

**СВЯЗЬ ПИКОВ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ФЛУКТУАЦИЙ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ И СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ В СПЕКТРЕ КОЛЕБАНИЙ****RELATIONSHIP OF PEAKS OF CORRELATION FUNCTIONS OF AMPLITUDE AND PHASE FLUCTUATIONS WITH EIGEN FREQUENCIES IN OSCILLATION SPECTRUM****А.Р. Поляков***Институт солнечно-земной физики СО РАН,  
Иркутск, Россия, polar@iszf.irk.ru***A.R. Polyakov***Institute of Solar-Terrestrial Physics SB RAS,  
Irkutsk, Russia, polar@iszf.irk.ru*

**Аннотация.** Метод корреляционных функций флукутаций амплитуды и фазы сигнала (КФАФ) используется для обработки колебаний в моделях одномерного и двумерного прямоугольного резонаторов. Для всех случаев получено универсальное соотношение, которое устанавливает связь между периодом повторения пиков на функциях КФАФ и разностью соседних собственных частот  $\Delta\omega_i$  в спектре сигнала. Показано, что для двумерной стоячей волны эта разность может иметь только два значения, каждое из которых соответствует собственным частотам одномерных стоячих волн. Предлагаемый в данной работе метод позволяет обнаруживать все возможные одномерные стоячие волны, которые могут возникать в исследуемом объекте.

**Ключевые слова:** корреляционные функции, флукутации амплитуды и фазы, собственные частоты.

**Abstract.** Method of correlation functions of signal amplitude and phase fluctuations (CFAP) is used for processing oscillations in one-dimensional and two-dimensional rectangular cavity resonator models. For all cases, a universal relation, which gives a relationship between the repetition period of peaks on CFAP functions and the difference of adjacent eigenfrequencies in the signal spectrum was obtained. It is shown that for two-dimensional standing wave, this difference can have only two values, each of which corresponds to eigenfrequencies of one-dimensional standing waves. The proposed method allows us to detect all possible one-dimensional standing waves which can occur in the object under study.

**Keywords:** correlation functions, amplitude and phase fluctuations, eigen frequencies.

**1. ВВЕДЕНИЕ**

Данная работа является одним из этапов создания нового метода обработки временных записей колебательных процессов, начало которой положено в ранних работах [Гульельми и др., 1983; Поляков, Потапов, 2001]. В качестве приложения этот метод уже был успешно использован при исследовании структуры стоячих сейсмических волн в оболочках Земли [Поляков, 2010] и для определения частоты первой гармоники различных одномерных стоячих МГД-волн в плазмосфере и на ее границе [Поляков, 2013; Polyakov, 2014].

Рассмотрим участок почти монохроматических колебаний, которые содержат малые случайные изменения амплитуды и фазы. В этом случае на записи каждое отдельное колебание по своей форме, амплитуде и периоду немного отличается от всех остальных. Согласно работе [Gudzenko, 1961], подобные колебания можно считать периодически нестационарным случайным процессом, для которого справедливо обобщение эргодической теоремы. Это означает, что по всем отдельным колебаниям, которые входят в состав участка записи, мы можем определить одно среднее колебание, которое периодически повторяется от начала до конца участка. Кроме того, при определении авто- и кросскорреля-

ционных функций случайных отклонений амплитуды и фазы от этого среднего колебания мы можем также использовать процедуру усреднения по ансамблю отдельных колебаний. Именно эта процедура представляет собой главную особенность предлагаемого метода обработки.

В работе [Гудзенко, Чертопруд, 1964] такой подход использовался при исследовании автоколебательной модели для циклов солнечной активности, а в работе [Озерный, Чертопруд, 1966] — при изучении квазизвездных объектов.

Эти авторы для определения динамических характеристик процессов использовали зависимости корреляционных функций от текущей фазы среднего колебания. В данной работе, а также в работах [Поляков, 2010; Поляков, 2013; Polyakov, 2014] основное внимание уделяется анализу зависимости этих функций от сдвига фазы.

Другой важной особенностью метода обработки является использование предложенного в работе [Гудзенко, 1962] алгоритма практического определения среднего колебания. Он был положен в основу компьютерной программы, созданной при выполнении исследований [Поляков, 2010; Поляков, 2013; Polyakov, 2014].

Первый этап обработки состоит из узкополосной фильтрации. Для исходного сигнала получаем ком-

плексную функцию быстрого преобразования Фурье (БПФ), действительная и мнимая части которой умножаются на спектральную функцию фильтра  $F(f)$ . После обратного преобразования действительная часть является отфильтрованным сигналом. Зависимость используемой в данном случае функции фильтра от частоты показана на рис. 1. Узкий прямоугольник на частоте  $f_0$  позволяет из любого широкополосного сигнала выделять квазимонохроматические колебания. В то же время наличие частотной полосы  $\Delta f$  при  $a \ll 1$  оставляет вклад остальной части спектра, который создает в этих колебаниях малые флуктуации амплитуды и фазы. Сигнал после такой фильтрации становится пригодным для определения среднего колебания.

На следующем этапе определяется среднее колебание, а также амплитудные  $\alpha$  и фазовые  $\gamma$  отклонения сигнала после фильтрации от этого среднего.

На последнем этапе определяются корреляционные функции полученных флуктуаций:

$$\begin{aligned} G(\Theta, \tau) &= \langle \gamma(\Theta)\gamma(\Theta - \tau) \rangle \langle \alpha(\Theta)\alpha(\Theta - \tau) \rangle - \\ &- \langle \gamma(\Theta)\alpha(\Theta - \tau) \rangle \langle \alpha(\Theta)\gamma(\Theta - \tau) \rangle; \\ G_1(\Theta, \tau) &= \langle \dot{\alpha}(\Theta)\gamma(\Theta - \tau) \rangle \langle \gamma(\Theta)\alpha(\Theta - \tau) \rangle - \\ &- \langle \dot{\alpha}(\Theta)\alpha(\Theta - \tau) \rangle \langle \gamma(\Theta)\gamma(\Theta - \tau) \rangle; \\ G_2(\Theta, \tau) &= \langle \dot{\gamma}(\Theta)\gamma(\Theta - \tau) \rangle \langle \gamma(\Theta)\alpha(\Theta - \tau) \rangle + \\ &+ \langle \dot{\gamma}(\Theta)\alpha(\Theta - \tau) \rangle \langle \gamma(\Theta)\gamma(\Theta - \tau) \rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Theta$  — фаза среднего колебания, точка над символом — производная по  $\Theta$ , угловые скобки — усреднение по ансамблю отдельных колебаний,  $\tau$  — сдвиг фазы.

По результатам работ [Поляков, 2010; Поляков, 2013; Polyakov, 2014] оказалось, что эти функции обладают очень любопытным и полезным для их дальнейшего практического использования свойством. Для колебаний в любой точке резонатора или волновода зависимости КФАФ от  $\tau$  имеют вид последовательности максимумов (пиков), следующих друг за другом через равные интервалы.

