

УДК 532

DOI: 10.12737/24955

О.Н. Дмитроченко

## ДЕСЯТИЧНЫЙ НОМЕНКЛАТУРНЫЙ КОД *DNCMKOT* ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ СУЩЕСТВУЮЩИХ И АВТОМАТИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ НОВЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Предложена систематическая классификация конечных элементов в виде набора целых чисел. Геометрия и структура узловых координат представляются параметрами – размерностью  $d$ , числом узлов  $n$ , числом координат в узле  $c$ , количеством полиномов  $m$  и другими, по которым возможно сгенерировать геометрию и функции формы эле-

мента с помощью предложенной процедуры. Набор параметров  $k$ ,  $o$  и  $t$  описывает физический функционал, реализуемый элементом. Приведены примеры применения указанной классификации.

**Ключевые слова:** конечные элементы, классификация, номенклатура, десятичный код.

O.N. Dmitrochenko

## DECIMAL NOMENCLATURE CODE *DNCMKOT* FOR IDENTIFICATION OF EXISTING AND AUTOMATED GENERATION OF NEW FINITE ELEMENTS

The work purpose: a systematic (constant) classification of finite elements for designation unity, the exclusion of repeated investigations and results duplicating.

Methods. A decimal nomenclature *dncmkot* code for finite elements is offered. It is based on the geometry and structure presentation of

node coordinates by integral (whole) parameters:  $d$  – dimensionality,  $n$  – nodes number,  $c$  – parameter defining a structure of node coordinates, for example, coordinates number in a node,  $m$  – number of interpolation polynomials of an element. For more complicated elements the application of additional parameters is possible. To this there are added of an element physical functional:  $k$  – order of senior derivative upon

which depends a sub-integral expression of a physical functional,  $t$  – additional parameter-type.

Results. There is offered an algorithm allowing calculating functions of an element form, its matrix of rigidity and others through *dncmkot* code. The correspondence of the finite elements set from ANSYS software to their codes according to the classification offered is shown. The examples of new elements creation on the basis of the classification offered are presented.

Conclusion: the classification offered allows describing unambiguously existing finite elements and also creating in an automated way new ones according to *dncmkot* code.

**Key words:** finite elements, classification, nomenclature (range), decimal code.

### Введение

Существует множество конечных элементов, разработанных в различных инженерных областях, таких как строительная механика, механика жидкостей, электромагнетизм, и в других. Эти разработки были проведены большим числом авторов и поддержаны многими научными и коммерческими организациями. Однако до сих пор не существует общепринятой системы классификации либо обозначений конечных элементов. Это объяснимо, если принимать во внимание коммерческий аспект разработки научных инструментов, но серьезно мешает академическим исследователям, так как приводит к дублированию исследований, научных статей и результатов. В результате отсутствия единой системы классификации авторы обычно описывают конечные элементы фразами

вроде «двухузловой плоский балочный элемент». Этот подход приемлем, если в статье идёт речь об одном или нескольких разных типах элементов. Однако если необходимо оперировать многим числом разных типов элементов одновременно с целью описания их общих свойств или соотношений, необходимость в коротком и информативном универсальном обозначении становится очевидной [1].

В литературе существуют следующие способы обозначения элементов:

- словесное описание вроде «треугольный элемент пластины»;

- аббревиатуры вроде CST, LST или DKT (в основном в англоязычной литературе);

- по имени автора, например: балка Эйлера – Бернулли, пластина Кирхгофа

(приведенные выше описания не содержат фактической информации о кинематике элементов);

- указание числа узлов, например: четырёхугольники Q4, Q6, Q8, Q9 и т.д. (такое описание также не является полным);

- указание числа степеней свободы (однако разные элементы вполне могут обладать одинаковым числом координат).

В данной статье вводится универсальная классификация конечных элементов, основанная на указании их размерности (от 1 до 3), числа узлов, числа и типа координат в узле и других данных. Кинематическое описание произвольного элемента дополняется параметрами, которые описывают физический функционал эле-

**Одномерные элементы 1nc**

Для обозначения конечных элементов предлагается базовая трёхразрядная номенклатура *dnc*, содержащая следующие целые параметры:

*d* – размерность элемента; она равна количеству аргументов в интерполяционном полиноме  $Z(x, \dots)$ , который описывает элемент (в частности, значение 1 используется для балочных элементов, 2 – для пластинчатых, 3 – для объёмных);

мента. В качестве примера использования предложенной классификации приводится список элементов, используемых в программном комплексе ANSYS, и их систематические обозначения согласно введённой номенклатуре элементов.

Данная статья является продолжением исследований, начатых в работах [1;2]. Однако в настоящей работе сделан упор на строгой систематичности предложенной классификации с подробным описанием каждого её параметра и деталей, объяснением численной процедуры, с помощью которой возможно по исходным параметрам классификации элемента построить его функции формы и другие необходимые матрицы.

*n* – число узлов элемента; может быть задано в виде набора групп узлов;

*c* – параметр, описывающий число и структуру координат в каждом узле; в простейшем случае *c* – это число производных от полинома *Z* начиная с 0-й производной:

$$Z = \frac{d^0}{dx^0} Z, \frac{d^1}{dx^1} Z, \frac{d^2}{dx^2} Z, \dots, \frac{d^{c-1}}{dx^{c-1}} Z.$$

На рис. 1 приведены широко используемые одномерные конечные элементы.

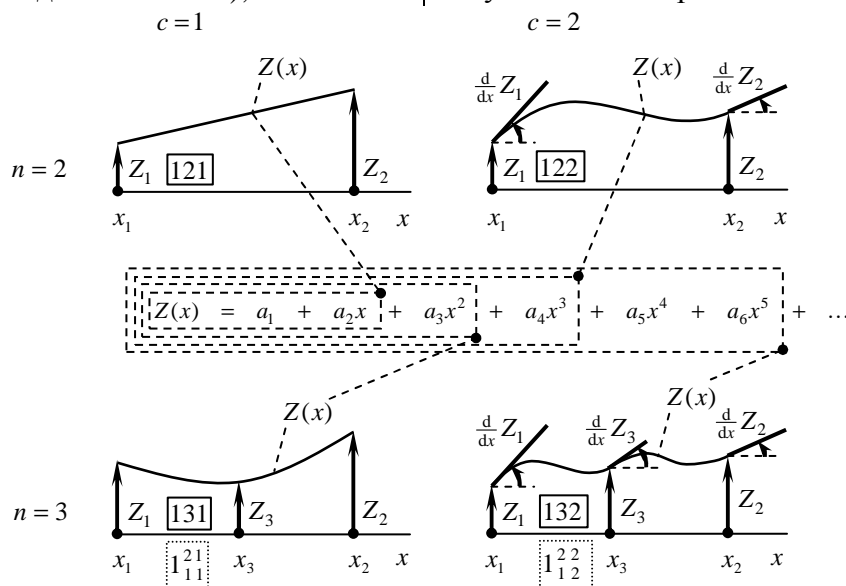


Рис. 1. Одномерные элементы 1nc и их интерполяционные полиномы

Код *dnc* описывает элемент с *n* узлами, в которых введено *c* координат в узле. Это обозначение может быть расширено до  $d_{\eta \zeta}^n c$ , если добавлены  $\eta$  узлов на сторонах элемента, каждый из которых имеет  $\zeta$

