Расширенное исследование аттракторов Мартина (хопалонгов)

Extended study of Martin’s attractors (hopalong)

Бойков А.А.
Канд. техн. наук, доцент кафедры инженерной графики, ФГБОУ ВО «МИРЭА - Российский технологический университет», г. Москва
e-mail: albophx@mail.ru

Boykov A.A.
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Engineering Graphics, MIREA - Russian Technological University, Moscow
e-mail: albophx@mail.ru

Лыткин А.О.
Студент, ФГБОУ ВО «МИРЭА - Российский технологический университет», г. Москва

Lytkin A.O.
Student, MIREA - Russian Technological University, Moscow

Аннотация
В статье представлены результаты студенческой научной работы, выполненной в рамках практико-ориентированного подхода, используемого на кафедре инженерной графики РТУ МИРЭА. Исследуются свойства пространства параметров генеративной процедуры, которая называется классическим аттрактором Мартина (хопалонгом) и может представлять интерес для математиков, а также художников и дизайнеров, использующих приемы генеративного искусства.
Ключевые слова: алгебраические фракталы, аттракторы Мартина, хопалонги, генеративное искусство, графический дизайн.

Abstract
The article presents the results of a student research work performed within the practice-oriented approach used at the Department of Engineering Graphics of MIREA - Russian Technological University. The properties of the parameter space of the generative procedure known as the classical Martin's attractor (hopalong) are investigated. The results may be of interest to mathematicians, as well as artists and designers using generative art techniques.
Keywords: algebraic fractals, Martin's attractors, hopalongs, generative art, graphic design.

Введение

В работе [1] рассматривается генеративная процедура, получившая название классического аттрактора Мартина (хопалонга). Впервые хопалонги были представлены в 1986 г. [2], а подробное их описание дано Б. Мартином в 1989 [3]. В [1] отмечается ряд перспективных задач, связанных с изучением хопалонгов для возможности их практического применения в задачах дизайна, в частности, представляет практический интерес исследование свойств пространства параметров хопалонга.

В настоящем исследовании делается попытка исследования свойств пространства параметров хопалонга на основе серий миниатюр, как это производилось ранее для классических алгебраических фракталов [4, 5].

1. Теория

Аттракторы Мартина относят к орбитальным фракталам [6]. Они представляют собой изображения простой двумерной итерационной системы. Название «Hopalong» происходит от того, что изображение строится из точек, «прыгающих» по эллиптическому пути в результате многократного применения математического правила для получения бесконечной последовательности двумерных (x,y) точек. Классический алгоритм начинает генерировать последовательность в начале координат плоскости, т.е. в точке $(x_0,y_0)=(0,0)$. Далее применяется математическое правило к последней полученной точке и шаг за шагом генерируются последующие.

Пусть последняя созданная точка имеет координаты (x_n,y_n). Говорим, что она была создана после n-итерации. Чтобы получить следующую точку, т.е. (x_{n+1},y_{n+1}), используем формулы:

$$x_{n+1} = y_n - sign(x_n) * \sqrt{|b * x_n - c|}$$
$$y_{n=1} = a - x_n$$

где $sign(x_n)$ возвращает знак (-1, 1 или 0). Значения a, b и c являются фиксированными для всей последовательности. Форма фрактала зависит от значений этих параметров.

Чтобы получить представление о том, как выбор значений a, b и c, влияет на форму фрактала, будем менять значения параметров с некоторым шагом и в некотором диапазоне, и объединим полученные фрактальные изображения в виде таблицы миниатюр.

2. Таблицы миниатюр

На рис. 1.2–11 показаны миниатюры хопалонгов, полученные для значений параметров $-5 \le a \le +5$, $-1 \le b \le +1$, $-1 \le c \le +1$. Во всех случаях принято n=20000, изображение строилось в границах $-11 \le x \le 11$, $-11 \le y \le 11$.

3. Обсуждение результатов

3.1. Таблицы миниатюр на рис. 1.2–11 показывают, что фрактальные изображения центрально симметричны в пределах одного «слоя» с заданным значением c=const относительно центрального фрактала, полученного при a=b=0 – т.е. изображения для $a=a_0$, $b=b_0$ и $a=–a_0$, $b=–b_0$ одинаковы с точностью до центральной симметричности.

3.2. Также легко заметить, что симметричны миниатюры для «слоев» с заданным значением b=const относительно центрального фрактала a=b=c=0, то есть изображения для $a=a_0$, $c=c_0$ и $a=–a_0$, $c=–c_0$ одинаковы с точностью до центральной симметричности (фрагмент таблиц для c=±1 приведен на рис. 1.1).

