирант

(Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО), 197101, г. Санкт-Петербург, Кронверкский проспект, д.49)

E-mail: nhanthong.docs@gmail.com

## Теоретический и практический подход к определению бокового зазора в зубчатых передачах

*Рассмотрены методики расчета бокового зазора цилиндрических зубчатых передач. Сопоставлены результаты расчета по методу минимума-максимума и вероятностному (Монте Карло) методу. Параметры точности передачи приняты случайными величинами. Входные параметры расчета распределены по равномерному и нормальному законам распределения.*

**Ключевые слова:** боковой зазор; метод минимума-максимума; метод Монте Карло; гистограмма; случайная величина; распределение величин.

B.P. Timofeev, Dr. Sc. Tech., N.T. Dan, Post Graduate Student

(Saint-Petersburg National Research University of Information Technologies, Engineering and Optics

(University of ITEO), 49, Kronwerksky Avenue, Saint-Petersburg, 197101)

## Theoretical and practical approach to definition of side clearance in gearings

*Procedures for the computation of a side clearance in gearings are analyzed. The results of the computation on the basis of a minimum-maximum method and probabilistic (Monte-Carlo) one are compared. The parameters of transfer accuracy are assumed to be random ones. Input parameters of the computation are distributed according to probabilistic and normal laws of distribution.*

**Keywords:** side clearance; minimum-maximum method; Monte-Carlo method; histogram; random variable; distribution of values.

### Введение

При оценке качества зубчатых передач одним из главных критериев считаются наибольшая кинематическая погрешность и мертвый ход передачи. Очевидно, что эти показатели точности носят функциональный характер. Конкретное их значение в каждый момент времени различно. Мёртвый ход зависит от угла поворота ведущего колеса  $\varphi_1$ , т.е. от момента реверсирования передачи. ГОСТ 1643-81 [1] нормирует наибольшую кинематическую погрешность, а также минимальный и максимальный боковой зазор в передаче. Минимальный боковой зазор и класс отклонений межосевого расстояния в зависимости от вида сопряжения определяется таблицей по ГОСТ. Для каждого межосевого расстояния  $a_w$  находят конкретное значение минимального осевого зазора  $j_{n \min}$ , мкм. Что же касается  $j_{n \max}$ , то его задают косвенно по следующей формуле:

$$j_{n \max} = j_{n \min} + T_{jn}.$$

Причем значение допуска на боковой зазор непосредственно не нормируется. Допуск на боковой зазор  $T_{jn}$  определяется нормированием дополнительного смещения исходного контура  $E_n$ , отклонением средней длины общей нормали  $E_{wm}$ , отклонением толщины зуба  $E_c$ , либо отклонением измерительного межосевого расстояния  $\pm f_a$ , в зависимости от вида сопряжения и степени точности по нормам плавности работы [2, 3].

Рассмотрим показатель бокового зазора с точки зрения обеспечения качественной работы передачи. Ведь боковой зазор должен обеспечить целый ряд условий, среди которых главными являются отсутствие заклинивания и обеспечение оптимальной работы смазки. Здесь имеется ввиду не только и не столько скорость выхода смазки из впадины, но и, главным образом, «срабатывание» смазки при проходе в малых зазорах.

Зазор должен обеспечить компенсацию погрешностей изготовления зубчатых колес и других деталей передачи (в том числе корпуса, в приборостроении – плат), погрешностей монтажа и деформаций под нагрузкой.

Что касается предотвращения заклинивания, в ГОСТе 1643-81 [1] указано, что сопряжения вида «В» обеспечивает минимальную величину бокового зазора, при котором исключается возможность заклинивания стальной или чугунной передачи от нагрева при разности температур зубчатых колес и корпуса в 25 °С. ГОСТ не содержит указаний для других видов сопряжения, других разностей температур или других материалов.

В работе [4] принято что,  $j_{n \min}$  не гарантирует отсутствие заклинивания и поэтому необходимо обеспечивать дополнительное смещение исходного контура сверх обусловленного получения  $j_{n \min}$ .

Подобные подходы к нормированию бокового зазора кажутся нам утопичными, ибо предполагают, в частности, знание таких условий, как температурный режим, вязкость смазочного масла и т.д. Такие подробности стандарт не должен и не может предусматривать.