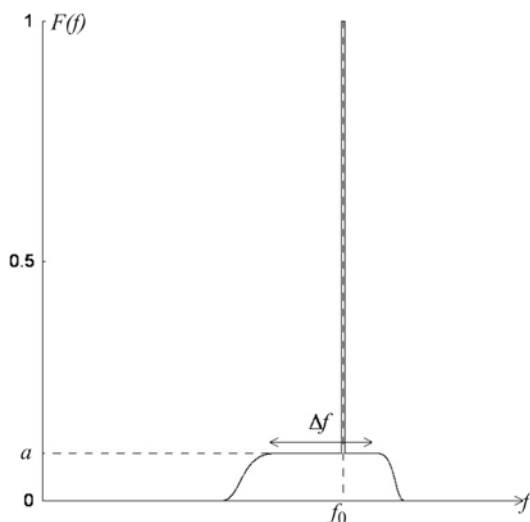


Рис. 1. Спектральная функция фильтра

На рис. 2 дан пример этих зависимостей, полученных после обработки численно смоделированных колебаний одномерного резонатора в точке, расположенной вблизи одного из его «закрепленных» концов. На графиках КФАФ безразмерны, а  $\tau$  с учетом масштабного множителя измеряется в радианах. Заметно, что функция  $G_1$  в отличие от  $G$  и  $G_2$  представляет собой периодическую последовательность не пиков, а резких скачков между отрицательными и положительными значениями.

Особо следует отметить тот факт, что периодическая структура пиков КФАФ характерна не только для смоделированных колебаний, но и, по видимому, для любых колебаний естественного происхождения. Установлено, что аналогичные пики и скачки могут наблюдаться для всех функций одновременно после обработки временных записей сейсмических колебаний [Поляков, 2010] и возмущения геомагнитного поля [Поляков, 2013; Polyakov, 2014].

В работе [Поляков, Потапов, 2001] было показано, что при однородной волновой скорости резонатора положение пика с номером  $k$  на оси  $\tau$  определяется соотношением

$$\tau_k = 2\pi k \frac{\omega}{\omega_1}, \quad (2)$$

где  $\omega$  — несущая частота обрабатываемых колебаний,  $\omega_1$  — частота первой гармоники резонатора. Интервал между двумя соседними пиками

$$\Delta = \tau_{k+1} - \tau_k = 2\pi \frac{\omega}{\omega_1}. \quad (3)$$

Интервал  $\Delta$  — это параметр, который напрямую измеряется по графикам на рис. 2. Частота сигнала  $\omega$  определяется в процессе обработки. Следовательно, соотношение (3) дает возможность косвенного измерения  $\omega_1$ . Мы можем измерять частоту первой гармоники резонатора, имея в качестве исходной информации только запись колебаний в одной его точке.

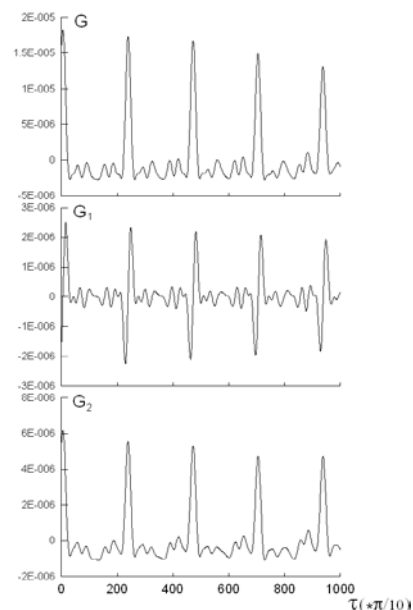


Рис. 2. Пример КФАФ для колебаний в одной из точек одномерного резонатора

Для двумерного прямоугольного резонатора [Поляков, 2013; Polyakov, 2014] характеристики пиков КФАФ определяются теми же соотношениями (2) и (3). Отличие только в том, что частота  $\omega_1$  может принимать не одно, а два разных значения, каждое из которых соответствует одной одномерной стоячей волне в двумерном резонаторе.

В работе [Polyakov, 2014] рассмотрен случай с параболической зависимостью волновой скорости от координаты внутри резонатора. Анализ полученных результатов позволяет предположить, что для любой произвольной неоднородности скорости интервал между соседними пиками КФАФ должен определяться универсальным соотношением

$$\Delta = 2\pi \frac{\omega}{\omega_{i+1} - \omega_i} = 2\pi \frac{\omega}{\Delta\omega_i}, \quad (4)$$

где  $i$  — номер гармоники, начиная с которого собственные частоты  $\omega_i$  становятся эквидистантными. Очевидно, что (3) для однородной скорости является частным случаем соотношения (4).

В данной работе мы попытаемся подтвердить и уточнить это соотношение, сопоставляя пики зависимостей КФАФ от  $\tau$  с собственными частотами в спектре обрабатываемых колебаний.

## 2. ОДНОМЕРНЫЙ РЕЗОНАТОР

Будем использовать простейшие модели, которые в спектре сигнала могут давать собственные частоты.

Рассмотрим модель колебаний  $b(t, x)$ , описываемую одномерным волновым уравнением с функцией источника в правой части с граничными условиями «закрепленных» концов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} + v \frac{\partial b}{\partial t} &= V^2 \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + f(t, x), \\ f(t, x) &= \sin(kx) [\sin(\omega t) + g(t)], \\ b(0) = b(l) &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $V$  — волновая скорость,  $v$  — декремент затухания,  $k$  — волновое число источника,  $l$  — длина резонатора. Временная зависимость источника представляет собой сумму узкополосной по спектру функции  $\sin(\omega t)$  и широкополосной функции случайных значений  $g(t)$ .

Для численного решения использовалась явная разностная схема [Аки, Ричардс, 1983] (метод конечных разностей) и соответствующая последовательность алгоритмов вычислений. Задавая шаг пространственно-временной сетки  $h$  и значения параметров  $l, V, v, \omega, k$ , мы моделируем временные записи сигнала  $b(t)$  в любой точке резонатора.

После фильтрации сигнал разбивается на отдельные временные участки, вмещающие по 75 полных колебаний на частоте  $f_0$ . Для каждого участка компьютерная программа метода КФАФ определяет зависимости функций (1) от  $\tau$ , подобные тем, которые показаны на рис. 2.

По сравнению с работами [Поляков, 2010; Поляков, 2013; Polyakov, 2014] программа была дополнена двумя новыми процедурами. Первая выявляет наличие или отсутствие пиков для каждой из функций (1).

При наличии пиков вторая процедура определяет интервал  $\Delta$  между первым и вторым. Используя эти прямые измерения, можно косвенно определить период разности соседних собственных частот по формуле, которая получается из соотношения (4):

$$T_{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\Delta\omega_i} = \frac{\Delta}{2\pi} T, \quad (6)$$

где  $T$  — период частоты  $\omega$  в источнике модели (5) или период колебаний после фильтрации, поскольку так же, как в работах [Поляков, 2010; Поляков, 2013; Polyakov, 2014], частоту фильтра  $f_0$  мы будем задавать условием  $\omega = 2\pi f_0$ .

Для каждого временного участка колебаний можно получить три значения  $T_{\Delta\omega}$ , если все функции (1) успешно проходят проверку на наличие пиков. По совокупности всех участков может набираться достаточно большое количество косвенных измерений. Это делает возможным построение распределения значений  $T_{\Delta\omega}$ , т. е. функции зависимости от  $T_{\Delta\omega}$  количества измерений, которое приходится на то или иное измеряемое значение. На данном этапе разработки компьютерной программы метода КФАФ в отличие от работ [Поляков, 2010; Polyakov, 2014] именно эти функции следует считать конечным продуктом обработки исходного сигнала.