узловых координат (рис. 1, внизу). Ниже используются расширения  $d_{\pi \sigma}^n c$  и  $d_{\pi \sigma}^n c_{\nu \zeta}$  для двух- и трёхмерных элементов, в которых введены дополнительные  $\pi$  узлов на

гранях и  $\nu$  узлов в объёме трёхмерного элемента;  $\sigma$  и  $\zeta$  – соответствующие параметры узловых координат. Обозначение  $d^{nc}$  позволяет непосредственно определить число степеней свободы элемента  $D$  согласно следующему правилу:

$$D = nc + \eta\zeta + \pi\sigma + \nu\zeta. \quad (1)$$

Для обозначения  $1_{\eta}^{nc}$ , где параметр  $c$  одинаковый для обоих уровней, допустима сокращённая форма  $1Nc$ , где  $N = n + \eta$ , как

$$Z^{1_{\eta}^{nc}}(x) = \sum_{k=1}^D a_k x^{k-1} = \underbrace{\{1 \ x \ \dots \ x^{D-1}\}}_{\mathbf{x}(x)} \cdot \underbrace{\{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_D\}^T}_{\mathbf{a}} = \mathbf{x}(x) \cdot \mathbf{a}. \quad (1)$$

**Граничные условия в узлах элемента**

Коэффициенты  $a_k$  в формуле (1) определяются из граничных условий. Они формулируются в каждом узле элемента с индексом  $i$ ; в каждом узле можно ввести

$$\left. \frac{d^j Z^{1_{\eta}^{nc}}(x)}{dx^j} \right|_{x=x_i} = Z_{i,j} \equiv z_l. \quad (2)$$

В уравнении (2) узловые координаты обозначаются двумя эквивалентными способами: с использованием двух индексов –  $Z_{r,s}$ , где индекс  $r$  соответствует номеру узла, а  $s$  – индексу координаты в узле (начи-

показано на рис. 1 (внизу). Наоборот, краткую форму  $1Nc$  можно привести к полной по правилу  $1Nc \rightarrow 1_{N-2}^{2c}$ , т.е.  $\eta=N-2; \zeta=c$ , если  $N > 2$ .

Зная общее число координат  $D$ , для одномерного элемента  $1_{\eta}^{nc}$  можно записать интерполяционный полином с  $D$  неопределёнными коэффициентами (рис. 1):

одно или несколько граничных условий с индексом  $j$ . Таким образом, возникает система линейных уравнений:

ная с 0); с использованием одного индекса –  $z_l$ , где  $l = 1, \dots, D$  – глобальный номер координаты в элементе. В разных частях работы одно из двух представлений оказывается более удобным, чем другое.

**Автоматическое формирование функций формы элемента**

Подстановка полинома (1) в уравнение (2) приводит к системе линейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^D \underbrace{(k-1)_{-j} x_i^{(k-1)-j}}_{W_{lk}} a_k = z_l \equiv Z_{i,j}, \quad (3)$$

или, в матричной форме,  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{z}$ .

Величины  $(k-1)_{-j}$  представляют собой падающий факториал Похгаммера:

$$(\alpha)_{-r} = \underbrace{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-r+1)}_{r \text{ множителей}} = \begin{cases} \frac{\alpha!}{(\alpha-r)!}, & \text{если } \alpha \geq r; \\ 0, & \text{если } \alpha < r. \end{cases} \quad (4)$$

Компоненты матрицы  $W_{lk}$  определяются уравнением (3), где также указаны пределы изменения индексов  $i, j, k$  и  $l$ . По-

сле разрешения уравнения (3) относительно  $\mathbf{a}$  имеем

$$Z^{1_{\eta}^{nc}}(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{c-1} \underbrace{\sum_{k=1}^D x^{k-1} W_{kl}^{-1} Z_{i,j}}_{s_{i,j}^{1_{\eta}^{nc}}(x)} \quad (5)$$

с матрицей-строкой функций формы  $s^{1_{\eta}^{nc}}$  и матрицей-столбцом узловых координат  $\mathbf{z}$ . Уравнение (5) будет обобщено ниже для

элемента произвольной размерности  $d$  в следующем виде:

$$Z^{d^{nc}}(x, \dots) = \underbrace{\mathbf{x}(x, \dots)}_{s^{d^{nc}}(x, \dots)} \cdot \mathbf{W}^{-1} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{s}^{d^{nc}}(x, \dots) \cdot \mathbf{z}. \quad (6)$$

Матрица  $\mathbf{W}$  постоянна, вектор-строка  $\mathbf{x}$  зависит от координаты  $x$  (а также  $y$ , в случае  $d=2$ , или обеих координат,  $y$  и  $z$ , в

случае  $d=3$ ), столбец  $\mathbf{z}$  содержит узловые координаты.

**Двухмерные элементы 2nc**

Номенклатура двухмерных элементов более разнообразна. Различное число узлов может быть расположено в вершинах, на рёбрах и внутри элементов (рис. 2).

Где это возможно, элементы на рис. 2 идентифицируются просто общим числом их узлов. Однако в случаях, когда возни-

кают конфликты обозначений, важно отдельно указывать число узлов в вершинах, на рёбрах и внутри. Следующий «препроцессор» может быть предложен для конвертации короткого обозначения 2Nc в полное:

$26c \rightarrow 2_{3c}^{3c}$ , т.е.  $\eta=3, \zeta=c$ , если  $N=6$ ;

$28c \rightarrow 2_{4c}^{4c}$ , т.е.  $\eta=4, \zeta=c$ , если  $N=8$ ;

$29c \rightarrow 2_{4c}^{4c}$ , т.е.  $\eta=4, \zeta=c, \pi=1, \sigma=c$ , если  $N=9$ ;

$2^{10}c \rightarrow 2_{6c}^{3c}$ , т.е.  $\eta=6, \zeta=c, \pi=1, \sigma=c$ , если  $N=10$ ; и т.д.

$n = (\lfloor N/2 \rfloor - 1) \bmod 2 + 3$ ;

$\eta = \lfloor (N - n) / n \rfloor n$ ;

общая формула:

$\pi = N - n - \eta$ ;

$\zeta = c$ .

Элементы матрицы на рисунке могут быть вычислены по следующему алгоритму.

