

DOI: 10.12737/article_5a27cb8035e763.53598057

Юрьев А.Г., д-р техн. наук, проф.,
Зинькова В.А., ст. преп.

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ В СТРУКТУРНОМ СИНТЕЗЕ
МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ФЕРМ*

yuriev_ag@mail.ru

Одним из основных тормозов в развитии оптимального проектирования металлических ферм является обеспечение устойчивости сжатых стержней. Попытки вовлечения этой проблемы на основе критерия минимума объема (массы) материала оказались неудачными из-за трудностей отыскания глобального минимума. Оптимальное решение конструкции фермы в отношении ее топологии, геометрии, площадей и форм поперечных сечений стержней осуществляется на основе вариационных принципов структурного синтеза. Вытекающий из них универсальный критерий оптимальности приводит к минимуму расхода материала. Специфика сжатых стержней отражена в выражении потенциальной энергии деформации. В то же время полное решение проблемы сжатых стержней осуществляется при дополнительном их исследовании на состояние стесненной или принужденной потери устойчивости.

Ключевые слова: структурный синтез фермы, вариационная постановка задачи, стесненная и принужденная потеря устойчивости

Введение. Одним из основных тормозов в развитии оптимального проектирования ферм явилось обеспечение устойчивости сжатых стержней. Эта проблема отражена в работе [1].

Практическая ценность использования теорем Леви невысока из-за неучета потери устойчивости. Попытки использовать метод последовательных приближений, в котором принимают на каждом шаге коэффициент продольного изгиба φ , отвечающий усилию, найденному на предыдущем шаге, к успеху не приводят: процесс расходится. Поэтому задача оптимизации ферм с учетом устойчивости должна ставиться как существенно нелинейная.

Теория Максвелла – Мичелла [2, 3] и ее развитие не получили большого практического применения при проектировании ферм, главным образом из-за того, что проектируемые конструкции неудовлетворительны с точки зрения устойчивости и технологичности.

Попытки вовлечения проблемы устойчивости сжатых стержней в теорию оптимизации ферм на основе критерия минимума объема (массы) материала оказались неудачными из-за трудностей отыскания глобального минимума. Решение этой проблемы стало возможным после установления вариационных принципов структурного синтеза [4], из которых вытекает формулировка универсального энергетического критерия оптимальности, обеспечивающего глобальный минимум объема (массы) материала.

Основная часть. Решение изопериметрической задачи при заданном объеме материала виртуальной фермы с внутренними силами N_i/φ_i [5]

свидетельствует о ее квазиравнонапряженности. Тем самым определяется критерий оптимальности проектируемой фермы.

В металлических фермах равнонапряженность связывают с расчетным сопротивлением R [6], принятие которого рассматривают как дополнительное условие в оптимизационной задаче.

Поскольку площадь поперечного сечения равна

$$A_i = N_i / (\varphi_i R), \quad (1)$$

выражение потенциальной энергии деформации фермы принимает вид:

$$J = \frac{R}{2E} \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{\varphi_i}, \quad (2)$$

где E – модуль продольной упругости, l_i – длина стержня, n – число стержней.

Выражение объема материала с учетом (1) и (2) представляется в виде

$$V = 2EJ / R^2. \quad (3)$$

Следовательно, в случае глобального минимума функционала (2) объем материала фермы также достигает глобального минимума.

Методика СНиП, построенная на зависимости коэффициента φ от гибкости стержня, требует дополнительного обоснования с позиции стесненной или принужденной потери устойчивости [7–9].

Потенциальная энергия деформации U_i сжатого стержня фермы с жесткими узлами при его бифуркации равна сумме работ концевых сил:

$$U_i = A_i(N_i) + A_i(M_i, Q_i), \quad (4)$$

где $A_i(N_i) = N_i \Delta_i$ – работа продольных сжимающих сил на сближении концов стержня от изгиба; $A_i(M_i, Q_i)$ – работа изгибающих моментов и поперечных сил на перемещениях при изгибе стержня.