При длине резонатора  $l=1$  собственные значения для модели (5) определяются номером гармоники  $n$ :  $k_n = n\pi$ . Если в источнике принять  $k=1.5\pi$ , в составе колебаний  $b(x, t)$  будет присутствовать не одна, а множество гармоник.

На рис. 3 на левой вертикальной панели приведены зависимости от частоты модуля комплексной функции преобразования Фурье сигнала  $b(t)$ , полученного в точке, расположенной вблизи одного из «закрепленных концов». Хорошо видно, что кроме несущей частоты  $f_0$  в спектре присутствует ряд собственных частот резонатора. Для некоторых из них указаны номера гармоник. На рис. 3, а для наглядности показана спектральная функция фильтра  $F(f)$ . После фильтрации в спектре остаются только те собственные частоты, которые попадают в полосу  $\Delta f$ . Период частоты горизонтальной оси  $f$  измеряется в количестве временных шагов дискретизации. Несущая частота  $f_0=0.05$  означает, что на 1 период колебаний приходится 20 шагов.

На центральной вертикальной панели показаны зависимости от  $\tau$  корреляционной функции  $G$ , полученные после обработки методом КФАФ одного из временных участков исходного сигнала. Правая вертикальная панель представляет собой гистограммы распределений значений  $T_{\Delta\omega}$ , определяемых по всем участкам. Для вертикальной оси  $N$  — число измерений, которое приходится на шаг гистограммы,  $N_0$  — общее число измерений. На горизонтальной оси период  $T_{\Delta\omega}$  измеряется в секундах, т. е. количество шагов дискретизации умножено на величину шага, для которого принято произвольное значение 0.1.

Таким образом, на рис. 3 представлены результаты обработки одного и того же сигнала при разной ширине частотной полосы фильтра  $\Delta f$ . На рис. 3, а эта ширина больше всех остальных. В спектре наблюдается большое количество пиков собственных частот.

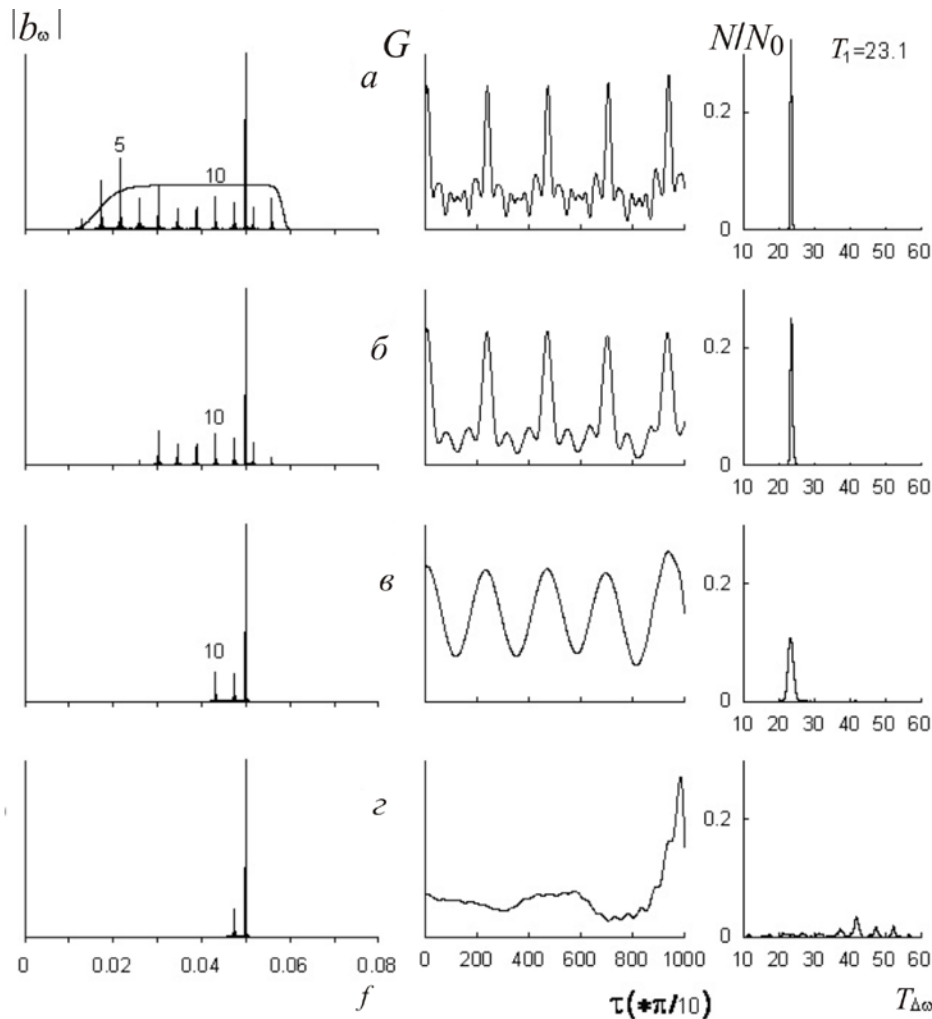


Рис. 3. Зависимость результатов обработки методом КФАФ от количества собственных частот в спектре сигнала после фильтрации

Корреляционная функция  $G(\tau)$  представляет собой периодическую последовательность узких пиков. На распределении  $T_{\Delta\omega}$  мы видим максимум на значении, которое всего на несколько процентов отличается от значения периода первой гармоники (указано на рисунке), полученного для тех же параметров (5), при которых смоделирован сигнал. Это подтверждает тот факт, что при однородной скорости в резонаторе разность соседних собственных частот совпадает с частотой первой гармоники.

На рис. 3, б ширина полосы фильтра существенно меньше и соответственно в спектре меньше пиков собственных частот. При этом ширина пиков функции  $G(\tau)$  заметно увеличивается. На рис. 3, в в спектре наблюдаются только два пика. Ширина пиков функции  $G$  достигает максимального значения. Однако положение пиков на оси  $\tau$  абсолютно не меняется. На распределении периодов максимум становится шире и меньше по высоте. Однако значение  $T_{\Delta\omega}$ , на которое он приходится, остается тем же самым. Наконец, когда в спектре остается только один пик собственной частоты (рис. 3, г), пики функции  $G$  не уширяются, а просто исчезают. При этом исчезает максимум в распределении  $T_{\Delta\omega}$  и все значения становятся равномерно размазанными по горизонтальной оси.

Получается, что, чем меньше собственных частот в спектре, тем шире пики функции  $G$ . Это напоминает известное из оптики свойство дифракционной решетки: чем больше щелей, тем уже интерференционные линии на экране. Очевидно, что между собственными частотами в спектре и пиками корреляционных функций (1) существует такая же связь, как между щелями решетки и интерференционными линиями на экране.