ГОСТ [1, 3] предусматривает компенсацию  $T_{jn}$  погрешностей изготовления зубчатых и не зубчатых элементов передачи и погрешностей монтажа, т.е.

$$j_{n \max} = j_{n \min} + k_j, \quad (1)$$

$$\text{где } k_j = \sqrt{(2f_a \sin \alpha)^2 + 2f_{pb}^2 + 2F_\beta^2 + (f_x \sin \alpha)^2 + (f_y \cos \alpha)^2}. \quad (2)$$

Суммирование под корнем квадратным предполагает нормальное распределение всех слагаемых  $k_{jn}$ .

Предположим отсутствие заранее определенных видов распределения случайных величин в формуле (2).

Тогда

$$j_{n \max} = j_{n \min} + 2f_a \sin \alpha + f_y \cos \alpha + f_x \sin \alpha + F_{r1} \sin \alpha + f_{pb1} + F_{\beta1} \cos \alpha + F_{r2} \sin \alpha + f_{pb2} + F_{\beta2} \cos \alpha, \quad (3)$$

где  $f_a$  – предельное отклонение межосевого расстояния;  $f_{pb}$  – предельное отклонение шага зацепления;  $F_r$  – допуск на радиальное биение зубчатого венца;  $F_\beta$  – допуск на погрешность направления зуба;  $f_x, f_y$  – допуск на непараллельность и перекося осей.

Рассчитаем  $j_{n \max}$  по формуле (3) по методу максимума-минимума. В качестве примера здесь и в дальнейшем рассмотрим передачи с  $u = 1 \div 8$  (целое число),  $m = 5$  мм; степень точ-

ности 7С. Для определения максимального значения зазора будем считать, что все слагаемые в формуле (2) имеют знак плюс.

В работе [4] приведена другая трактовка формулы (2):

$$j_{nk} = 2f_a \sin \alpha + f_y \cos \alpha + f_x \sin \alpha + F_{r1} \sin \alpha + f_{pb1} + F_{\beta1} \cos \alpha + F_{r2} \sin \alpha + f_{pb2} + F_{\beta2} \cos \alpha, \quad (4)$$

т.е. в  $j_{nk}$  (в ГОСТ1643-81 обозначение  $k_j$ ) учтено радиальное биение колес  $F_r$ , хотя согласно ГОСТа, выбор допуска на смещение исходного контура  $T_H$  производится с учетом допуска на радиальное биение зубчатого венца  $F_r$ .

Поэтому возможна следующая трактовка  $j_{n \max}$ :

$$j_{n \max} = j_{n \min} + j_{nk} = j_{n \min} + 2f_a \sin \alpha + f_y \cos \alpha + f_x \sin \alpha + f_{pb1} + F_{\beta1} \cos \alpha + f_{pb2} + F_{\beta2} \cos \alpha. \quad (5)$$

По мнению авторов использование формулы (5) оправдано, ибо при выборе, например, допуска на смещение исходного контура  $T_H$ , исходим из значения допуска на радиальное смещение зубчатого колеса  $F_r$ .

Результаты расчета максимального значения  $j_{n \max}$  по разным методикам приведены в табл. 1.

Проведем те же расчеты, предполагая, что входящие в формулу для  $j_{nk}$  слагаемые распределены равномерно в интервале минимального и максимального значений, определенных в работе [1]. Расчёт проведём методом статических испытаний (Монте Карло) [5].

Результаты математического эксперимента представлены в табл. 2.

Гистограмма распределения  $j_n$  по математическому эксперименту 1, представлена на рис. 1.

Проведем те же расчеты, предполагая нормальное распределение для всех слагаемых в формуле для  $j_{nk}$ . Результаты математического эксперимента представлены в табл. 3.

1. Результаты расчета максимального значения  $j_{n \max}$  по разным методикам

$z_1$	18 зубьев							
$u$	1	2	3	4	5	6	7	8
$j_{n \min}$ ГОСТ1643-81, мкм	87	100	100	115	130	140	140	155
$j_{n \max}$ формула (1), мкм	133,09	149,18	149,18	166,61	184,16	194,16	199,51	220,14
$j_{n \max}$ формула (3), мкм	222,20	246,10	246,10	264,52	288,07	298,07	304,91	326,75
$j_{n \max}$ формула (5), мкм	194,84	213,26	213,26	231,68	250,10	260,10	266,94	288,78