$g = \lceil (\sqrt{1+8(k+1)} - 1) / 2 - 1 \rceil$      $d = \lceil (\sqrt{1+8D} - 1) / 2 - 1 \rceil$

$k_0 = g(g+1)/2$      $k_{12} = \{D=12\}\{d=g\}$

$B = \lfloor (k_0 + g - k - k_{12}) / 2 \rfloor$      $M = ((k_0 + g - k - k_{12}) \bmod 2) \cdot (1 - \{d=g\}\{d=k+1\})$

$\alpha_{Dk}^{21} = (1 - M)B + M(g - B)$

$\alpha_{Dk}^{22} = (1 - M)(g - B) + MB \equiv g - \alpha_{Dk}^{21}$

$Z^{2nc} = \sum_{k=1}^D a_k x^{\alpha_{Dk}^{21}} y^{\alpha_{Dk}^{22}}$

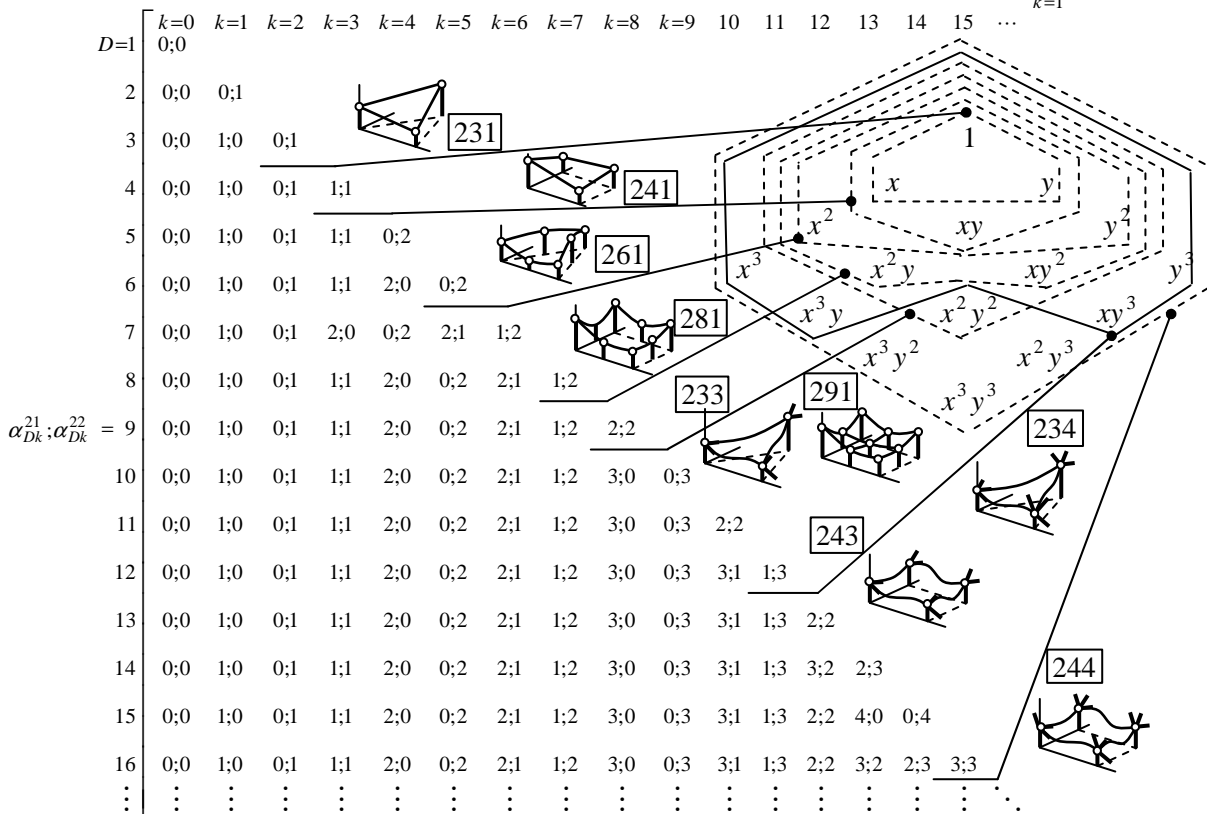


Рис. 2. Базовые элементы 2nc, треугольник Паскаля и его матричная форма

Интерполяционный полином произвольного двумерного элемента с кодом  $2_{\pi\sigma}^{n\zeta}$  зависит от двух локальных координат,  $x$  и  $y$ , и может быть записан таким образом:

$$Z_{\pi\sigma}^{n\zeta}(x, y) = \sum_{k=0}^{D-1} a_{k+1} x^{\alpha_{Dk}^{21}} y^{\alpha_{Dk}^{22}} = \underbrace{\{x^{\alpha_{D0}^{21}} y^{\alpha_{D0}^{22}} \quad x^{\alpha_{D1}^{21}} y^{\alpha_{D1}^{22}} \quad \dots \quad x^{\alpha_{D,D-1}^{21}} y^{\alpha_{D,D-1}^{22}}\}}_{\mathbf{x}(x,y)} \cdot \underbrace{\{a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_D\}^T}_{\mathbf{a}} = \mathbf{x}(x, y) \cdot \mathbf{a},$$

где  $\alpha_{Dk}^{21}$ ,  $\alpha_{Dk}^{22}$  – показатели степеней полиномиальных членов из треугольника Паскаля, определённые на рис. 2, в строке матрицы с номером  $D$ ; индекс  $k$  пробегает диапазон  $0, \dots, D-1$ .

$$\frac{\partial^{\alpha_{Dj}^{21} + \alpha_{Dj}^{22}} Z_{\pi\sigma}^{n\zeta}(x, y)}{\partial x^{\alpha_{Dj}^{21}} \partial y^{\alpha_{Dj}^{22}}} \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_i}} \equiv \sum_{k=0}^{D-1} \underbrace{(\alpha_{Dk}^{21})_{-\alpha_{Dj}^{21}} (\alpha_{Dk}^{22})_{-\alpha_{Dj}^{22}} x_i^{\alpha_{Dk}^{21} - \alpha_{Dj}^{21}} y_i^{\alpha_{Dk}^{22} - \alpha_{Dj}^{22}}}_{W_{l,k+1}} a_{k+1} = z_l, \quad (7)$$

которые опять имеют матричную форму  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{z}$ .

Чтобы определить коэффициенты  $\mathbf{a}$ , необходимо выписать граничные условия, как это было в уравнении (3). В двумерном случае они имеют вид частных производных по  $x$  и  $y$

После этого функции формы могут быть вычислены согласно уравнению (6).

### Трёхмерные элементы $3_{\nu\zeta}$

Произвольный объёмный элемент  $3_{\nu\zeta}^{n\zeta}$  имеет по крайней мере  $n \cdot c$  координат в вершинах; дополнительно он может иметь  $\eta \cdot \zeta$  координат на рёбрах,  $\pi \cdot \sigma$  координат на его гранях и, наконец,  $\nu \cdot \zeta$  координат

внутри объёма элемента. Интерполяционный полином  $Z$  зависит от трёх координат,  $x$ ,  $y$  и  $z$ , а показатели их степеней определены в матричной форме на рис. 3.

