

Старцева Л.В., канд. техн. наук, проф.,  
 Валиева Э.Т., магистрант,  
 Гарифуллин М.З., магистрант,  
 Набиев И.И., магистрант,  
 Шайхутдинов А.А., магистрант  
 Уфимский государственный нефтяной технический университет

## ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ РАЗЛИЧНЫХ ФАКТОРОВ

mgarifullin@list.ru

Оболочковые конструкции из железобетона являются одними из самых изящных и, в то же время, экономичных архитектурных решений, но обладают огромным недостатком, а именно, сложностью расчётов при их проектировании. Сегодня, благодаря внедрению современных компьютерных технологий в процессы проектирования строительных конструкций, увеличилась скорость расчётов и их точность. Метод конечных элементов в совокупности с современными компьютерными технологиями создаёт возможности для моделирования и расчёта конструкций любой сложности. Для проверки корректности данного метода проведено сравнение результатов расчёта модели, полученной рассмотренным способом и аналогичной, возведённой средствами SCAD. В данной работе исследуется напряженно-деформированное состояние в зависимости от наличия различных факторов. Таковыми являются соотношение стрелы подъёма к пролету и толщины оболочки к ее радиусу. Ставится задача подбора пологой оболочки наиболее рациональной по геометрическим характеристикам. Кроме того, исследуется изменение прочностных и деформативных характеристик в зависимости от условий закрепления оболочки по торцам (шарнирное/жесткое). Исследование проводится при действиях постоянных и временных нагрузок и приводятся наиболее оптимальные варианты конструкции пологих оболочек.

**Ключевые слова:** Пологая оболочка, напряженно-деформированное состояние, поперечные силы, безмоментные и моментальные усилия, условия закрепления, ПК СКАД.

1) Напряженно-деформированное состояние пологой оболочки с квадратным планом описывается следующей системой дифференциальных уравнений, имеющих вид: [3]

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 F - \nabla_k^2 W = 0 \quad (1)$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 W + \nabla_k^2 F = q \quad (2)$$

где неизвестными являются функции напряжений  $F(x,y)$  и прогиба  $W(x,y)$ .

Решим задачу, принимая искомые функции в виде двойных тригонометрических рядов [1–2]

$$F = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$W = B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3)$$

Для отыскания постоянных  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  воспользуемся методом Бубнова-Галеркина в

$$A_{mn} = \frac{R_{mn} \delta'_{mn}}{\delta_{mn} r'_{mn} + \delta'_{mn} r'_{mn}}, \quad B_{mn} = \frac{R_{mn} \delta_{mn}}{\delta_{mn} r'_{mn} + \delta'_{mn} r'_{mn}},$$

где

$$\delta_{mn} = \iint_{00}^{ab} \frac{1}{Eh} \left( \frac{\partial^4 F_{mn}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F_{mn}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F_{mn}}{\partial y^4} \right) F_{mn} dx dy \quad (8)$$

$$\delta'_{mn} = \iint_{00}^{ab} \left( K_1 \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial y^2} + K_2 \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x^2} \right) F_{mn} dx dy \quad (9)$$

форме, предложенной Власовым В.З., основанного на условии взаимной ортогональности двух функций

$$\iint_{00}^{ab} L_1 \times F_{mn} dx dy = 0 \quad (4)$$

$$\iint_{00}^{ab} L_2 \times W_{mn} dx dy = 0 \quad (5)$$

где  $L_1$  – первое уравнение, а  $L_2$  – второе уравнение системы (1, 2). Решение системы (4, 5) приводит к следующей системе пар уравнений, которые аналогичны каноническим уравнениям смешанного метода строительной механики

$$A_{mn} \delta_{mn} - B_{mn} \delta'_{mn} = 0 \quad (6)$$

$$A_{mn} r'_{mn} + B_{mn} r_{mn} = R_{mn} \quad (7)$$

Решая эту систему коэффициенты примут вид

$$r'_{mn} = \iint_{00}^{ab} (K_1 \frac{\partial^2 F_{mn}}{\partial y^2} + K_2 \frac{\partial^2 F_{mn}}{\partial x^2}) W_{mn} dx dy \tag{10}$$

$$R_{mn} = q \iint_{00}^{ab} \iint_{00}^{ab} W_{mn} dx dy / \iint_{00}^{ab} W_{mn}^2 dx dy \tag{11}$$

Зная  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  находим прогиб, усилия в заданной системе.