3.3. Из 3.1 и 3.2 вытекает также центральная симметричность изображений фракталов в пределах слоев для a=const (изображения для $b=b_0$, $c=c_0$ и $b=b_0$, $c=–c_0$ одинаковы).

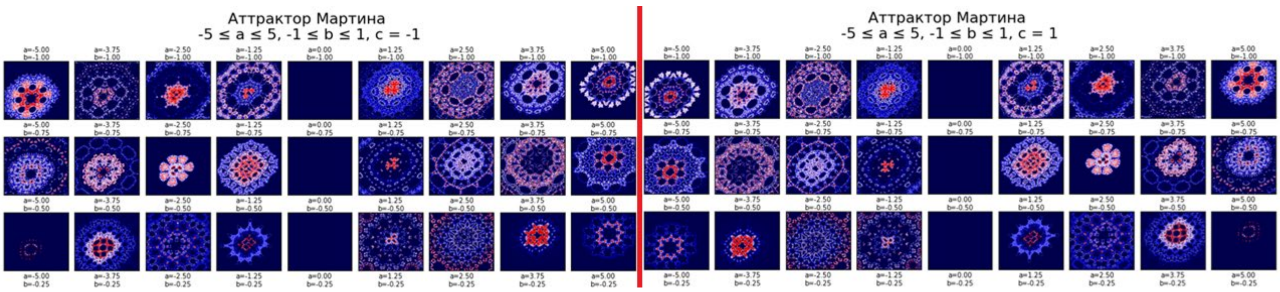

Рис. 1.1. Сравнение миниатюр для «слоев» с c=±1

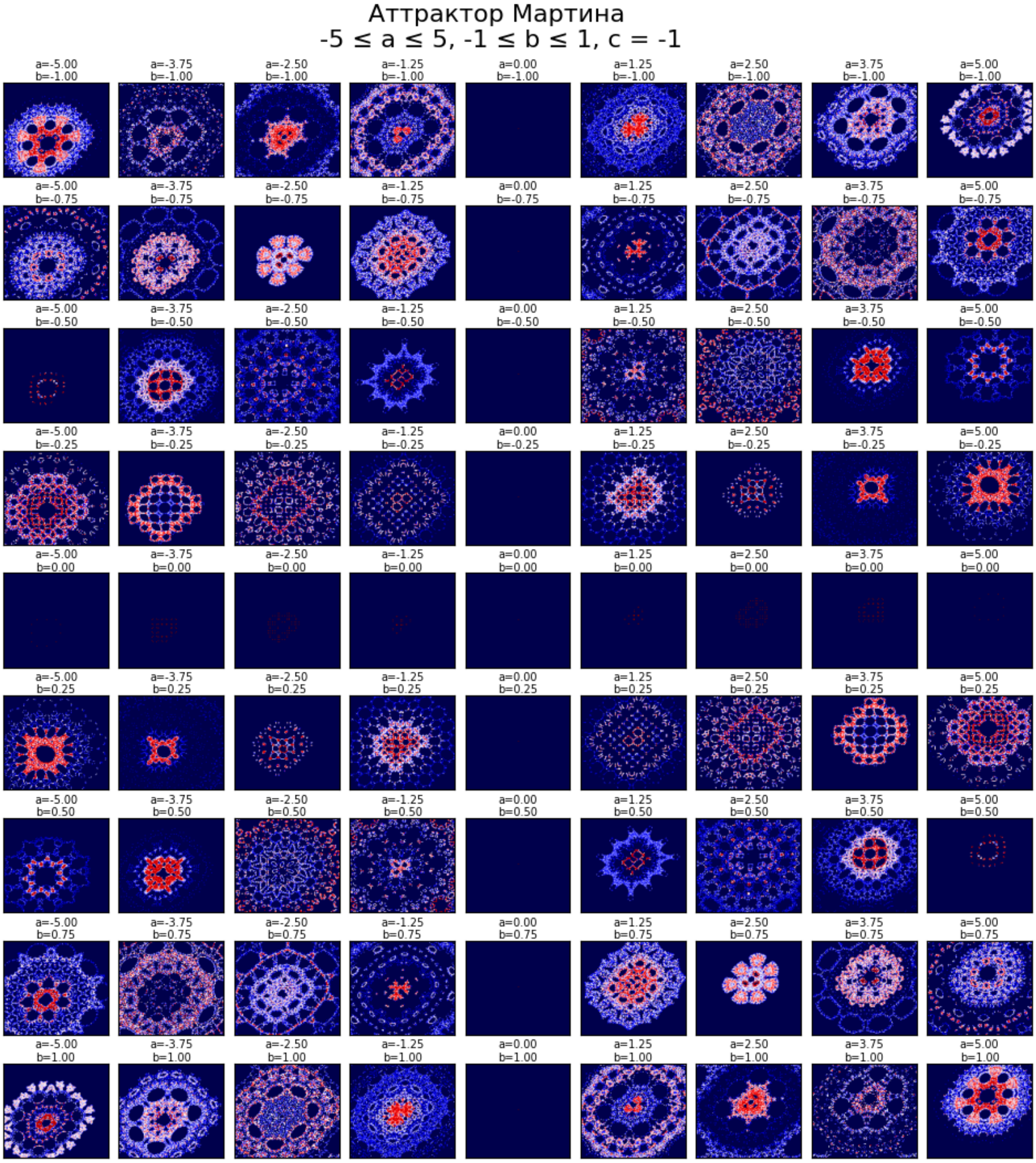

Рис. 1.2. Аттракторы Мартина для $-5 \leq a \leq +5$, $-1 \leq b \leq +1$, $c = -1$