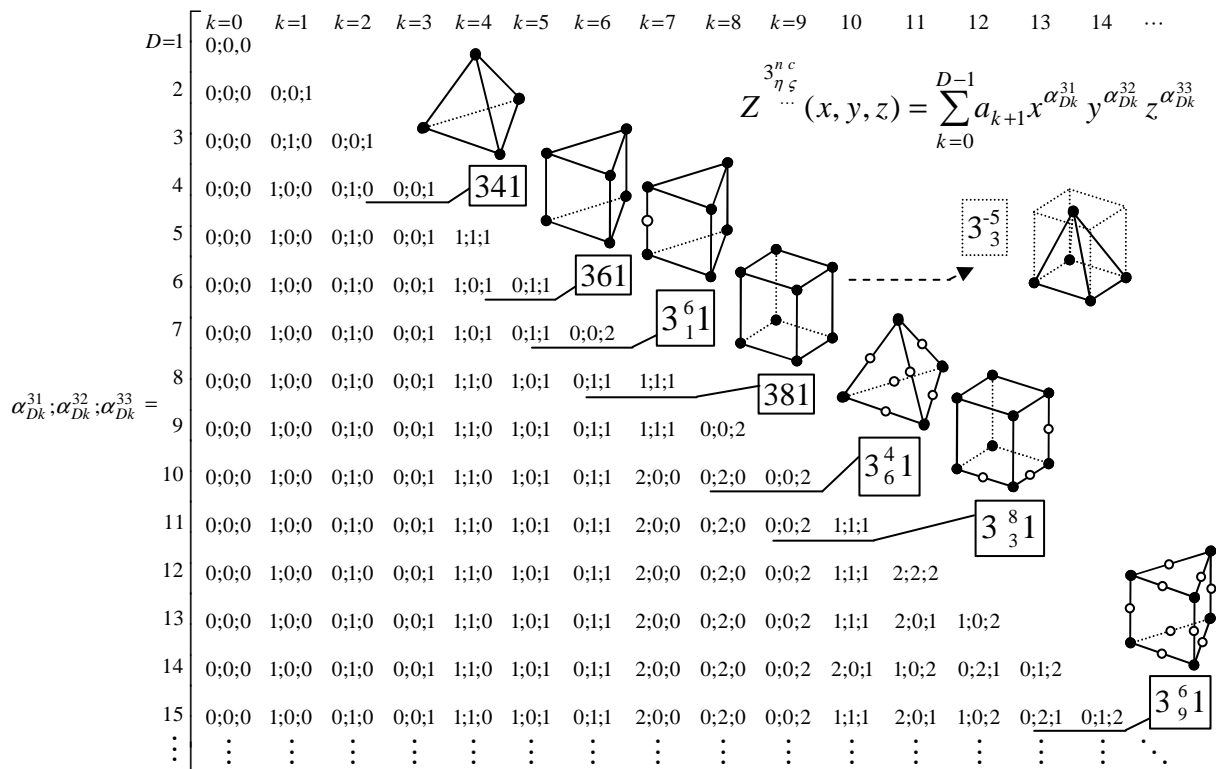


Рис. 3. Объёмные элементы  $3_{\nu\zeta}^{n\zeta}$ , полиномиальные члены, пирамида Паскаля

Полином  $Z$  может быть записан в общей форме с использованием показателей степеней полиномиальных членов  $\alpha_{Dk}^{31}, \alpha_{Dk}^{32}, \alpha_{Dk}^{33}, k=0, \dots, D-1$  (в строке  $D$  матрицы на рис. 3):

$$Z^{3nc}(x, y, z) = \sum_{k=0}^{D-1} a_{k+1} x^{\alpha_{Dk}^{31}} y^{\alpha_{Dk}^{32}} z^{\alpha_{Dk}^{33}} = \underbrace{\left\{ x^{\alpha_{D0}^{31}} y^{\alpha_{D0}^{32}} z^{\alpha_{D0}^{33}} \dots x^{\alpha_{D,D-1}^{31}} y^{\alpha_{D,D-1}^{32}} z^{\alpha_{D,D-1}^{33}} \right\}}_{\mathbf{x}(x,y,z)} \cdot \underbrace{\{a_1 \dots a_D\}^T}_{\mathbf{a}} = \mathbf{x}(x, y, z) \cdot \mathbf{a}.$$

Коэффициенты  $a_1, \dots, a_D$  в уравнении определяются из системы линейных урав-

$$\left. \begin{array}{l} l=0 \\ \text{для } i=1, \dots, N \\ \text{для } j=0, \dots, c-1 \\ l=i+1 \end{array} \right\} \frac{\partial^{\alpha_{Dj}^{d1} + \dots + \alpha_{Dj}^{dd}} Z^{dnc}(x_1, \dots, x_d)}{\partial x_1^{\alpha_{Dj}^{d1}} \dots \partial x_d^{\alpha_{Dj}^{dd}}} \Big|_{\substack{x_1=x_{1i} \\ \vdots \\ x_d=x_{di}}} \equiv \sum_{k=0}^{D-1} \prod_{q=1}^d (\alpha_{Dk}^{dq})_{-\alpha_{Dj}^{dq}} x_{qi}^{\alpha_{Dk}^{dq} - \alpha_{Dj}^{dq}} a_{k+1} = z_l, \quad (8)$$

или  $\mathbf{W} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{z}$ .

После этого функции формы могут быть вычислены согласно формуле (6).

нений, сформулированной ниже, где предполагается значение  $d=3$ :

$$\sum_{k=0}^{D-1} \prod_{q=1}^d (\alpha_{Dk}^{dq})_{-\alpha_{Dj}^{dq}} x_{qi}^{\alpha_{Dk}^{dq} - \alpha_{Dj}^{dq}} a_{k+1} = z_l, \quad (8)$$

Формула (8) превращается в формулу (7) в случае  $d=2$  и в формулу (3) в случае  $d=1$ .

### Четвёртый параметр $m$ , завершающий код $dncm$ кинематики элемента

В предыдущих параграфах было введено описание интерполяционного полинома одной или нескольких переменных и показано, что он может быть представлен обозначением  $d^{nc}$ . Однако в приложениях часто используется одновременно  $m$  таких полиномов для интерполяции различных полей переменных, например декартовых компонент перемещений. Для учёта этого

четвёртый параметр  $m$  присоединяется к коду, и он превращается в  $d^{ncm}$ .

На рис. 2 два простейших одномерных элемента 121 и 122 из рис. 1 показаны сверху, и их коды  $dnc$  модифицируются путём присоединения разряда  $m=1$  или 2. Это преобразование вкладывает эти элементы в пространство размерности  $m$ , формируя элементарные элементы стержня и изгибной балки для плоского и объёмного случаев.