Рассмотрим НДС оболочки с размерами

$$F = A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b};$$

Из выражений (6, 7) получим

$$B_{11} = \frac{16q}{\pi^2 \left( \frac{Eh}{R^2} + \frac{\pi^4 Eh^3}{3a^4} \right)};$$

$$A_{11} = \frac{Eh\alpha^2}{2\pi^2 R} B_{11};$$

Соответственно усилия при  $\nu = 0$  будут

$$M_1 = \frac{Eh^3 \pi^2}{12a^2} B_{11}$$

$$Q_1 = \frac{Eh^3 \pi^3}{4a^3} B_{11}$$

$$N_1 = -\frac{\pi^2}{a^2} A_{11}$$

Используя принятые численные данные получим

$$A_{11} = 673,2 \text{ q}$$

$$B_{11} = 55510,3 \text{ q/E,}$$

Соответственно:

$$W\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right) = 55510,3 \text{ q/E,}$$

$$M_1\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right) = 0,317 \text{ q,}$$

$$N_1\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right) = -46,1 \text{ q.}$$

$a = b = 12 \text{ м; } f_0 = 0,6 \text{ м; } h = 0,1 \text{ м; } R = 60,15 \text{ м.}$

Для решения данной задачи воспользуемся одним членом ряда в выражениях (3)

$$W = B_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad \text{при } \nu = 0$$

На точность решения влияет взятое количество членов ряда. Увеличение числа членов в выражениях  $F$  и  $W$  повышает сложность решения данной задачи, поэтому мы рассмотрели более простые решения при  $m = n = 1$ , чтобы иметь представление о работе полой оболочки под нагрузкой  $q$ .

Далее при исследовании НДС оболочки в зависимости от различных факторов воспользуемся программным комплексом SCAD Office. [4]

Была составлена модель оболочки в виде конечных элементов [7]. Задача решалась с учетом изменения внешней нагрузки, условий закрепления (шарнирное и жесткое защемление), соотношения геометрических характеристик (стрелы подъема  $f$ , толщины оболочки  $\delta$ , радиуса и размеров оболочки  $a, b$ ).

В итоге полученные эпюры прогибов по центральным осям  $x, y$  и усилий  $N_1, N_2$ , а так же моментных усилий. Результаты исследований представлены на соответствующих рисунках 5-25.

Напряжения  $N_x, N_y, M_x, M_y, Q_x, Q_y$  в виду симметрии оболочки получаются однозначными [8], характер усилий представлен на рисунках 1-20 в зависимости от соотношений  $\frac{f}{L}$  и изменения радиуса оболочки  $R$ . Все расчеты по ПК SCAD [6] производим для определенного соотношения  $\frac{f}{L}$  и  $R$ .