Аналогия с решеткой подтверждается структурой соотношения для положения пика КФАФ с номером  $k$  на оси  $\tau$  (2)–(4):

$$\Delta\omega_i \tau_k = 2\pi k \omega.$$

Известное соотношение для углового положения  $\varphi_k$  интерференционной линии решетки имеет вид

$$d \sin \varphi_k = k \lambda.$$

Эти соотношения подобны по своей структуре. Отличие состоит только в физическом значении параметров. Вместо расстояния между щелями  $d$  в нашем случае имеет место расстояние между соседними собственными частотами  $\Delta\omega_i$ , вместо углового положения интерференционной линии  $\varphi_k$  — положение пика КФАФ  $\tau_k$  на оси  $\tau$ , вместо длины волны  $\lambda$  — частота обрабатываемых колебаний  $\omega$ .

Метод КФАФ и компьютерную программу обработки предполагается использовать в качестве измерительного прибора, так же как используется дифракционная решетка. Результатом измерений является параметр «решетки» собственных частот  $\Delta\omega_i$ .

В большинстве случаев собственные частоты стоячих волн естественного происхождения становятся неэквидистантными вследствие плавной неоднородности волновой скорости вдоль координаты. Это, в частности, характерно для продольных альвеновских волн в магнитосфере [Leonovich, Mazur, 2001]. Такие собственные частоты аналогичны решетке с неэквидистантными щелями, поэтому должны приводить к искажениям пиков КФАФ.

Неэквидистантность собственных частот может быть обусловлена разными причинами. При решении краевой задачи (5) методом конечных разностей собственные функции и собственные частоты определяются с некоторой погрешностью. Чем выше номер гармоники, тем больше эта погрешность. Критическим должен быть номер, при котором между узлами или пучностями стоячей волны укладывается два шага координатной сетки. Очевидно, что в спектре смоделированного сигнала  $b(t)$  с любым шагом сетки  $h$  собственные частоты при высоких номерах гармоник будут отличаться от истинных значений и, следовательно, должны быть неэквидистантными.

На рис. 4, *a–в* показаны результаты обработки сигнала, полученного при различных значениях шага  $h$  (указаны на графиках). Одинаковый масштаб частотной оси в спектре достигается подбором необходимого коэффициента децимации.

На панели *a* шаг составляет 0.01, следовательно, критический номер гармоники должен быть равен 50. В спектре сигнала в частотную полосу фильтра попадают частоты с гораздо меньшими номерами от 4 до 13, значения которых не сильно отличаются от истинных. Среднее относительное отличие двух соседних  $\Delta f_i$ , определяемое соотношением

$$\delta = \frac{2(\Delta f_{i+1}^* - \Delta f_i)}{\Delta f_{i+1} + \Delta f_i}, \quad (7)$$

составляет 0.5 %. Собственные частоты почти эквидистантны, и корреляционная функция  $G$  содержит отчетливые неискаженные пики. На распределении  $T_{\Delta\omega}$  наблюдается узкий максимум, который, так же как на рис. 3, приходится на значение, совпадающее с периодом первой гармоники. На горизонтальной оси стрелкой отмечено значение периода среднего  $\Delta f_i$ , вычисленного непосредственно по графику спектра для тех номеров гармоник, которые попадают в частотную полосу.

На панели *б* при тех же параметрах модели шаг по координате увеличен до  $h=0.025$ . Критический номер гармоники при этом равен 20. Гармоники с 4 по 12 в спектре становятся ближе этому номеру по сравнению с рис. 4, *a*. Характеристика неэквидистантности для этих собственных частот  $\delta=1.5$  % значительно больше, чем в предыдущем случае. В результате этого на графике функции  $G$  появляются флукту-

ации, пики становятся немного искаженными. На распределении ширина максимума увеличивается, т. е. увеличивается статистический разброс значения  $T_{\Delta\omega}$  наибольшей вероятности. Само это значение немного сдвигается вправо в сторону увеличения. Период среднего  $\Delta f_i$ , отмеченный стрелкой, также смещается вправо. Среднее  $\Delta f_i$  в спектре становится немного меньше, чем на рис. 4, *a*, для тех же номеров гармоник за счет того, что существенно уменьшается  $\Delta f_i$  с номерами от 9 до 12.

На панели *в*  $h=0.05$ . Номер гармоники, при котором собственная частота в спектре существенно отличается от истинного значения, равен 10. Эта частота в отличие от предыдущих случаев попадает в полосу фильтра. По графикам спектров заметно, что она сильно смещена в сторону уменьшения по сравнению с рис. 4, *a, б*. Средняя неэквидистантность (7) для номеров гармоник с 4 по 11  $\delta=4.6$  % на порядок больше, чем на рис. 4, *a*. При этом искажение пиков корреляционной функции становится настолько велико, что они просто исчезают. Периоды  $T_{\Delta\omega}$ , которые все-таки удается измерить, на распределении образуют небольшой по высоте и сильно расплывшийся максимум. Однако даже в этом случае отчетливо видно, что смещение максимума по горизонтальной оси сопровождается точно таким же смещением стрелки.

Во всех рассмотренных случаях период  $T_{\Delta\omega}$  максимума вероятности на распределении совпадает с периодом среднего значения  $\Delta f_i$  для тех номеров собственных частот, которые остаются в спектре сигнала после фильтрации. Следовательно, при неэквидистантности, обусловленной любой из возможных причин,  $T_{\Delta\omega}$  в соотношении (6) должен быть именно таким периодом. Эффективность измерения, которая зависит от отчетливости пиков КФАФ, будет удовлетворительной, если для средней неэквидистантности (7) выполняется условие  $\delta < 5$  %. В противном случае измерения просто невозможны.

Как уже было упомянуто ранее, во всех предыдущих исследованиях свойства пиков КФАФ для разных моделей колебаний [Поляков, 2010; Поляков, 2013; Polyakov, 2014] частота фильтра  $2\pi f_0$  всегда устанавливалась равной частоте  $\omega$  в источнике (5). Поэтому период  $T$  в эмпирическом соотношении (6) можно считать одновременно периодом вынужденных колебаний источника и периодом колебаний после фильтрации сигнала. Поскольку физически эти колебания различаются, необходимо выяснить, к какому из них относится  $T$ .

На панели *г* представлены результаты обработки сигнала, смоделированного при тех же параметрах, включая шаг по координате, как на рис. 4, *a*. Отличие только в том, что для функции фильтра  $F(f)$  (см. рис. 1) частота  $f_0$  вместе с полосой пропускания  $\Delta f$  смещена в сторону увеличения. На спектрах рис. 4, *a, г* это смещение хорошо заметно. Вынужденные колебания в обоих случаях имеют пик на частоте источника 0.05. По спектрам видно, что на рис. 4, *г* эта частота в отличие от рис. 4, *a* не совпадает с  $f_0$ .