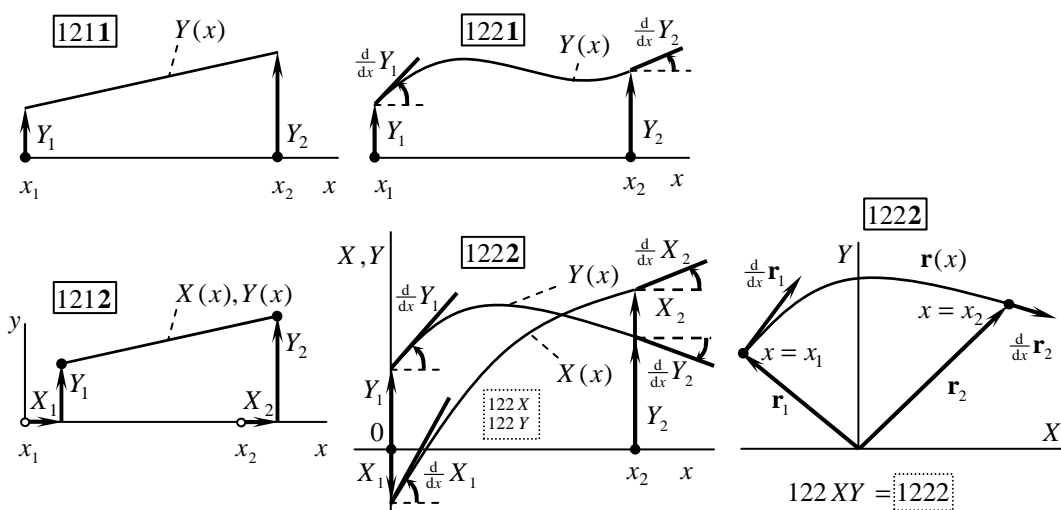


Рис. 4. Преобразование линейного и кубического элементов путём удвоения полиномов

Такое же преобразование может быть применено к плоским элементам, как показано на рис. 5, где обозначения  $2ncm$  соседствуют с традиционными сокращения-

ми, принятыми в англоязычной литературе. То же применимо и к объёмным элементам типа  $3ncm$ .

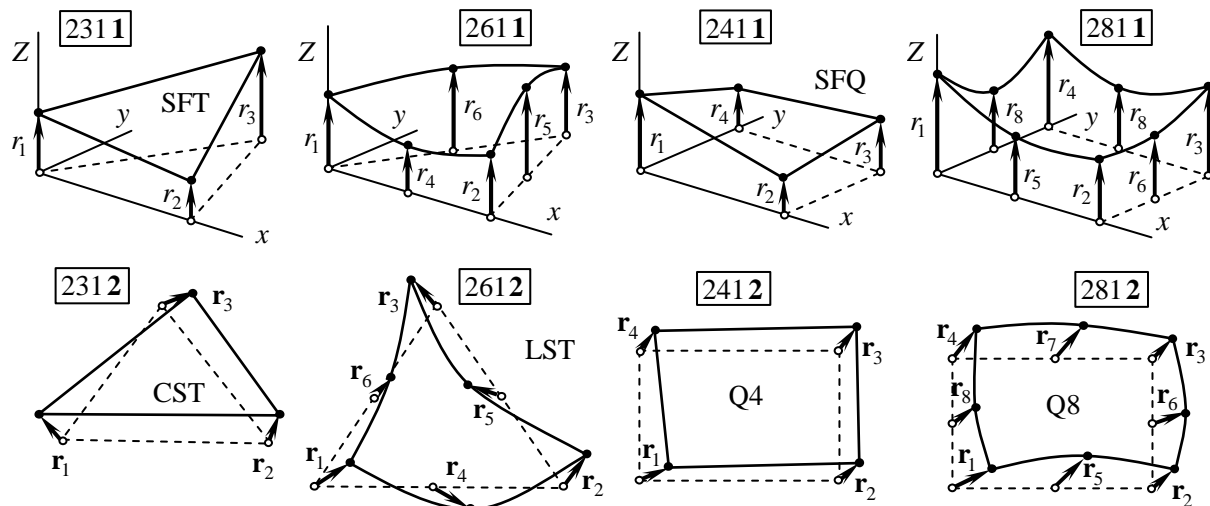


Рис. 5. Элементы  $2nm$  при  $n=3, \dots, 8$  (используют только координаты узлов:  $c=1$ ;  $m=1$  или  $2$ )

**Элементы балок и пластин как комбинации различных кодов  $dncm$**

Структурные элементы балок и пластин имеют различный порядок полиномов для описания продольных и поперечных перемещений. Простейший пример: элемент плоской балки, состоящий из линейного элемента стержня 121 (поля продольных перемещений  $X$ ) и кубического элемента изгибающей балки 122 (поля поперечных перемещений  $Y$ ). Коды этих элементов можно «склеить» вместе для описания всего элемента плоской балки:  $\begin{matrix} 121 \\ 122 \end{matrix}$ , или, проще,  $12_2^1$ .

В трёхмерном случае стандартный балочный элемент имеет по 6 координат в узле: перемещения  $X, Y, Z$  в трёх направлениях и повороты  $\alpha, \beta, \gamma$  относительно трёх осей. Повороты обычно связываются с производными следующим образом:  $\beta = -\frac{d}{dx}Z, \gamma = +\frac{d}{dx}Y$ . Таким образом, всего образуется четыре независимых поля перемещений: два поля  $X(x)$  и  $\alpha(x)$ , которые линейно интерполируют перемещения вдоль оси  $X$  и кручение вокруг этой оси

между двумя концами балки (эти поля обозначим 121 ( $X$ ) и 121 ( $A$ )), и два поля  $Y(x)$  и  $Z(x)$ , которые являются кубическими по  $x$  (в каждом узле – перемещение и поворот). Эти поля обозначаются 122 ( $Y$ ) и 122 ( $Z$ ). Кратчайшая комбинация всех этих обозначений выглядит так:  $12_2^1 2$ .

Чтобы указать правильный порядок нумерации узловых координат, применяется следующая нотация:  $\begin{matrix} 1212[1,4] \\ 1222[2,3,6,-5] \end{matrix}$ , или  $12_2^1 2 \begin{matrix} [1,4] \\ [2,3,6,-5] \end{matrix}$ .

Похожим образом комбинация элемента мембраны 2412 и изгибающего элемента пластины 2431 приводит к следующему комбинированному коду:  $24 \begin{matrix} 12 & [1,2] \\ 31 & [3,-5,4] \end{matrix}$ . Однако такая формулировка не содержит вращательных степеней свободы в плоскости пластины. Примеры элементов балок и пластин, используемых в ANSYS, даны в таблице.

**Расширение кинематического кода  $dncm$  кодом физического функционала  $kot$**

Геометрия и кинематика конечного элемента были представлены выше набором целых параметров  $d, n, c, t$  и, возможно, дополнительных параметров  $\eta, \zeta, \pi, \sigma, \mu$  и  $\zeta$ .

Теперь это кинематическое представление элемента расширяется параметрами,

определяющими физический функционал, реализуемый элементом:

$k$  – наибольший порядок производной, входящий в подынтегральное выражение;

$o$  – алгебраический порядок полинома от производных, указанных выше;

$t$  – дополнительный параметр, позволяющий различать элементы с одинаковыми  $k$  и  $o$ .