Прогибы w относительно оси Oz, мм

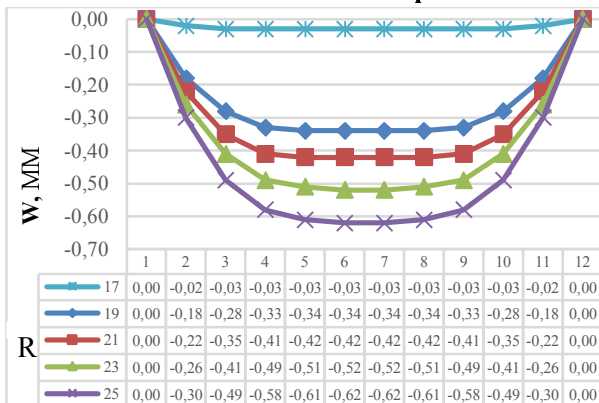


Рис. 1. Шарнирное закрепление в зависимости от R

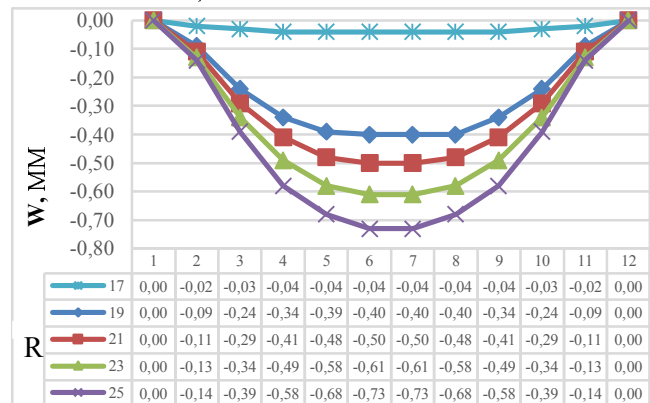


Рис. 2. Жесткое закрепление в зависимости от R

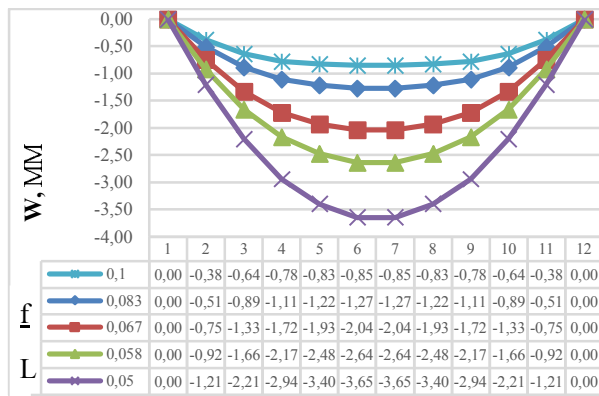


Рис. 3. Шарнирное закрепление в зависимости от  $\frac{f}{L}$

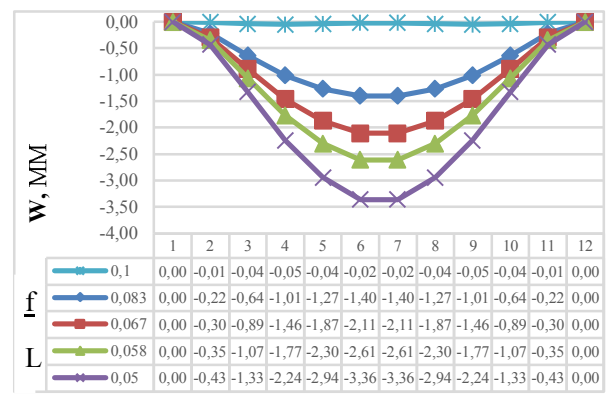


Рис. 4. Жесткое закрепление в зависимости от  $\frac{f}{L}$

Прогибы w относительно оси Oz, мм

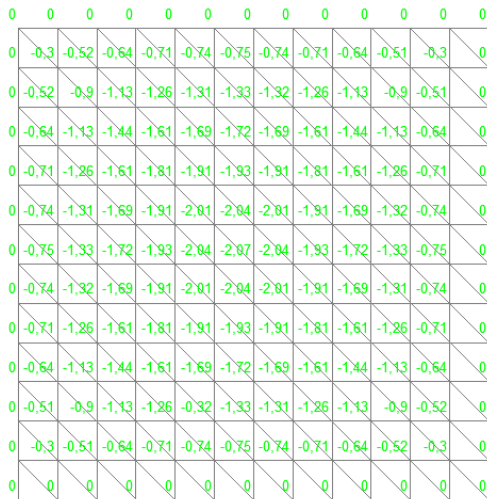


Рис. 5. Шарнирное закрепление при  $\frac{f}{L} = \frac{1}{15}$