2. Результаты математического эксперимента 1

$z_1$	18 зубьев								
$u$	1	2	3	4	5	6	7	8	
$j_{n \min}$ ГОСТ1643-81, мкм	87	100	100	115	130	140	140	155	
$j_{n \min}$	94,06	107,85	104,71	120,03	135,81	144,53	148,05	161,24	
$j_{n \max}$	215,06	237,05	238,41	258,22	280,52	290,46	298,90	315,90	
$j_{n \max}$	Математическое ожидание, мкм	154,58	173,03	173,11	189,76	208,98	219,08	222,52	240,82
	Среднеквадратное отклонение, мкм	14,249	15,561	15,647	16,285	17,466	17,475	18,813	20,299
	Коэффициент асимметрии	0,008	-0,006	-0,004	0,003	-0,006	-0,001	0,001	-0,009
	Коэффициент эксцесса	-0,179	-0,172	-0,163	-0,222	-0,220	-0,229	-0,339	-0,433

Гистограмма распределения  $j_n$  по математическому эксперименту 2 представлена на рис. 2.

Распределение суммы  $j_{nk}$  в обоих случаях нормальное, что обусловлено выполнением условий центральной предельной теоремы теории вероятностей: число слагаемых велико и они равномерно мало влияют на сумму. Приведенные числовые характеристики определяют существенное расхождение в величинах  $j_{n \max}$ . При нормальном распределении слагаемых значений  $j_{n \max}$  получается существенно меньшими и такое распределение подтверждается практикой [6].

3. Результаты математического эксперимента 2

$z_1$	18 зубьев								
$u$	1	2	3	4	5	6	7	8	
$j_{n \min}$ ГОСТ1643-81, мкм	87	100	100	115	130	140	140	155	
$j_{n \min}$	129,95	145,98	147,24	162,24	182,27	187,35	189,11	202,14	
$j_{n \max}$	177,96	202,20	204,25	215,06	241,61	248,77	252,56	274,33	
$j_{n \max}$	Математическое ожидание, мкм	154,60	173,07	173,05	189,75	209,06	219,03	222,48	240,86
	Среднеквадратное отклонение, мкм	22,807	25,291	26,634	27,201	31,951	33,737	33,878	35,749
	Коэффициент асимметрии	-0,001	0,005	-0,005	0,004	-0,001	-0,011	-0,003	-0,004
	Коэффициент эксцесса	-0,012	-0,007	0,013	-0,002	-0,014	0,015	-0,021	0,010

Перейдем к сугубо практическому подходу к определению экстремальных значений  $j_n$ . Пусть критерием будет дополнительное смещение исходного контура.

$$j_n = (-E_{Hs1} - E_{Hs2} \pm 2f_a)2 \sin \alpha, \quad (6)$$

$$j_{n \min} = (-E_{Hs1} - E_{Hs2} - 2f_a)2 \sin \alpha, \quad (7)$$

$$j_{n \max} = (-E_{Hs1} - E_{Hs2} + T_{H1} + T_{H2} + 2f_a)2 \sin \alpha, \quad (8)$$

Определим значение  $j_n$  по методу максимума-минимума (табл. 4).

Далее произведем математический эксперимент, считая, что слагаемые в формулах (5), (6) распределены равномерно (табл. 5):