Физический функционал элемента определяется в виде интеграла

$$U^{d^{n^c}mkot} = \frac{1}{2} \int \dots \int_{d \text{ раз}} \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^S E_{ij}^d \varepsilon_i^{d^{n^c}mkot} \varepsilon_j^{d^{n^c}mkot} dx_1 \dots dx_d, \quad (9)$$

где  $E_{ij}^d$  – компоненты матрицы размером  $S \times S$ , определённой по матрице податливости  $C_{pq}^d$  следующим образом:  $E_{ij}^d = [C_{pq}^d]_{ij}^{-1}$  [см. (10)]. Величина  $S$  равна числу скаляр-

ных деформаций (или величин, по смыслу близких к деформациям) и может быть определена так:

$$S = \begin{cases} \frac{1}{2}d(d+1), & \text{если } d = m \text{ (для задач упругости);} \\ d, & \text{если } d \neq m \text{ (для температурных и др. задач).} \end{cases}$$

Параметр  $k$  для часто встречающихся элементов может принимать значения  $k=0,1,2,3$ , и тогда деформации соответст-

вующего порядка производной определяются так:

$$\varepsilon_i^{d^{n^c}m0ot} = u_i;$$

$$\varepsilon_i^{d^{n^c}m1ot} = \frac{1}{2} \left( \underbrace{\frac{\partial u_{q_i}}{\partial x_{p_i}} + \frac{\partial u_{p_i}}{\partial x_{q_i}}}_{\text{линейные члены, } t \neq 1} + \underbrace{\sum_{j=m-t}^m \frac{\partial u_j}{\partial x_{p_i}} \frac{\partial u_j}{\partial x_{q_i}}}_{\text{квадратичные члены } o=2} - \underbrace{1}_{\text{если } t=1} - \underbrace{2u_{i+1}}_{\text{если } t=2} \right) + \underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}_{\text{ротор, если } t=1}$$

$$\varepsilon_i^{d^{n^c}m2ot} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_{p_i} \partial x_{q_i}} \sum_{r=1}^m \frac{\partial u_r}{\partial x_1} \left( \underbrace{\tilde{\varepsilon}_{jr}}_{\text{линейные, if } d=1} + \sum_{s=1}^m \underbrace{\tilde{\varepsilon}_{jrs} \frac{\partial u_s}{\partial x_2}}_{\text{квадратичные члены, } o>1, \text{ if } d=2} \right),$$

где  $\tilde{\varepsilon}_{jr} = j-r$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{jrs} = \frac{(j-r)(r-s)(s-j)}{2}$  – 2- и 3-индексные символы Леви-Чивиты;

$$\varepsilon_i^{d^{n^c}m3ot} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_i^3} + \underbrace{\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_i \partial x_{d-i}^2}}_{\text{для пластины, } d=2}$$

Такое определение деформаций для  $i=1, \dots, d$  соответствует нормальным деформациям в случае  $d=1, \dots, 3$ , и сдвиговым деформациям для  $i=d+1, \dots, S$ . Оно подходит для пружин, пластин и объёмных элементов, для температурных, электростатических и других задач. Параметр  $o$  определяет линейность ( $o=1$ ) или нелинейность ( $o>1$ ) используемых соотноше-

ний между перемещениями и деформациями. Параметр  $t$  – это дополнительный тип, который позволяет различать формулы одинаковых порядков по  $k$  и  $o$ .

Компоненты матрицы  $E_{ij}^d = [C_{pq}^d]_{ij}^{-1}$  в уравнении (9) получаются из матрицы податливости  $C_{pq}^d$ . В случае ортотропного материала она выглядит так:

$$C_{pq}^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & & \\ & \frac{1}{E_{11}} & \\ & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}_{pq}, \quad C_{pq}^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & \frac{-\nu_{21}}{E_{22}} & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}_{pq} \quad \text{и т.д.} \quad (10)$$

Таким образом, полное описание элемента с учётом его материала имеет вид



$$d_{\dots}^{nc} mkot [E_{11}, \nu_{12}, E_{22}, G_{12}, E_{33}, \nu_{23}, \nu_{31}, G_{23}, G_{31}]. \quad (11)$$

**Применение кода *dncmkot* для существующих и новых элементов**

Алгоритмы и формулы, приведенные в данной работе, были протестированы и реализованы в программном комплексе. С его использованием были созданы новые

конечные элементы (по результатам данных исследований были опубликованы статьи):

- элементы балок:  $1223^{121220}$ ,  $12_{11}^{23121220}$ ,  $12_{11}^{33121220}$ ,  $22c2^{121}$ ,  $32c3^{121}$  [3;4];
- элементы пластин:  $2_{310}^3 3^{121230}$ ,  $2343^{121230}$ ,  $2nc2^{121}$ ,  $4nc3^{121}$  [3;5–7];
- объёмные элементы:  $3n43^{121}$  [8;9].

В качестве дальнейшей иллюстрации данного подхода приведен список конечных элементов из программного комплекса

ANSYS и соответствующие им описания согласно данной работе.