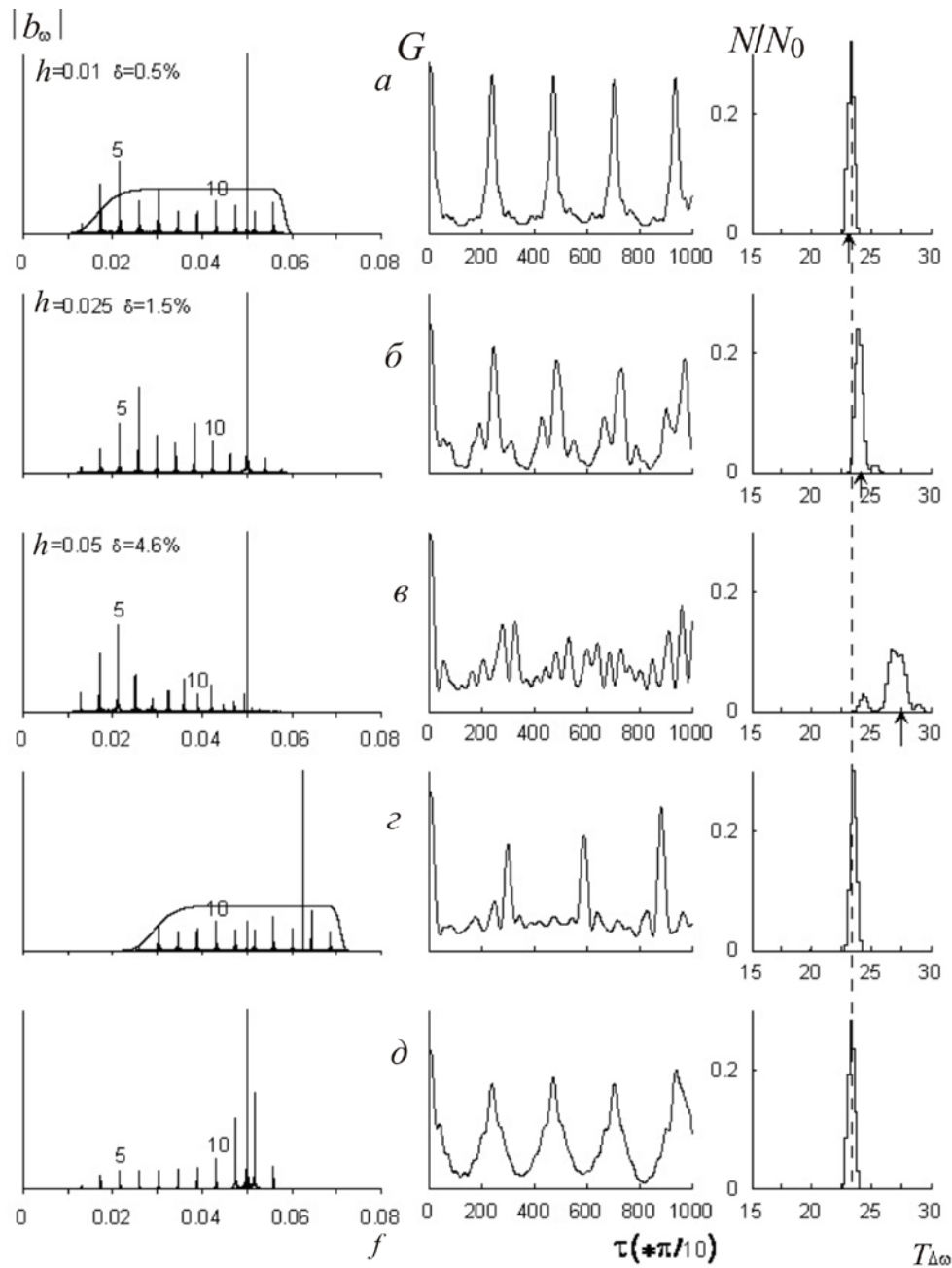


Рис. 4. Особенности результатов метода КФАФ для колебаний в одномерном резонаторе: а-в — влияние неэквидистантности собственных частот; г — изменения, связанные с частотой  $f_0$  спектральной функции фильтра; д — изменения при отсутствии широкополосного вклада  $g(t)$  в источнике колебаний

Сравнивая рис. 4, а, г, можно заметить, что для корреляционной функции  $G(\tau)$  интервалы между соседними пиками  $\Delta$  существенно различаются, а период  $T_{\Delta\omega}$  максимума вероятности на графиках распределений абсолютно не меняется. Такой результат однозначно указывает на то, что в соотношениях (4) и (6)  $\omega$  и  $T$  определяются частотой  $f_0$  и периодом фильтра, а не частотой колебаний в источнике.

В спектре на рис. 4, г пик частоты источника выпадает из состава последовательности собственных частот, как будто в произвольном месте дифракционной решетки появилась дополнительная щель. Однако это никак не повлияло на пики КФАФ и на конечное распределение периодов  $T_{\Delta\omega}$ . Более того, оказалось, что они абсолютно не меняются, если пик

частоты источника полностью удалить из спектра, т. е. в (5) принять  $f(t, x) = \sin(kx)g(t)$ .

На рис. 4, д рассмотрена ситуация, когда в источнике (5), наоборот, отсутствует широкополосная составляющая:  $f(t, x) = \sin(kx)\sin(\omega t)$ . Наличие собственных частот в спектре обусловлено тем обстоятельством, что функция  $\sin(\omega t)$  не является монотонической, поскольку определяется на конечном временном интервале. При этом в корреляционной функции  $G(\tau)$  наблюдается периодическая последовательность пиков — такая же, как на рис. 4, а. Распределения периодов  $T_{\Delta\omega}$  на обоих рисунках одинаковы.

Результаты, показанные на рис. 4, г, д, подтверждают вывод о том, что пики корреляционных функций формируются только «решеткой» соб-

ственных частот. Любые другие частоты в спектре для этих пиков не играют никакой роли. Кроме того, неважно, по какой причине собственные частоты появляются в спектре сигнала.

### 3. ДВУМЕРНЫЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ РЕЗОНАТОР

Рассмотрим особенности результатов обработки методом КФАФ, связанные с двумерностью стоячих волн.

Резонатором будем считать прямоугольник с длинами сторон  $l_x$  и  $l_z$  вдоль координат  $x$  и  $z$ . Двумерное неоднородное волновое уравнение и граничные условия, аналогичные (5), имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 b}{\partial t^2} + v \frac{\partial b}{\partial t} &= V^2 \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + V^2 \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + f(t, x, z), \\ f(t, x, z) &= \sin(k_x x) \sin(k_z z) [\sin(\omega t) + g(t)], \\ b(0, z) &= b(l_x, z) = b(x, 0) = b(x, l_z) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

При  $l_x=0.8$ ,  $l_z=1.0$  собственные значения для стоячих волн вдоль координат  $x$  и  $z$  определяются парой целых чисел  $n$  и  $m$ :

$$k_{xn} = \frac{\pi n}{l_x} = 1.25\pi n; \quad k_{zm} = \frac{\pi m}{l_z} = \pi m. \quad (9)$$

Собственные частоты двумерной стоячей волны

$$\omega_{nm} = \sqrt{(Vk_{x1})^2 n^2 + (Vk_{z1})^2 m^2} = \sqrt{\omega_{x1}^2 n^2 + \omega_{z1}^2 m^2}. \quad (10)$$

Если в функции источника  $f(t, x, z)$  параметры  $k_x$  и  $k_z$  задавать соотношениями (9) при целом  $m$  и нецелом  $n$ , собственные частоты (10), наблюдаемые в спектре колебаний, будут отличаться только разными номерами  $n$ .

На рис. 5 представлены результаты обработки колебаний, численно смоделированных в точке, расположенной вблизи одной из границ резонатора. Для всех случаев в источнике (8)  $k_x$  задано нецелым,  $n=1.2$ ,  $k_x=1.5\pi$ . Указанные на спектрах значения  $k_z$  задаются разными целыми  $m$ :  $k_z=m\pi$ . Цифрами на графиках отмечены номера  $n$  для некоторых пиков собственных частот.