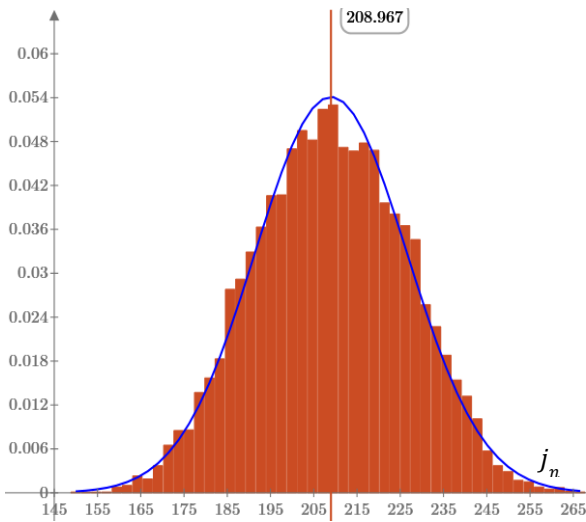


Рис. 1. Гистограмма эксперимента 1

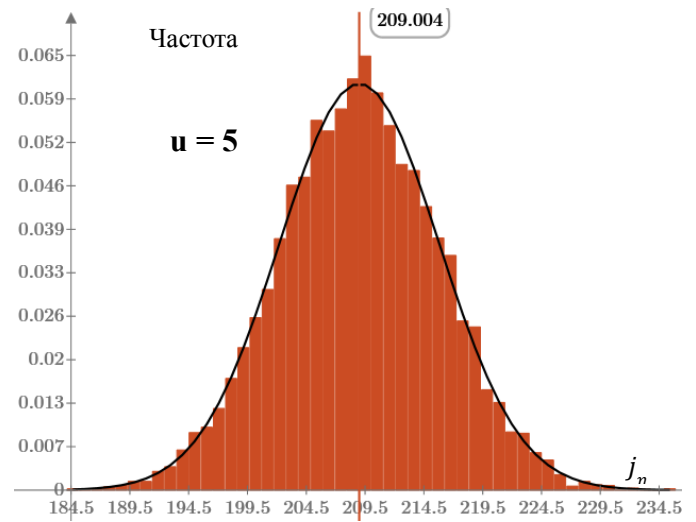


Рис. 2. Гистограмма эксперимента 2

4. Значение  $j_n$  по методу максимума-минимума

$z_1$	18 зубьев								
	$u$	1	2	3	4	5	6	7	8
$j_{n \min}$ формула (7), мкм		77,62	78,11	99,31	92,43	113,16	127,82	116,70	112,69
$j_{n \max}$ формула (8), мкм		332,62	372,05	393,76	400,10	460,82	474,75	490,31	517,94
Средний $j_n$ , мкм		205,11	225,73	246,16	246,21	287,36	300,84	300,89	314,82

5. Результаты математического эксперимента 3

$z_1$	18 зубьев								
	$u$	1	2	3	4	5	6	7	8
$j_{n \min}$ ГОСТ1643-81, мкм		77,55	79,25	99,61	92,93	110,22	127,58	113,28	114,40
$j_{n \min}$		79,06	82,14	98,65	95,09	122,25	131,44	116,74	112,65
$j_{n \max}$		331,91	373,17	393,05	401,30	460,13	475,81	486,29	513,87
$j_{n \max}$	Математическое ожидание, мкм	205,21	226,04	246,56	246,19	287,27	301,04	300,93	314,79
	Среднеквадратное отклонение, мкм	45,247	51,873	51,910	55,045	62,394	62,306	68,478	75,112
	Коэффициент асимметрии	-0,005	-0,001	-0,010	-0,006	0,012	-0,005	0,007	-0,003
	Коэффициент эксцесса	-0,543	-0,513	-0,501	-0,565	-0,521	-0,531	-0,589	-0,669

Гистограмма на рис. 3 подтверждает нормальное распределение  $j_n$ .

Допустим, что слагаемые в формулах (7) и (8) распределены по нормальному закону (табл. 6).

Гистограмма распределения по математическому эксперименту с нормальным распределением слагаемых представлена на рис. 4.

Расчет по формулам (7), (8) дает значения  $j_n$  существенно выше, чем по формулам (1), (3), (5). Это объясняется тем, что  $E_{Ns}$  определяется из суммы ( $j_{n \min} + k_j$ ), т.е.  $j_{n \max}$  по формулам (1), (3), (5) сравнимы с  $j_{n \min}$  по формулам (7), (8).

Это вполне объяснимо, так как формула (2), приведенная из работы [2] без изменений, уже предлагает нормальное распределение всех слагаемых в формуле для  $k_j$ . Коэффициенты, описывающие третий и четвертый центральные моменты числовых характеристик распределения  $j_n$ , полностью объясняют особенности гистограмм на рис. 1 – 4.

6. Результаты математического эксперимента 4

Z <sub>1</sub>		18 зубьев							
u		1	2	3	4	5	6	7	8
$j_{n \min}$ ГОСТ1643-81, мкм		43,42	42,98	47,54	41,61	43,16	53,28	64,30	58,62
$j_{n \min}$		51,09	58,74	70,39	61,73	66,80	66,34	68,35	58,53
$j_{n \max}$		244,74	260,00	268,38	274,67	328,01	346,64	368,00	366,29
$j_{n \max}$	Математическое ожидание, мкм	138,38	152,29	161,04	163,23	187,67	197,59	195,54	204,34
	Среднеквадратное отклонение, мкм	22,807	25,291	26,634	27,201	31,951	33,737	33,878	35,749
	Коэффициент асимметрии	-0,007	-0,006	-0,015	-0,006	-0,006	-0,007	-0,017	-0,002
	Коэффициент эксцесса	0,030	-0,001	0,005	-0,016	0,014	0,003	0,024	0,003