Таблица

Элемент ANSYS	<i>dncm</i>	<i>Kot</i>	[Параметры материала]	Ин-дексы	Координаты узлов
LINK 1,8,10,180	1211	<sup>110</sup>	[E·A]		{x1,y1,z1; x2,y2,z2}
LINK 32, 33	1211		[A·Kx]		{x1,y1,z1; x2,y2,z2}
LINK 34	1211		[A·Heff·L]		{x1,y1,z1; x2,y2,z2}
LINK 68	121 <sub>1</sub> <sup>1</sup>	<sup>110</sup> 110 010	[Kx] [-αx; -βx]		{x1,y1,z1; x2,y2,z2}
BEAM 3	12 <sub>2021</sub> <sup>1</sup> 1	<sup>110</sup> 210 310	[EA,GI <sub>1</sub> ] [EI,(EI) <sup>2</sup> /GA]	[1,4] [2,3,6,-5]	{x1,y1; x2,y2}
BEAM 4, 188, 189	1n <sub>2021</sub> <sup>12</sup>	<sup>110</sup> 210 310	[EA,GI <sub>1</sub> ] [EI <sub>2</sub> ,EI <sub>3</sub> ,(EI <sub>2</sub> ) <sup>2</sup> /GA <sub>2</sub> ,(EI <sub>3</sub> ) <sup>2</sup> /GA <sub>3</sub> ]	[1,4] [2,3,6,-5]	n=2 for BEAM4,188 n=3 for BEAM189 K1=0
BEAM 188,189	1n <sub>2021</sub> <sup>1 1</sup> 2 1 110 210 310	<sup>110</sup> 210 310	[EA] [EI <sub>2</sub> ,EI <sub>3</sub> ,GA <sub>2</sub> ,GA <sub>3</sub> ] [GI <sub>1</sub> ,EI <sub>φ</sub> ]	[1] [2,3,6,-5] [4,7]	n=2 for BEAM188 n=3 for BEAM189 K1=1
SHELL 57	2n11		[Kx·h,Ky·h]		{x1,y1,z1; ..., xn,yn,zn}, n = 3 or 4
SHELL 157	2n12		[Kx·h,Rx,Ky·h,Ry]		{x1,y1,z1; ..., xn,yn,zn}, n = 3 or 4
SHELL 41	2n12		[E·h,ν,Ey·h,Gxy·h]		{x1,y1,z1; ..., xn,yn,zn}, n = 3 or 4
SOLID 182	2412		[E·h,ν]		{x1,y1; ..., x4,y4} K2=0
SOLID 285	3413		[E,ν,Ey,Gxy,Ez,vyz,vxz,Gyz,Gxz]		{x1,y1,z1; ..., x4,y4,z4}
SOLID 187, 92	3 <sup>10</sup> 13		[E,ν,Ey,Gxy,Ez,vyz,vxz,Gyz,Gxz]		{x1,y1,z1; ..., x10,y10,z10}
SOLID 185	3813		[E,ν,Ey,Gxy,Ez,vyz,vxz,Gyz,Gxz]		{x1,y1,z1; ..., x8,y8,z8} K2=0
SOLID 185	3 <sub>-3</sub> <sup>8</sup> 13		[E,ν,Ey,Gxy,Ez,vyz,vxz,Gyz,Gxz]		{x1,y1,z1; ..., x8,y8,z8} K2=3
SOLID 186	3 <sub>12</sub> <sup>8</sup> 13		[E,ν,Ey,Gxy,Ez,vyz,vxz,Gyz,Gxz]		{x1,y1,z1; ..., x20,y20,z20}
SOLID 70,87,90	3n11		[Kx,Ky,Kz]		n = 4,5,6,8,10,13,15,16,20
SOLID 122,123, 231, 232,96	3n11		[μx,μy,μz]		{x1,y1,z1; ..., xn,yn,zn} n={20,15,13,10,8,6,5,4}
SOLID 127	3 <sup>10</sup> 11		[μx,μy,μz]		{x1,y1,z1; ..., x10,y10,z10}, p-element
SOLID 128	3n11		[μx,μy,μz]		{x1,y1,z1; ..., xn,yn,zn}, n={20,15,10}p
SOLID 147	3n13		[E,ν,Ey,Gxy,Ez,vyz,vxz,Gyz,Gxz]		{x1,y1,z1; ..., xn,yn,zn}, n={20,15,10}p
SOLID 148	3 <sup>10</sup> 13		[E,ν,Ey,Gxy,Ez,vyz,vxz,Gyz,Gxz]		{x1,y1,z1; ..., x10,y10,z10} p
SOLID 45,46,64,185	3n13		[E,ν,Ey,Gxy,Ez,vyz,vxz,Gyz,Gxz]		{x1,y1,z1; ..., xn,yn,zn}, n={8,6,4}
SOLID 186, 95, 191	3n13		[E,ν,Ey,Gxy,Ez,vyz,vxz,Gyz,Gxz]		{x1,y1,z1; ..., xn,yn,zn}, n={20,15,13,10}

SOLID 187	$3^{10}13$	$[E, \nu, E_y, G_{xy}, E_z, \nu_{yz}, \nu_{xz}, G_{yz}, G_{xz}]$	$\{x1, y1, z1; \dots; x10, y10, z10\}$
-----------	------------	--	--

Окончание таблицы

Элемент ANSYS	<i>dncm</i>	<i>Kot</i>	[Параметры материала]	Ин- дексы	Координаты узлов
SOLID 226,227	$3n1_1^3$	110 010 110	$[E, \nu, E_y, G_{xy}, E_z, \nu_{yz}, \nu_{xz}, \dots; -\beta_x, -\beta_y, -\beta_z]$ $[K_x, K_y, K_z]$		$\{x1, y1, z1; \dots; xn, yn, zn\} n=\{20, 15, 13, 10\}$ K1=11
	$3n1_1^3$	110 010 110	$[E, \nu, E_y, G_{xy}, E_z, \nu_{yz}, \nu_{xz}, \dots; -\beta_x, -\beta_y, -\beta_z]$ $[K_x, K_y, K_z]$		K1=101
	$3n1_1^3$	110 110 110 110	$[E, \nu, E_y, G_{xy}, E_z, \nu_{yz}, \nu_{xz}, \dots; e11, \dots, e63]$ $[-\varepsilon_x, -\varepsilon_y, -\varepsilon_z; e11, \dots, e63]$		K1=1001
	$3n1_1^1$	110 110 010	$[K_x, K_y, K_z]$ $[-\varepsilon_x, -\varepsilon_y, -\varepsilon_z; -\beta_x, -\beta_y, -\beta_z]$		K1=110
	$3n1_1^3$	110 010 110	$[E, \nu, E_y, G_{xy}, E_z, \nu_{yz}, \nu_{xz}, \dots; -\beta_x, -\beta_y, -\beta_z]$ $[K_x, K_y, K_z]$		K1=111
	$3n1_1^3$	110 010 110 110 110 110	$[E, \nu, E_y, G_{xy}, \dots; -\beta_x, -\beta_y, -\beta_z; e11, \dots, e63]$ $[K_x, K_y, K_z]$ $[-\varepsilon_x, -\varepsilon_y, -\varepsilon_z; e11, \dots, e63]$		K1=1011
SOLID 231,232	$3n11$		$[\mu_x, \mu_y, \mu_z]$		$\{x1, y1, z1; \dots; xn, yn, zn\} n=\{20, 15, 13, 10\}$
SOLID 62	$3n1_1^3$	110 010 11-1 110 110	$[E, \nu, E_y, G_{xy}, E_z, \nu_{yz}, \dots; -\beta_x, -\beta_y, -\beta_z]$ $[\nu_x, \nu_y, \nu_z]$ $[0, 0, 0; -\gamma_x, -\gamma_y, -\gamma_z]$		n=8,6,5,4;
SOLID 69	$3n1_1^3$	110 110 010	$[K_x, K_y, K_z]$ $[-\varepsilon_x, -\varepsilon_y, -\varepsilon_z; -\beta_x, -\beta_y, -\beta_z]$		n=8,6,5,4;
SOLID 223	$2n1_1^2$	110 010 110	$[E, h, \nu, E_y, h, G_{xy}, h; -\beta_x, -\beta_y]$ $[K_x, h, K_y, h]$		n=8,6; K1=11
223	$2n1_1^2$	110 110 110 110	$[E, \nu, E_y, G_{xy}, E_z, \nu_{yz}, \nu_{xz}, \dots; e11, \dots, e63]$ $[-\varepsilon_x, -\varepsilon_y, -\varepsilon_z; e11, \dots, e63]$		K1=1001
SOLID 223	$2n1_1^2$	110 010 110 110 010	$[E, h, \nu, E_y, h, G_{xy}, h; -\beta_x, -\beta_y]$ $[K_x, h, K_y, h]$ $[\mu_x, \mu_y; -\gamma_x, -\gamma_y]$		n=8,6; K1=1011

### Заключение

Предложен новый способ систематического описания произвольного конечного элемента в виде набора целых чисел *dncmkot*, который однозначно отражает геометрию, кинематику и физический функционал элемента. Предложен также алгоритм в виде конкретных формул, позволяющий по данному набору чисел сгенерировать необходимые матрицы: функций формы, жёсткости и пр.