На рис. 5, а заданное значение  $m=1$ . В спектре после фильтрации имеются пики собственных частот со значениями  $n$  от 4 до 12, для которых можно считать  $n^2 \gg m^2$ . Собственные частоты (10) для этих номеров становятся почти идеально эквидистантными:  $\omega_{nm}=\omega_{x1}n$ . Среднее относительное отличие двух соседних частот  $\Delta f_i$  (7) на графике спектра составляет всего несколько десятых процента. Корреляционная функция  $G(\tau)$ , так же как во всех случаях одномерного резонатора с эквидистантными частотами, представляет собой периодическую последовательность отчетливых неискаженных пиков. На распределении  $T_{\Delta\omega}$  наблюдается узкий максимум на периоде, который почти идеально совпадает с периодом  $T_{x1}$  первой гармоники стоячей волны вдоль координаты  $x$ . Стрелкой указан период среднего  $\Delta f_i$ , определяемый непосредственно по собственным частотам в спектре.

На рис. 5, б номер волновое число  $k_x=1.5\pi$  в источнике (8) остается тем же самым, а  $m=4$ . Заметно,

что в спектре собственные частоты с разными номерами  $n$  сдвинуты вправо по сравнению с аналогичными частотами на рис. 5, а. При этом, согласно (10), чем больше  $n$ , тем меньше сдвиг. В результате в частотной полосе на рис. 5, б появляются дополнительные собственные частоты с номерами  $n$  от 1 до 3. Согласно (10), при  $m=4$  такие частоты должны быть сильно неэквидистантными. Средняя по всем частотам степень неэквидистантности (7) существенно увеличивается ( $\delta=4\%$ ), а средняя разность соседних частот  $\Delta f_i$  уменьшается. При этом пики на корреляционной функции  $G(\tau)$  заметно искажаются по сравнению с рис. 5, а. На распределении периодов  $T_{\Delta\omega}$  максимум становится шире и смещается вправо. Период среднего  $\Delta f_i$ , отмеченный стрелкой, также увеличивается.

На рис. 5, в рассматривается случай с  $m=5$ . Сильно неэквидистантными становятся частоты с номерами  $n$  от 1 до 5. Степень неэквидистантности по всем частотам в спектре возрастает до  $\delta=6\%$ . В результате пики функции  $G(\tau)$  искажены настолько, что их уже почти невозможно различить. На распределении максимум расплывается еще больше и появляются помехи, обусловленные сильным искажением формы пиков.

Если при обработке того же самого сигнала ширину полосы фильтра уменьшить со стороны низких частот, как это сделано на рис. 5, г, в спектре будут удалены самые неэквидистантные собственные частоты и  $\delta=2\%$ . При этом видно, что пики функции  $G(\tau)$  сразу же восстанавливают свою отчетливую периодическую структуру. На распределении максимум вместе со стрелкой смещается влево. Его период  $T_{\Delta\omega}$  отыгрывает изменение, связанное с неэквидистантностью частот на рис. 5 б, в, и становится ближе периоду максимума на рис. 5, а и периоду первой гармоники  $T_{x1}$ .

Приведенные особенности собственных частот двумерных стоячих волн, оказываются точно такими же, как в случае одномерных стоячих волн (см. рис. 4, а, б). Для них справедлива такая же аналогия. Двумерные собственные частоты (10) при условии  $n^2 \gg m^2$  могут образовывать в спектре сигнала эквидистантную «решетку»  $\omega_{nm}=\omega_{x1}n$ , которая формирует отчетливые пики функций КФАФ.

На рис. 6 рассмотрены случаи с различной структурой собственных частот в спектре колебаний двумерного резонатора. Для рис. 6, а параметры  $k_x$  и  $k_z$  функции источника (8) заданы соотношениями (9) с целым  $n=1$  и нецелым  $m=1.2$ . Наблюдаемые в спектре собственные частоты (10) имеют один и тот же номер  $n=1$  и отличаются только номерами  $m$ . На графике эти номера указаны для некоторых частот. На рис. 6, б, наоборот,  $n=1.2$ , а  $m=1$ . Собственные частоты отличаются номером  $n$ .

В обоих случаях в полосу пропускания фильтра попадают частоты с высокими номерами  $n$  или  $m$ , которые, согласно (10) и тому, что видно на спектрах, становятся эквидистантными. В результате на графиках корреляционной функции  $G(\tau)$  формируются отчетливые последовательности неискаженных пиков.



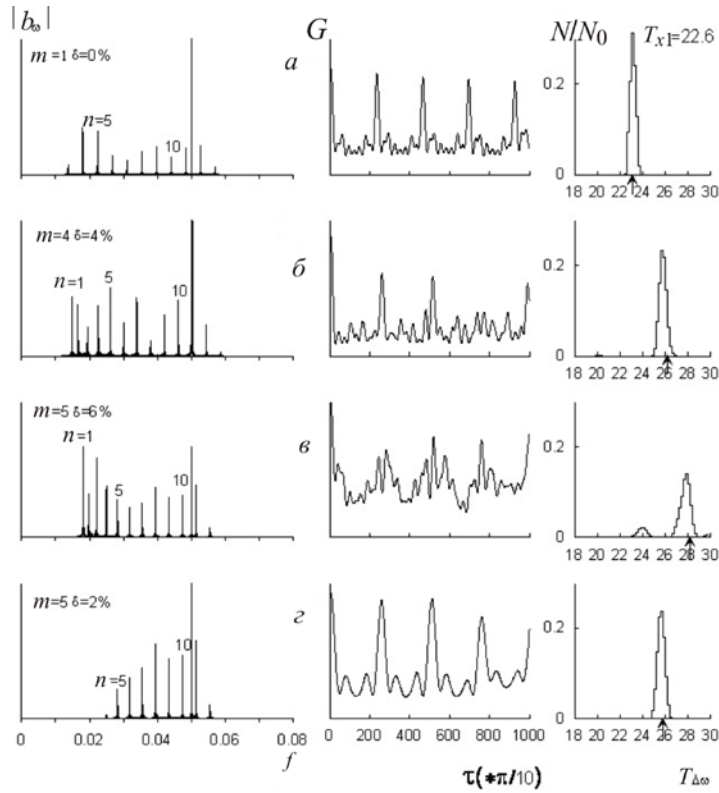


Рис. 5. Влияние неэквидистантности собственных частот двумерного однородного резонатора