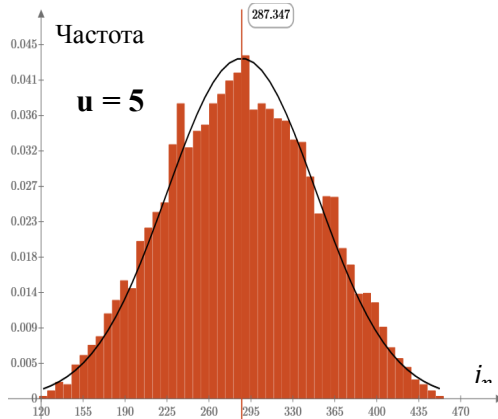


Рис. 3. Гистограмма эксперимента 3

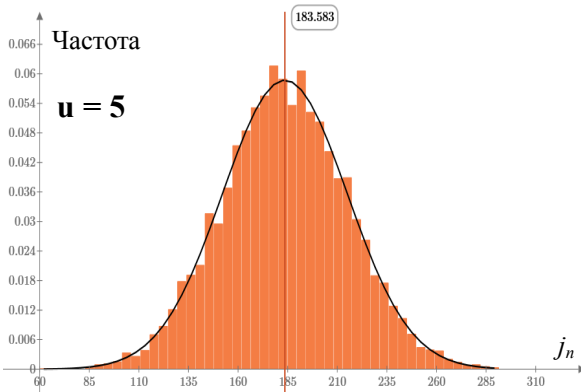


Рис. 4. Гистограмма эксперимента 4

**Заключение**

Рассмотрены метод максимума-минимума и вероятностный метод расчета бокового зазора зубчатой передачи. При вероятностном методе расчета может быть получено меньшее значение бокового зазора зубчатой передачи, чем при методе максимума, что более полно учитывает специфику реального производства зубчатых передач. Важно отметить, что расчет не по допускам погрешностей из таблиц ГОСТ, а по эмпирическим законам распределения данных погрешностей, числовые характеристики которых определяются на конкретном производстве, обеспечивают лучшую сходимость расчетных и экспериментальных данных.

При расчете параметров точности зубчатой

передачи вероятностным методом необходимо знать границы зоны рассеяния погрешностей и законы их распределения внутри зоны. Установление границ и законов распределения (либо числовых характеристик, когда законы не определены) необходимо осуществлять в налаженном производстве при стабильных числовых характеристиках распределения и достаточно большом количестве измеряемых деталей в выборке.

Проведенная работа актуальна для современной промышленности, поскольку позволяет более точно оценивать точность передачи на основании распределения характеристик погрешностей передачи.

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. ГОСТ 1643–81. Основные нормы взаимозаменяемости. Передачи зубчатые цилиндрические. Допуски. – М.: ИПК Изд-во Стандартов, 2003. – 45 с.
2. Методические указания по внедрению ГОСТ 1643–70. Передачи зубчатые цилиндрические. Допуски. М.: Изд-во стандартов, 1975. 110 с.
3. ГОСТ 21098–82. Цепи кинематические. Методы расчета точности. – М.: Издательство стандартов, 1982. – 26 с.
4. Куцоконь, В.А. Точность кинематических цепей приборов. – Л.: Машиностроение. 1980. – 221 с.
5. Соболев, И.М. Метод Монте-Карло. – М.: Наука, 1978. – 64 с.
6. Наумов, В.А., Маркова, Л.В. Статистические методы гидрологии в среде Mathcad. – М.: Изд-во: РГАУ - МСХА им. К.А. Тимирязева. 2012.

**REFERENCES**

1. RSS 1643-81. *Basic Standards for Interchangeability. Cylindrical Gearing. Tolerances.* – М.: IPK Standards Publishing House, 2003. – pp. 45.
2. *Methodical Directions on Introduction of RSS 1643-70. Cylindrical Gearing. Tolerances.* М.: Standards Publishing House, 1975. pp. 110.
3. RSS 21098-82. *Kinematic Chains. Methods for Accuracy Computation.* – М.: Standards Publishing House, 1982. – pp. 26.
4. Kutsokon, V.A. *Accuracy of Device Kinematic Chains.* – L.: Mechanical Engineering. 1980. – pp. 221.
5. Sobol, I.M. *Monte-Carlo Method.* – М.: Science, 1978. – pp. 64.
6. Naumov, V.A., Markova, L.V. *Statistical Methods of Hydrology in Mathcad Environment.* – М.: Publishers: RSAU-Timiryazev AA of Moscow. 2012.

Рецензент д.т.н. О.И. Борискин