Приведены примеры применения данной классификации в виде обозначения существующих элементов из программного комплекса ANSYS посредством комбинаций *dncmkot*.

С использованием этого же подхода были созданы новые конечные элементы,

по результатам исследований опубликованы статьи в рецензируемых изданиях.

Приведенная классификация в её простейшей форме, безусловно, не охватывает все существующие элементы, поэтому в последующей работе, подготовленной к публикации, она будет модифицирована с целью включения в неё более сложных элементов:

- элементов сложной кинематики с конденсацией узлов на этапе построения;
- элементов, сочетающих разные физические поля и функционалы;
- неполиномиальных функции формы и др.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dmitrochenko, O. A formal procedure and invariants of a transition from conventional finite elements to the absolute nodal coordinate formulation

/ O. Dmitrochenko, A. Mikkola // Multibody System Dynamics. – 2009. – Vol. 22(4). – P. 323–339.  
2. Dmitrochenko, O. Digital Nomenclature Code for Topology and Kinematics of Finite Elements based

- on the Absolute Nodal Coordinate Formulation / O. Dmitrochenko, A. Mikkola // Proceedings of the Institute of Mechanical Engineering. Part K: Journal of Multi-Body Dynamics. – 2011. – Vol. 225(1). – P. 34–51.
3. Dmitrochenko, O. Generalization of Plate Finite Elements for Absolute Nodal Coordinate Formulation / O. Dmitrochenko, D. Pogorelov // Multibody System Dynamics. – 2003. – Vol. 10(1). – P. 17–43.
  4. Yoo, W.-S. A new thin spatial beam element using the absolute nodal coordinates: Application to a rotating strip / W.-S. Yoo, O. Dmitrochenko, S.-J. Park, O.-K. Lim // Mechanics Based Design of Structures and Machines. – 2005. – Vol. 33(3-4). – P. 399–422.
  5. Dmitrochenko, O. Two Simple Triangular Plate Elements Based on the Absolute Nodal Coordinate Formulation / O. Dmitrochenko, A. Mikkola // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. – 2008. – Vol. 3(4). – P. 1-8.
  6. Olshevsky, A. A triangular plate element 2343 using second-order absolute-nodal-coordinate slopes: numerical computation of shape functions / A. Olshevsky, O. Dmitrochenko, S.-S. Lee, C.-W. Kim // Nonlinear Dynamics. – 2013. – Vol. 74. – P. 1–20.
  7. Olshevskiy, A. Three- and four-noded planar elements using absolute nodal coordinate formulation / A. Olshevskiy, O. Dmitrochenko, C.-W. Kim // Multibody System Dynamics. – 2013. – Vol. 29(3). – P. 255–269.
  8. Olshevsky, A. Three-Dimensional Solid Elements Using Slopes in the Absolute Nodal Coordinate Formulation / A. Olshevsky, O. Dmitrochenko, C.-W. Kim // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. – 2014. – Vol. 9(2). – P. 1-10.
  9. Dmitrochenko, O.N. Coupled deformation modes in the large deformation finite element analysis: generalization / O.N. Dmitrochenko, B.A. Hussein, A.A. Shabana // Journal of computational and nonlinear dynamics. – 2009. – Vol. 4(2). – P. 1-10.
1. Dmitrochenko, O. A formal procedure and invariants of a transition from conventional finite elements to the absolute nodal coordinate formulation / O. Dmitrochenko, A. Mikkola // Multibody System Dynamics. – 2009. – Vol. 22(4). – P. 323–339.
  2. Dmitrochenko, O. Digital Nomenclature Code for Topology and Kinematics of Finite Elements based on the Absolute Nodal Coordinate Formulation / O. Dmitrochenko, A. Mikkola // Proceedings of the Institute of Mechanical Engineering. Part K: Journal of Multi-Body Dynamics. – 2011. – Vol. 225(1). – P. 34–51.
  3. Dmitrochenko, O. Generalization of Plate Finite Elements for Absolute Nodal Coordinate Formulation / O. Dmitrochenko, D. Pogorelov // Multibody System Dynamics. – 2003. – Vol. 10(1). – P. 17–43.
  4. Yoo, W.-S. A new thin spatial beam element using the absolute nodal coordinates: Application to a rotating strip / W.-S. Yoo, O. Dmitrochenko, S.-J. Park, O.-K. Lim // Mechanics Based Design of Structures and Machines. – 2005. – Vol. 33(3-4). – P. 399–422.
  5. Dmitrochenko, O. Two Simple Triangular Plate Elements Based on the Absolute Nodal Coordinate Formulation / O. Dmitrochenko, A. Mikkola // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. – 2008. – Vol. 3(4). – P. 1-8.
  6. Olshevsky, A. A triangular plate element 2343 using second-order absolute-nodal-coordinate slopes: numerical computation of shape functions / A. Olshevsky, O. Dmitrochenko, S.-S. Lee, C.-W. Kim // Nonlinear Dynamics. – 2013. – Vol. 74. – P. 1–20.
  7. Olshevskiy, A. Three- and four-noded planar elements using absolute nodal coordinate formulation / A. Olshevskiy, O. Dmitrochenko, C.-W. Kim // Multibody System Dynamics. – 2013. – Vol. 29(3). – P. 255–269.
  8. Olshevsky, A. Three-Dimensional Solid Elements Using Slopes in the Absolute Nodal Coordinate Formulation / A. Olshevsky, O. Dmitrochenko, C.-W. Kim // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. – 2014. – Vol. 9(2). – P. 1-10.
  9. Dmitrochenko, O.N. Coupled deformation modes in the large deformation finite element analysis: generalization / O.N. Dmitrochenko, B.A. Hussein, A.A. Shabana // Journal of computational and nonlinear dynamics. – 2009. – Vol. 4(2). – P. 1-10.

*Статья поступила в редколлегию 27.10.2016.*

*Рецензент: д.т.н., профессор Брянского государственного технического университета  
Соколов В.И.*

#### Сведения об авторах:

**Дмитроченко Олег Николаевич**, докторант Брянского государственного технического университета, тел.: 568637, e-mail: [dmitroleg@rambler.ru](mailto:dmitroleg@rambler.ru).

**Dmitrochenko Oleg Nikolayevich**, Doctoral student of Bryansk State Technical University, e-mail: [dmitroleg@rambler.ru](mailto:dmitroleg@rambler.ru).