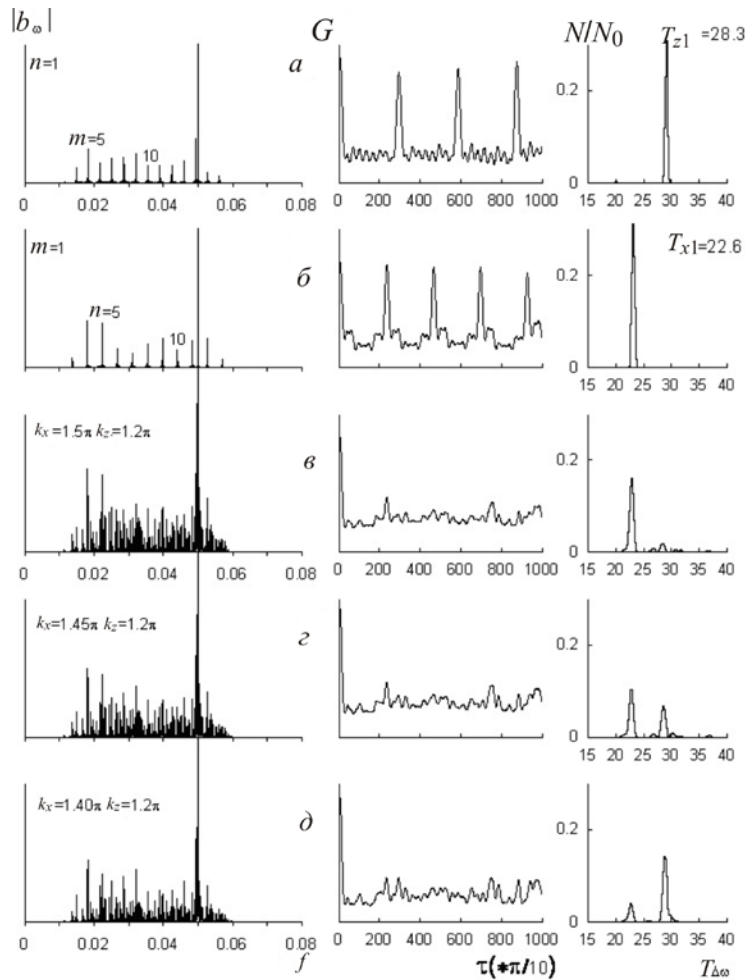


Рис. 6. Особенности результатов метода КФАФ для колебаний в двумерном резонаторе: а, б — влияние присутствия среди собственных частот  $\omega_{nm}$  двух разных эквидистантных последовательностей:  $\omega_{nm}=\omega_{x1}n$  и  $\omega_{nm}=\omega_{z1}m$ ; в-д — влияние всех собственных частот с разными номерами  $n$  и  $m$



Поскольку размеры резонатора вдоль координатных осей заданы неодинаковыми значениями  $l_x=0.8$ ,  $l_z=1.0$ , разности соседних собственных частот  $\Delta f_i$  в спектрах на рис. 6, *a*, *б* отличаются друг от друга. Согласно (10), для рис. 6, *a* имеем  $\omega_{nm}=\omega_{z1}m$ . Эта разность должна совпадать с частотой  $f_{z1}$  первой гармоники одномерной стоячей волны вдоль координаты  $z$ . На рис. 6, *б*  $\omega_{nm}=\omega_{x1}n$ , разность  $\Delta f_i$  совпадает с частотой  $f_{x1}$  вдоль координаты  $x$ . Обработка колебаний методом КФАФ приводит к тому же результату. На распределениях периодов в обоих случаях образуются узкие максимумы, для которых значения  $T_{\Delta\omega}$  почти идеально совпадают с приведенными на графиках значениями периодов  $T_{z1}$  или  $T_{x1}$ .

На рис. 6, *в-д* одновременно оба параметра  $k_x$  и  $k_z$  в источнике заданы в (9) нецелыми  $n$  и  $m$ . При этом в составе колебаний должны присутствовать собственные частоты (10), определяемые любой произвольной комбинацией двух целых чисел. На графиках спектров мы видим, что количество пиков собственных частот на рис. 6, *в-д* во много раз больше, чем на рис. 6, *a*, *б*. В полосе фильтра этих пиков становится настолько много и расположены они на частотной оси так плотно, что для них невозможно определить номера  $n$  и  $m$ . В то же время среди них должны находиться те же эквидистантные частоты, что и на рис. 6, *a*, *б*. Однако по графикам заметно, что пики этих частот невозможно отличить от всех остальных.

Графики корреляционных функций  $G(\tau)$  на рис. 6, *в-д* не содержат таких отчетливых периодических пиков, как на рис. 6 *a*, *б*. Однако на каждом из них можно все-таки заметить первый и небольшой по высоте второй пики. При обработке временных участков колебаний этого оказывается достаточно для измерения интервала  $\Delta$  между соседними пиками и, следовательно, для косвенного измерения периода (6).

На всех без исключения графиках распределений периодов  $T_{\Delta\omega}$  максимумы вероятности на рис. 6, *в-д*, приходятся на те же самые значения, что и на рис. 6, *a*, *б*. Максимумов с каким-либо другим значением  $T_{\Delta\omega}$  при разной структуре собственных частот в спектре не было обнаружено ни разу. Чаше всего на графиках распределений наблюдается один максимум на периоде  $T_{\Delta\omega}$ , совпадающем с  $T_{x1}$  или с  $T_{z1}$ . Однако иногда эти два максимума, как на рис. 6, *з*, появляются одновременно.

Совпадение периодов максимумов распределений на рис. 6 позволяет однозначно сделать важный вывод для всего метода КФАФ. В случае со сложной структурой собственных частот в спектре колебаний функции КФАФ и распределения периодов  $T_{\Delta\omega}$  реагируют только на те из них, которые являются эквидистантными.

Среди всех частот двумерного резонатора (10) эквидистантными могут быть только частоты  $\omega_{nm}=\omega_{z1}m$  (при  $n \ll m$ ) или  $\omega_{nm}=\omega_{x1}n$  (при  $n \gg m$ ). Каждый такой ряд соответствует частотам одной одномерной стоячей волны вдоль координат  $z$  или  $x$ . Максимумы вероятности в распределении отслеживают значения  $T_{\Delta\omega}$  для обеих волн. Получается, что в отличие от одномерного резонатора распределение

периодов для двумерного резонатора содержит не один, а два максимума. Для трехмерного резонатора таких максимумов должно быть три.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Установлено, что пики корреляционных функций (1) связаны с пиками собственных частот в спектре сигнала точно так же, как интерференционные полосы на экране связаны с последовательностью щелей дифракционной решетки. Чем больше разность соседних собственных частот  $\Delta f_i$  (период решетки), тем меньше интервал  $\Delta$  между двумя соседними пиками в корреляционных функциях и наоборот: чем меньше  $\Delta f_i$ , тем больше  $\Delta$ . При уменьшении числа собственных частот пики КФАФ расплываются. Если в спектре остается только один пик собственной частоты (одна щель), пики КФАФ (полосы на экране) полностью исчезают.

2. Эмпирическое соотношение между интервалами  $\Delta$  и  $\Delta f_i$  имеет вид

$$\Delta = 2\pi \frac{f_0}{\Delta f_i}, \quad (11)$$

где  $f_0$  — несущая частота колебаний после фильтрации — один из параметров спектральной функции фильтра на рис. 1, который можно менять по своему усмотрению.

3. Если собственные частоты неэквидистантны и разность  $\Delta f_i$  неодинакова при разных номерах гармоник, в знаменателе правой части (11)  $\Delta f_i$  является средним значением для всех собственных частот, которые остаются в спектре после фильтрации. При сильной неэквидистантности, когда среднее относительное отличие (7) для этих частот  $\delta > 5\%$ , пики КФАФ становятся настолько искаженными, что интервал  $\Delta$  просто невозможно измерить.