Так как $U_i > 0$, то сумма работ (4) также всегда больше нуля. Но знаки слагаемых $A_i(N_i)$ и $A_i(M_i, Q_i)$ могут быть либо одинаковы, либо различны. Для сжимающей силы N_i ее работа $A_i(N_i) > 0$, и это значит, что она способствует бифуркации стержня, то есть активной потери устойчивости. Работа других концевых усилий может быть больше, меньше или равна нулю.

$A_i(M_i, Q_i) > 0$ означает, что работы одной продольной силы N_i недостаточно для компенсации приращения величины U_i , и окружающие стержни помогают его потере устойчивости

(пассивная, или принужденная, потеря устойчивости).

$A_i(M_i, Q_i) < 0$ свидетельствует о том, что окружающие стержни сопротивляются его бифуркации и, следовательно, сам стержень вовлекает в бифуркацию сжатые окружающие стержни (активная, или стесненная, потеря устойчивости).

Случай $A_i(M_i, Q_i) = 0$ можно отнести к активной нестесненной потере устойчивости.

Естественно, что бифуркация стержня зависит от топологии системы, под которой подразумевается расположение стержней и способ их соединения между собой [10]. Вопросам оптимальной топологии посвящены работы [11–12].

На рис. 1 представлена оптимальная по структуре ферма [13] с параллельными поясами, имеющая раскосую решетку без стоек с нисходящим опорным раскосом и централизацией осей раскосов в узлах. Расчетная нагрузка: $F_{(3)} = F_{(7)} = 70$ кН, $F_{(1)} = 35$ кН. Модуль упругости $E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа.

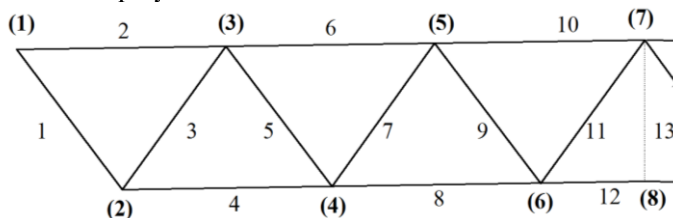


Рис. 1. Оптимальная конструкция фермы

Таблица 1

Внутренние усилия в ферме

Узел	Стержень	N , кН	M , кН·см	Q , кН
(1)	1	222,11	131,08	-0,98
	2	-151,63	-131,08	0,86
(2)	1	222,11	-110,92	-0,98
	3	-221,66	-20,12	0,26
	4	265,19	131,04	-1,03
(3)	2	-151,63	123,79	0,86
	3	-221,66	-43,22	0,26
	5	133,58	-88,11	0,61
	6	-59,96	7,54	-1,02
(4)	4	265,19	173,91	-1,03
	5	133,58	-63,57	0,61
	7	-134,90	-26,09	0,10
	8	425,22	-84,25	0,003
(5)	6	-59,96	292,95	-1,02
	7	-134,90	2,13	0,10
	9	49,16	-96,00	0,66
	10	-168,94	-199,08	-0,20
(6)	8	425,22	83,29	0,003
	9	49,16	-68,42	0,66
	11	-482,47	13,75	0,98
	12	45,72	-28,62	0
(7)	10	-168,94	258,28	-0,2
	11	-482,47	-258,28	0,98

В табл. 1 представлены внутренние усилия N , M и Q , вычисленные в предположении, что узлы фермы жесткие. Продольные усилия в сжатых стержнях отмечены знаком минус. Моменты на концах стержней, направленные против хода часовой стрелки, приняты положительными. Пары поперечных сил обозначены по тому же принципу.

В табл. 2 представлены перемещения по горизонтальной (Δ_x) и вертикальной (Δ_y) осям и узлы поворота (ϑ) узлов фермы.