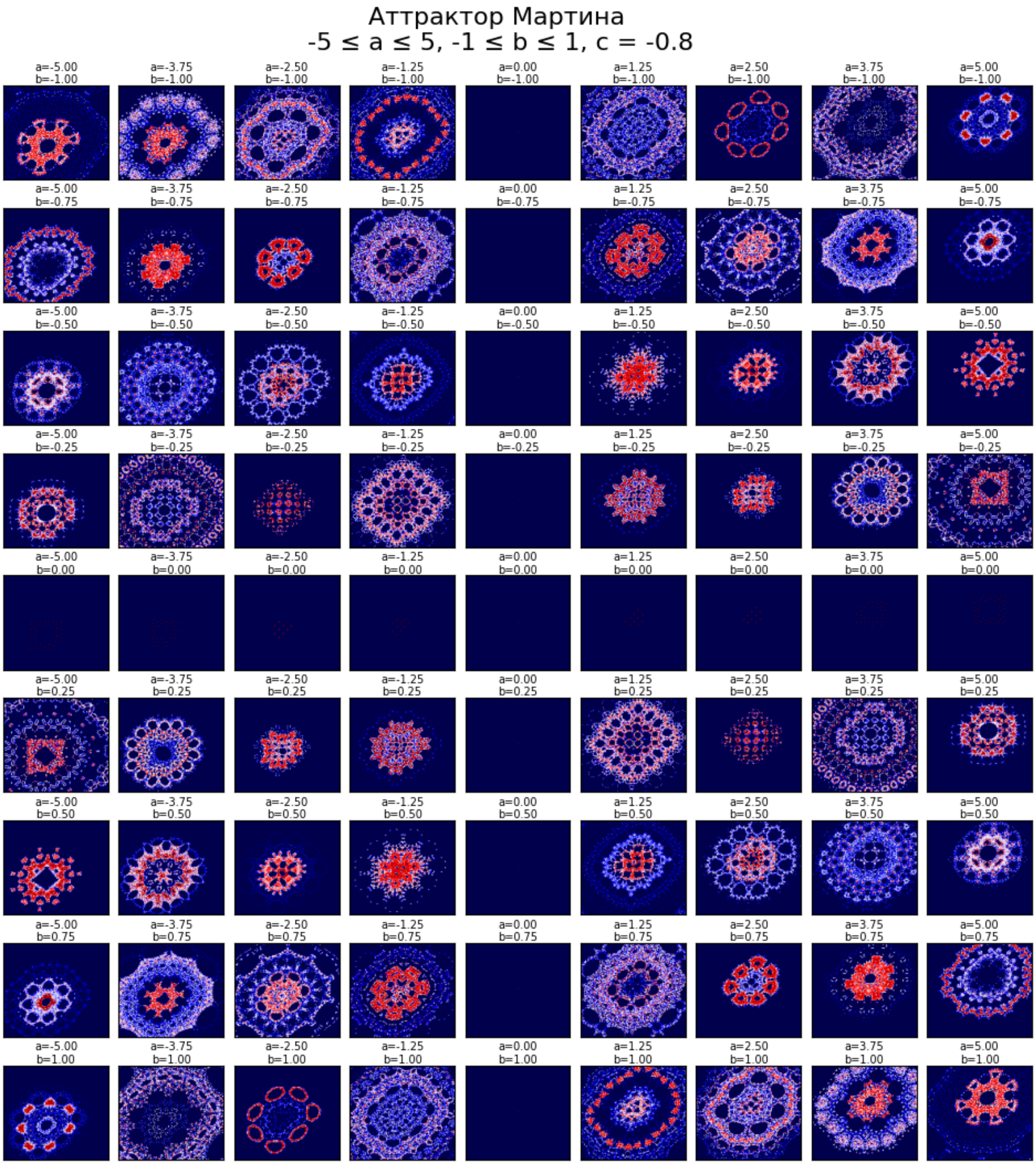

Рис. 2. Аттракторы Мартина для $-5 \leq a \leq +5$, $-1 \leq b \leq +1$, $c=-0{,}8$