4. Показано, что для двумерной стоячей волны справедлива указанная выше аналогия. Собственные частоты (10) образуют две разные эквидистантные «решетки»:  $\omega_{nm}=\omega_{z1}m$  (при  $n \ll m$ ) и  $\omega_{nm}=\omega_{x1}n$  (при  $n \gg m$ ). Функции КФАФ и распределения периодов  $T_{\Delta\omega}$  отслеживают каждую из них. В первом случае наиболее вероятное значение  $\Delta f_i$  в распределении совпадает с частотой первой гармоники  $f_{z1}$  одномерной волны вдоль координаты  $z$ . Во втором случае  $\Delta f_i$  совпадает с частотой волны  $f_{x1}$  вдоль координаты  $x$ .

В отличие от одномерной стоячей волны в двумерном случае распределение периодов, получаемое после обработки исходного сигнала, содержит не один, а два максимума. Каждый максимум обусловлен одномерной стоячей волной — одной из двух возможных. Очевидно, что для трехмерной стоячей волны таких максимумов будет три.

5. Компьютерная программа метода КФАФ дополнена двумя новыми процедурами. Вся исходная запись возмущения поля разбивается на отдельные временные участки. Для каждого участка определяются корреляционные функции (1) и непосредственно по ним измеряется интервал  $\Delta$ . По формуле (11) косвенно измеряется разность частот  $\Delta f_i$  или ее период  $T_{\Delta\omega}$ . В результате получается множество изме-

рений этих периодов. Конечным продуктом обработки становится график распределения значений  $T_{\Delta\omega}$  по вероятности их появления в массиве измерений.

Установлено, что каждый максимум в распределении обусловлен одной из эквидистантных последовательностей собственных частот в спектре сигнала. Один максимум соответствует одной одномерной стоячей волне из всех возможных волн в резонаторе или волноводе. Для каждой из них мы можем экспериментально измерить период  $T_{\Delta\omega}$ . Результаты обработки численно смоделированных колебаний показывают, что созданная программа работает эффективно даже тогда, когда собственные частоты становятся слабо неэквидистантными или когда пики этих частот в спектре невозможно отличить от множества других спектральных пиков.

6. Предлагаемый в данной работе метод позволяет обнаруживать все одномерные стоячие волны, которые могут возникать в исследуемом объекте. Количество таких волн и период  $T_{\Delta\omega}$  каждой из них зависит от размеров, формы и структуры объекта. В будущем этот метод мог бы стать средством зондирования и выявления внутренней структуры удаленных или недоступных объектов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т. 1, Т. 2. М.: Мир, 1983. 880 с.
- Гудзенко Л.И. Обобщение эргодической теоремы на нестационарные случайные процессы // Изв. вузов. Радиофизика. 1961. Т. 4, № 2. С. 267–274.
- Гудзенко Л.И. Статистический метод определения характеристик нерегулируемой автоколебательной системы // Изв. вузов. Радиофизика. 1962. Т. 5, № 3. С. 572–586.
- Гудзенко Л.И., Чертопруд В.Е. Некоторые динамические свойства циклической активности Солнца // *Астрономический журнал*. 1964. Т. 41, № 4. С. 697–706.
- Гульельми А.В., Клайн Б.И., Поляков А.Р. Динамические параметры автоколебательной модели геомагнитных пульсаций // *Геомагнетизм и аэронаука*. 1983. Т. 23, № 4. С. 630–636.
- Озерный Л.М., Чертопруд В.Е. Статистические свойства оптической переменности квазизвездного радиосточника 3С 273 // *Астрономический журнал*. 1966. Т. 43, № 1. С. 20–33.
- Поляков А.Р. Новый метод обработки записей сейсмических колебаний, основанный на анализе корреляционных функций флуктуаций амплитуды и фазы // *Солнечно-земная физика*. 2010. Вып. 15. С. 44–51.
- Поляков А.Р. Структура одномерных стоячих МГД-волн в дневной плазмосфере и на ее границе // *Солнечно-земная физика*. 2013. Вып. 23. С. 91–99.
- Поляков А.Р., Потапов А.С. Экспериментальные исследования моделей регулярных колебательных процессов в магнитосфере // *Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца*. 2001. Вып. 112. С. 195–226.

Leonovich A.S., Mazur V.A. On the spectrum of magnetosonic eigenoscillations of an axisymmetric magnetosphere // *J. Geophys. Res.* 2001. V. 106 P. 3919–3928.

Polyakov A.R. The structure of one-dimensional standing MHD waves in, and at the boundary of the dayside plasmasphere // *J. Atm. and Solar-Terr. Phys.* 2014. V. 119, P. 193–202. DOI: 10.1016/j.jastp.2014.08.007.

## REFERENCES

- Aki K., Richards P.G. *Quantitative Seismology*. Vol. I and II. W.H. Freeman, San Francisco, 1980. 880 p.
- Gudzenko L.I. The generalization of an ergodic system to nonstationary random processes. *Izv. Vyzov. Radiofizika* [Radiophys. Quant. Electr.]. 1961, vol. 4, no. 2, pp. 267–274 (in Russian).
- Gudzenko L.I. A statistical method for determining the characteristics of a noncontrolled self-oscillatory system. *Izv. vyzov. Radiofizika* [Radiophys. Quant. Electr.]. 1962, vol. 5, no. 32, pp. 572–586 (in Russian).
- Gudzenko L.I., Chertoprud V.E. Some dynamic properties of cyclic activity of the Sun. *Astronomicheskii Zhurnal* [Astronomical J.] 1964, vol. 41, no. 4, pp. 697–706 (in Russian).
- Guglielmi A.V., Klain B.I., Polyakov A.R. Dynamic parameters of the self-oscillation model of geomagnetic pulsations. *Geomagn. Aeron.* 1983, vol. 23, no. 4, pp. 630–636 (in Russian).
- Leonovich A.S., Mazur V.A. On the spectrum of magnetosonic eigenoscillations of an axisymmetric magnetosphere. *J. Geophys. Res.* 2001, vol. 106, pp. 3919–3928.
- Ozerny L.M., Chertoprud V.E. Statistical properties of the optical variability of the quasistellar radio source 3C 273. *Astronomicheskii Zhurnal* [Astronomical J.] 1966, vol. 43, no. 1, pp. 20–33 (in Russian). *Soviet Astronomy*. 1966, vol. 10, no. 1, pp. 15–25 (in English).
- Polyakov A.R. New method of processing records of seismic oscillations based on analysis of correlation functions of amplitude and phase fluctuations. *Solnechno-Zemnaya Fizika* [Solar-Terrestrial Physics]. 2010, vol. 15, pp. 44–51 (in Russian).
- Polyakov A.R. Structure of one-dimensional standing MHD waves in the dayside plasmasphere and at its boundary. *Solnechno-Zemnaya Fizika* [Solar-Terrestrial Physics]. 2013, vol. 23, pp. 91–99 (in Russian).
- Polyakov A.R., Potapov A.S. Experimental studies of models of regular oscillatory processes in the magnetosphere // *Issledovaniya po Geomagnetizmu, Aeronomii i Fizike Solntsa*. [Research on Geomagnetism, Aeronomy and Solar Physics]. 2001, vol. 112, pp. 195–226 (in Russian).
- Polyakov A.R., The structure of one-dimensional standing MHD waves in and at the boundary of the dayside plasmasphere. *J. Atm. and Solar-Terr. Phys.* 2014, vol. 119, pp. 193–202. DOI: 10.1016/j.jastp.2014.08.007.