Таблица 2

Линейные и угловые перемещения узлов

Узел	Δ_x , см	Δ_y , см	ϑ , 10^{-3} рад
(1)	0	0	4,52
(2)	-0,66	-0,68	4,23
(3)	0,11	-1,42	4,56
(4)	-0,46	-2,03	3,75
(5)	0,09	-2,60	2,82
(6)	-0,16	-2,86	1,91
(7)	0	-3,05	0

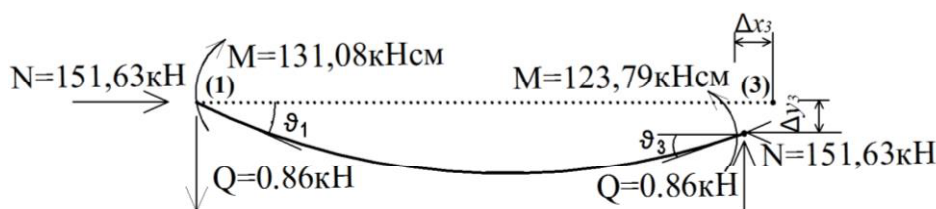


Рис. 2. Стержень 1 из фермы на рис. 1

Выделим стержень 2 (рис. 2), приложим к нему внутренние усилия и покажем перемещения его краев. Вычислим работу $A_i (M_i, Q_i)$:

$$A_2 (M_i, Q_i) = \frac{1}{2} (131,08 \cdot 4,52 \cdot 10^{-3} - 123,79 \cdot 4,56 \cdot 10^{-3} - 0,86 \cdot 0,11) = -0,03 \text{ кН} \cdot \text{см},$$

т.е. имеет место активная, или стесненная, потеря устойчивости.

Для стержней 6 и 10 аналогично вычисляем:

$$A_6 (M_i, Q_i) = \frac{1}{2} (-7,54 \cdot 4,56 \cdot 10^{-3} - 292,95 \cdot 2,82 \cdot 10^{-3} - 1,02 \cdot 1,42 + 1,02 \cdot 2,6) = 0,17 \text{ кН} \cdot \text{см},$$

$$A_{10} (M_i, Q_i) = \frac{1}{2} (199,08 \cdot 2,82 \cdot 10^{-3} - 258,28 \cdot 0 - 0,2 \cdot 2,6 + 0,2 \cdot 3,05) = 0,32 \text{ кН} \cdot \text{см},$$

т.е. имеет место пассивная, или принужденная, потеря устойчивости.

Проведем аналогичные исследования для сжатых раскосов:

$$A_3 (M_i, Q_i) = \frac{1}{2} [20,12 \cdot 4,23 \cdot 10^{-3} + 43,22 \cdot 4,56 \cdot 10^{-3} - 0,26(0,66 \cdot 0,866 - 0,68 \cdot 0,5) - 0,26(0,11 \cdot 0,866 + 1,42 \cdot 0,5)] = 0,$$

$$A_7 (M_i, Q_i) = \frac{1}{2} [26,09 \cdot 3,75 - 2,13 \cdot 2,82 - 0,1(0,46 \cdot 0,866 - 1,42 \cdot 0,5) - 0,1(0,09 \cdot 0,866 + 2,65 \cdot 0,5)] = 0,$$

$$A_{11} (M_i, Q_i) = \frac{1}{2} [(-13,75 \cdot 1,91 + 258,28 \cdot 0) - 0,98(0,16 \cdot 0,866 - 2,86 \cdot 0,5) - 0,98 \cdot 3,05 \cdot 0,5] = -0,15 \text{ кН} \cdot \text{см}.$$

Таким образом, стержням 3 и 7 присуща нестесненная, а стержню 11 – стесненная активная потеря устойчивости.

Так как обычно сечения элементов унифицируются, то такую унификацию целесообразно осуществлять, ориентируясь на блоки элементов с активной бифуркацией. В данном случае это касается верхнего пояса фермы.

Выводы. Оптимальное решение конструкции фермы в отношении ее топологии, геометрии, площадей и форм поперечных сечений стержней осуществляется на основе вариационных принципов структурного синтеза. Вытекающий из них универсальный критерий оптимальности приводит к минимуму расхода материала. Специфика сжатых стержней отражена в выражении потенциальной энергии деформации. В то же время полное решение проблемы сжатых стержней осуществляется при дополнительном их исследовании на состояние стесненной или принужденной потери устойчивости.