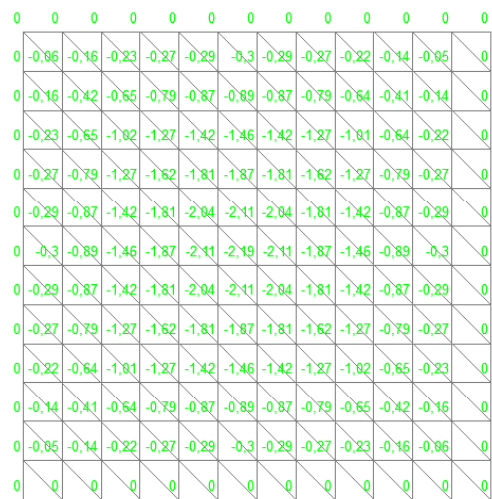


Рис. 6. Жесткое закрепление при  $\frac{f}{L} = \frac{1}{15}$

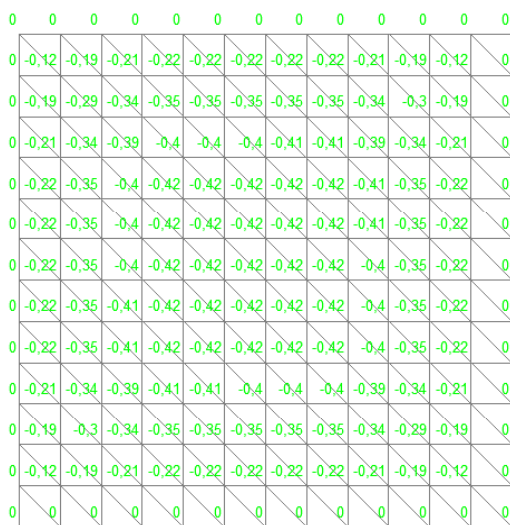


Рис. 7. Шарнирное закрепление при R=21 м

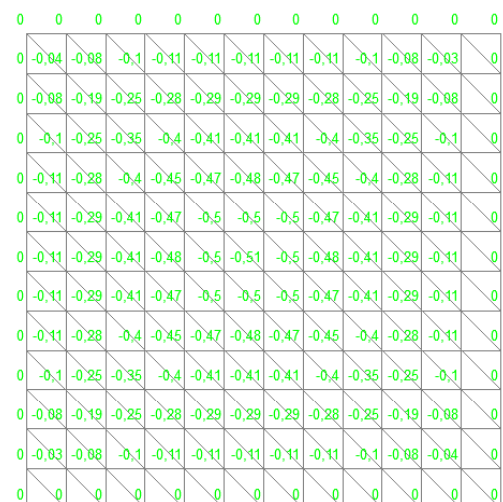


Рис. 8. Жесткое закрепление при R=21 м

Напряжения  $N_x, N_y$ , тс/м<sup>2</sup>

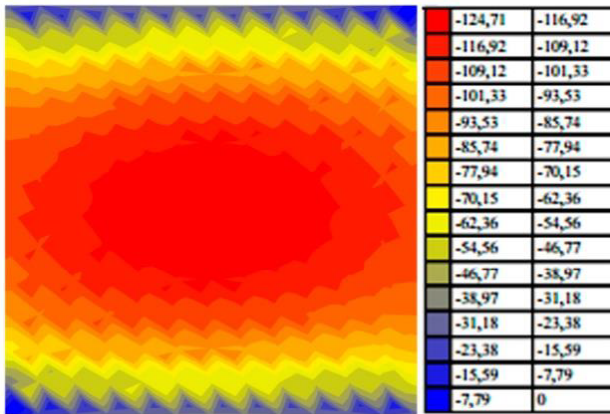


Рис. 9. Шарнирное закрепление при  $\frac{f}{L} = \frac{1}{15}$

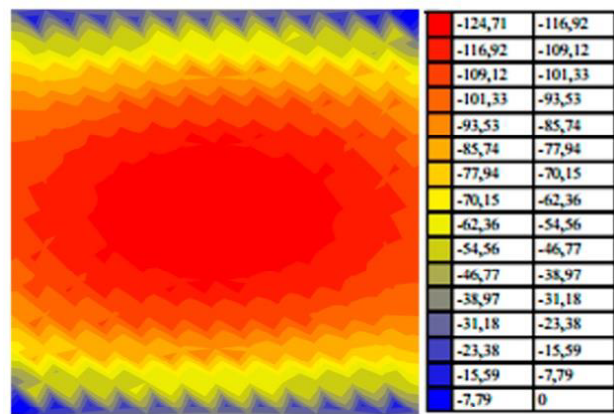


Рис. 10. Жесткое закрепление при  $\frac{f}{L} = \frac{1}{15}$