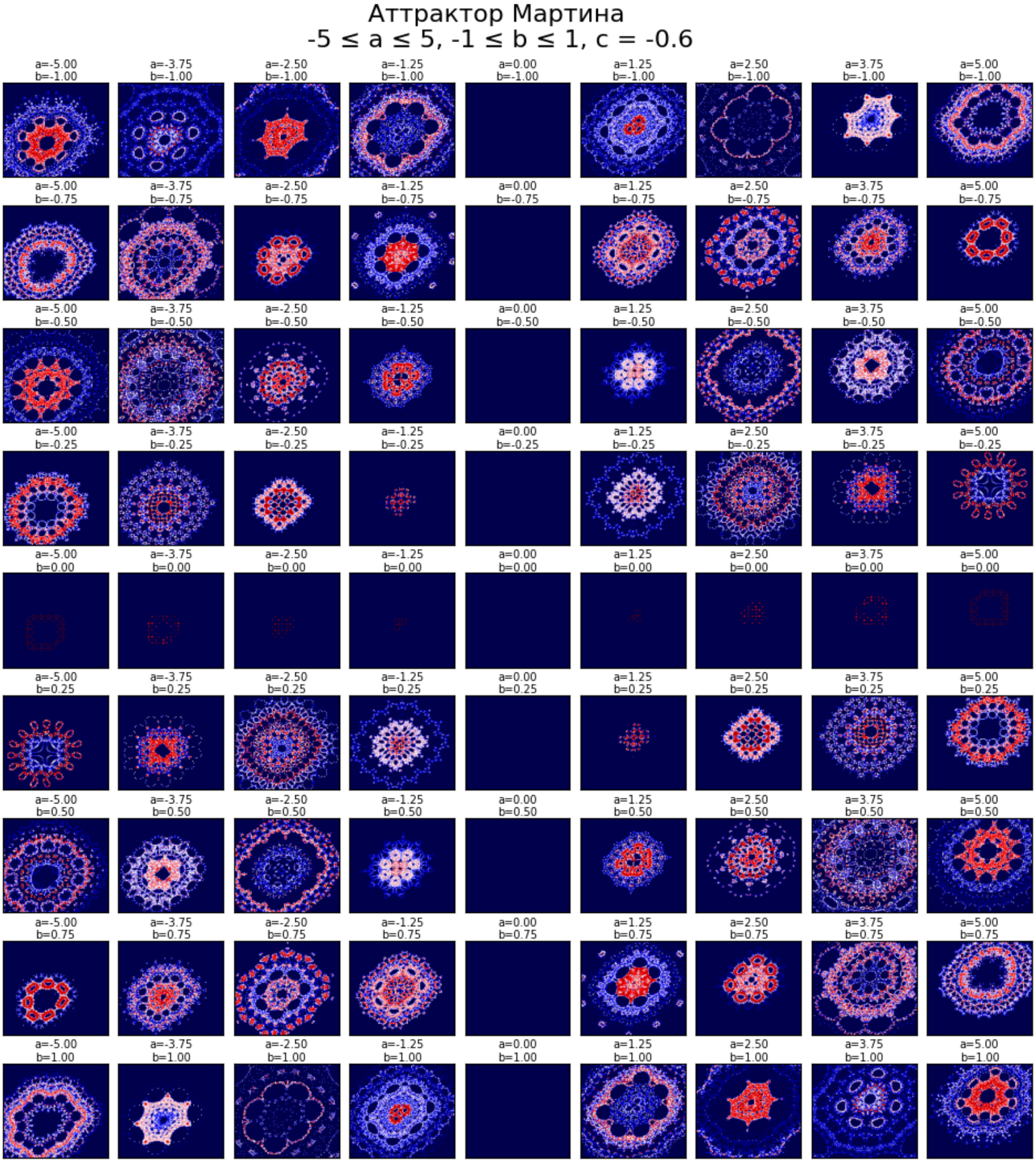

Рис. 3. Аттракторы Мартина для –5≤a≤+5, –1≤b≤+1, c=–0,6