**Работа выполнена в рамках Программы развития опорного университета на базе БГТУ им. В.Г. Шухова.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рейтман М.И., Шапиро Г.С. Методы оптимального проектирования деформируемых тел. М.: Наука, 1976. 266 с.
2. Michell A.G.M. The limits of economy of materials in framestructures // Philosophical Magazine and Journal of Science. 1904. Vol. 8. № 47.
3. Прагер В. Основы теории оптимального проектирования конструкций. М.: Мир, 1977. 111 с.
4. Юрьев А.Г. Строительная механика: структурный синтез. М.: МИСИ, 1982. 100 с.
5. Юрьев А.Г., Зинькова В.А., Смоляго Н.А., Яковлев О.А. Оптимизация структуры металлических ферм // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2017. № 7. С. 41–45.
6. Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*: СП 16.13330.2011. М.: ОАО «ЦПП», 2011. 171 с.
7. Смирнов А.Ф. Статическая и динамическая устойчивость сооружений. М.: Трансдориздат, 1947.
8. Александров А.В. Роль отдельных элементов стержневой системы при потере устойчивости // Вестник МИИТ. 2001. Вып. 5.
9. Александров А.В., Травуш В.И., Матвеев А.В. О расчете стержневых конструкций на

устойчивость // Промышленное и гражданское строительство. 2002. № 3. С. 16–19.

10. Majid K.I. Optimum design of structures. London: Newnes – Butterworths, 1979. 238 p.

11. Zinkova V.A., Yuriev A.G., Peshkova E.V. Designing of tube trusses without gusset plate with joint connections // International Journal of Applied Engineering Research. 2015. № 5. Vol. 10. P. 1239–12398.

12. Зинькова В.А. Оптимизация топологии металлических ферм // Вестник БГТУ им. В.Г. Шухова. 2015. № 2. С. 37–40.

13. Юрьев А.Г., Зинькова В.А. Вариационный метод определения конфигурации плоских металлических ферм // Zbornik radova: Visoka tehnička škola strukovnih studija Niš. Niš (Serbia), 2016. December. P. 166–169.

Информация об авторах

Юрьев Александр Гаврилович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры теоретической механики и сопротивления материалов.

E-mail: yuriev_ag@mail.ru

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.

Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46.

Зинькова Виктория Анатольевна, начальник отдела создания и оценки объектов интеллектуальной собственности.

E-mail: vikzinkova@mail.ru

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова.

Россия, 308012, Белгород, ул. Костюкова, д. 46.

Поступила в октябре 2017 г.

© Юрьев А.Г., Зинькова В.А., 2017

Yuriev A.G., Zinkova V.A.

STABILITY OF RODS IN THE STRUCTURAL SYNTHESIS OF METAL TRUSSES

One of the main brakes in the development of the optimal design of metal trusses is to ensure the stability of compressed rods. Attempts to engage this issue on the basis of the criterion of minimum volume (mass) of the material were unsuccessful because of the difficulty of finding a global minimum. The optimal solution of the design of the truss in respect of its topology, geometry, areas and shapes of cross sections is based on variational principles for structural synthesis. Stemming from their universal optimality criterion leads to a minimum consumption of material. The specificity of the compressed rods is reflected in the expression of the strain energy. At the same time a complete solution of compressed rods is carried out by additional research on the state of the unconstrained or constrained buckling.

Keywords: structural synthesis of the truss, variational statement of problem the, a constrained and forced buckling.

Information about the authors

Yuriev Aleksandr Gavrilovich, PhD, Professor.

E-mail: vikzinkova@mail.ru

Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov.

Russia, 308012, Belgorod, st. Kostyukova, 46.

Zinkova Viktoriya Anatolyevna, head of department.

E-mail: vikzinkova@mail.ru

Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov.

Russia, 308012, Belgorod, st. Kostyukova, 46.

Received in October 2017

© Yuriev A.G., Zinkova V.A., 2017