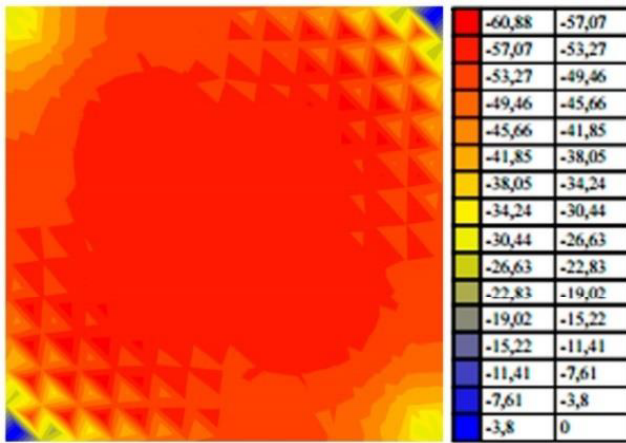


Рис. 11. Шарнирное закрепление при R=21 м

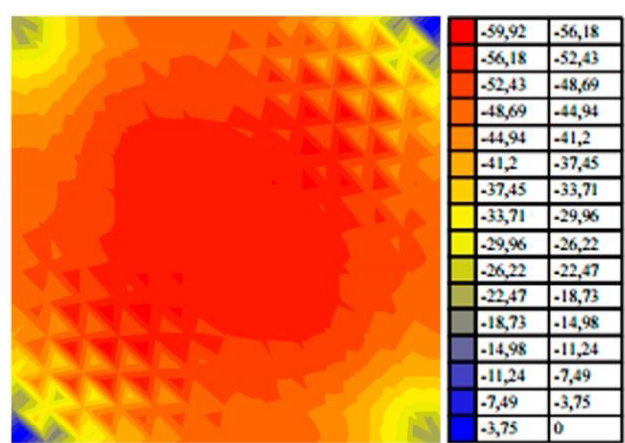


Рис. 12. Жесткое закрепление при R=21 м

Напряжения  $M_x, M_y$ , тс/м<sup>2</sup>

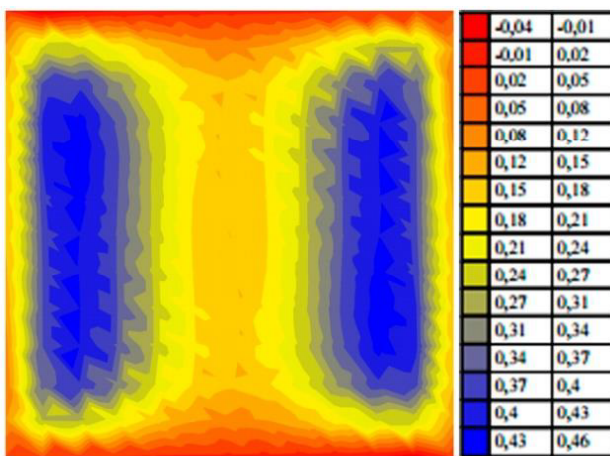


Рис. 13. Шарнирное закрепление при  $\frac{f}{L} = \frac{1}{15}$

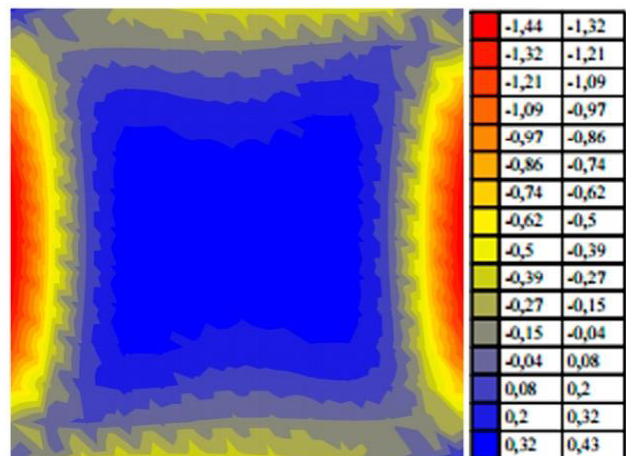


Рис. 14. Жесткое закрепление при  $\frac{f}{L} = \frac{1}{15}$





3. Колкунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек. Учеб. пособие для вузов. М.: Высш. школа, 1972. 296 с.

4. Старцева Л.В., Архипов В.Г., Семенов А.А. Строительная механика в примерах и задачах. Учебное издание. М.: Изд-во АСВ, 2013. 224 с.

5. Нагрузки и воздействия: СП 20.13330.2011 М.: Москва, 2011.

6. Семенов А.А., Габитов А.И. Проектно-вычислительный комплекс SCAD в учебном процессе. Статический счет. Учеб. пособие. М.: Издательство АСВ, 2005. 152 с.

7. Ржаницын А.Р. Пологие оболочки и волнистые настилы. Научное сообщение. Выпуск №14. М.: Госстройиздат, 1960. 128 с.

8. Рюле Г. Пространственные покрытия (конструкции и методы возведения). В двух томах. Том I. Железобетон, армоцемент. Москва, Стройиздат. 1973. 304 с.

---

**Startseva L.V., Valieva E.T., Garifullin M.Z., Nabiyev I.I., Shaikhutdinov A.A.**  
**INVESTIGATION OF THE STRESSED-DEFORMED STATE OF THE SHADOW SHELL AS A DEPENDENCE ON VARIOUS FACTORS**

*Membraned structures made of reinforced concrete are among the most elegant and, at the same time, economical architectural solutions, but they have a huge drawback, namely, the complexity of the calculations when designing them. Today, thanks to the introduction of modern computer technologies in the design of building structures, the speed of calculations and their accuracy has increased. The finite element method in combination with modern computer technologies creates opportunities for modeling and calculation of structures of any complexity. To verify the correctness of this method, a comparison is made between the results of the calculation of the model obtained by the considered method and the analogous one, constructed by means of SCAD. In this paper, the stress-strain state is investigated depending on the presence of various factors. These are the ratio of the lifting arm to the span and the thickness of the shell to its radius. The problem of choosing a shallow shell is most rational in terms of geometric characteristics. In addition, the change in strength and deformation characteristics is investigated depending on the conditions for securing the shell along the ends (articulated / rigid). The study is carried out under the action of constant and temporary loads and the most optimal variants of the construction of shallow shells are given.*

**Keywords:** *sloping shell, stress-strain state, transverse forces, momentless and instantaneous forces, fastening conditions, PC SCAD.*

---

**Старцева Луиза Владимировна**, кандидат технических наук, профессор кафедры строительных конструкций. Уфимский государственный нефтяной технический университет.  
Адрес: Россия, 450062, г. Уфа, улица Менделеева, 195, корпус УГНТУ № 5.  
E-mail: info@rusoil.net

**Валиева Элина Тахировна**, магистрант кафедры строительных конструкций. Уфимский государственный нефтяной технический университет.  
Адрес: Россия, 450062, г. Уфа, улица Менделеева, 195, корпус УГНТУ № 5.

**Гарифуллин Марат Зуфарович**, магистрант кафедры строительных конструкций. Уфимский государственный нефтяной технический университет.  
Адрес: Россия, 450062, г. Уфа, улица Менделеева, 195, корпус УГНТУ № 5.

**Набиев Ильнур Илдусович**, магистрант кафедры строительных конструкций. Уфимский государственный нефтяной технический университет.  
Адрес: Россия, 450062, г. Уфа, улица Менделеева, 195, корпус УГНТУ № 5.

**Шайхутдинов Айдар Азаматович**, магистрант кафедры строительных конструкций. Уфимский государственный нефтяной технический университет.  
Адрес: Россия, 450062, г. Уфа, улица Менделеева, 195, корпус УГНТУ № 5.