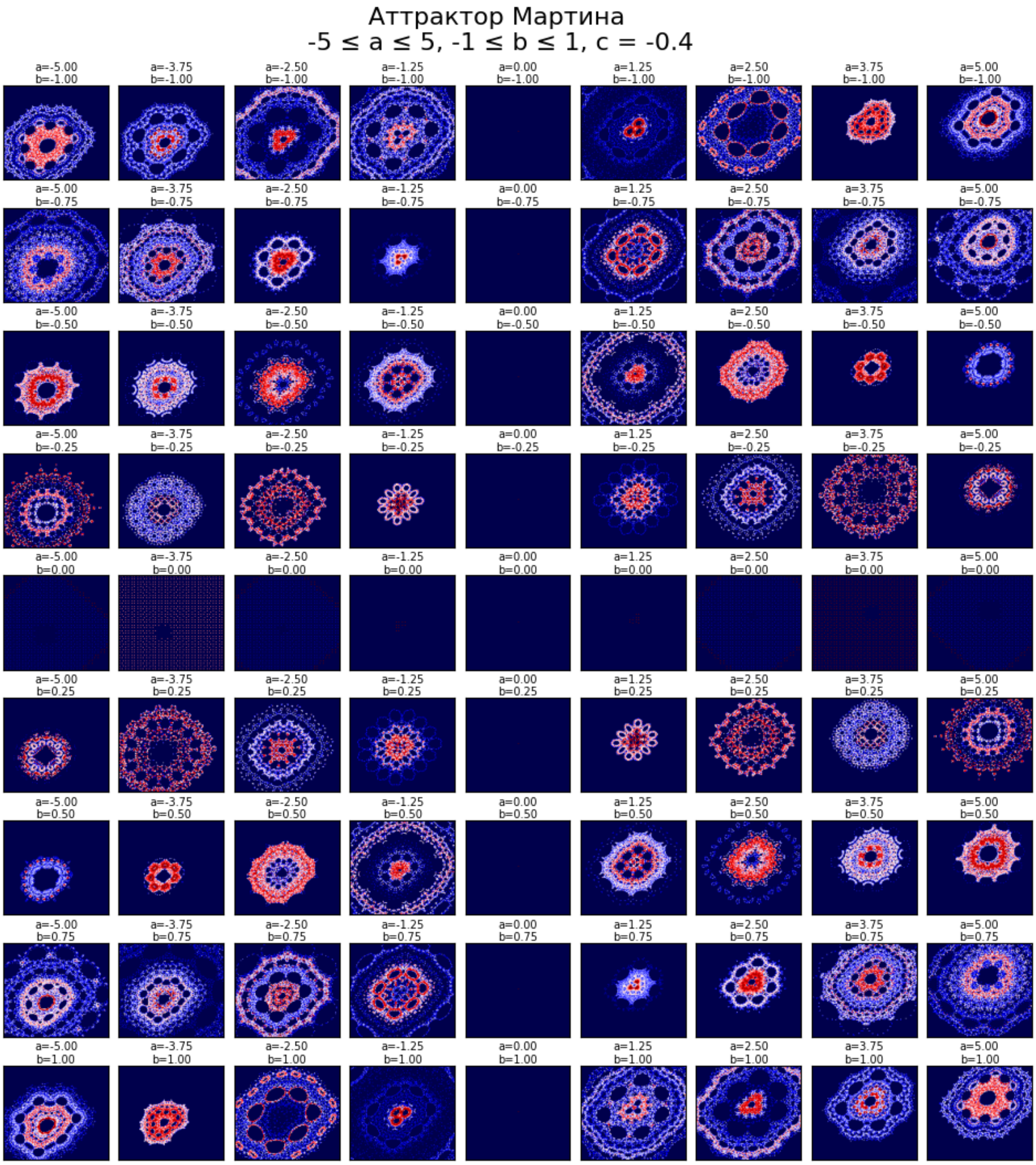

Рис. 4. Аттракторы Мартина для $-5 \le a \le +5$, $-1 \le b \le +1$, $c = -0{,}4$

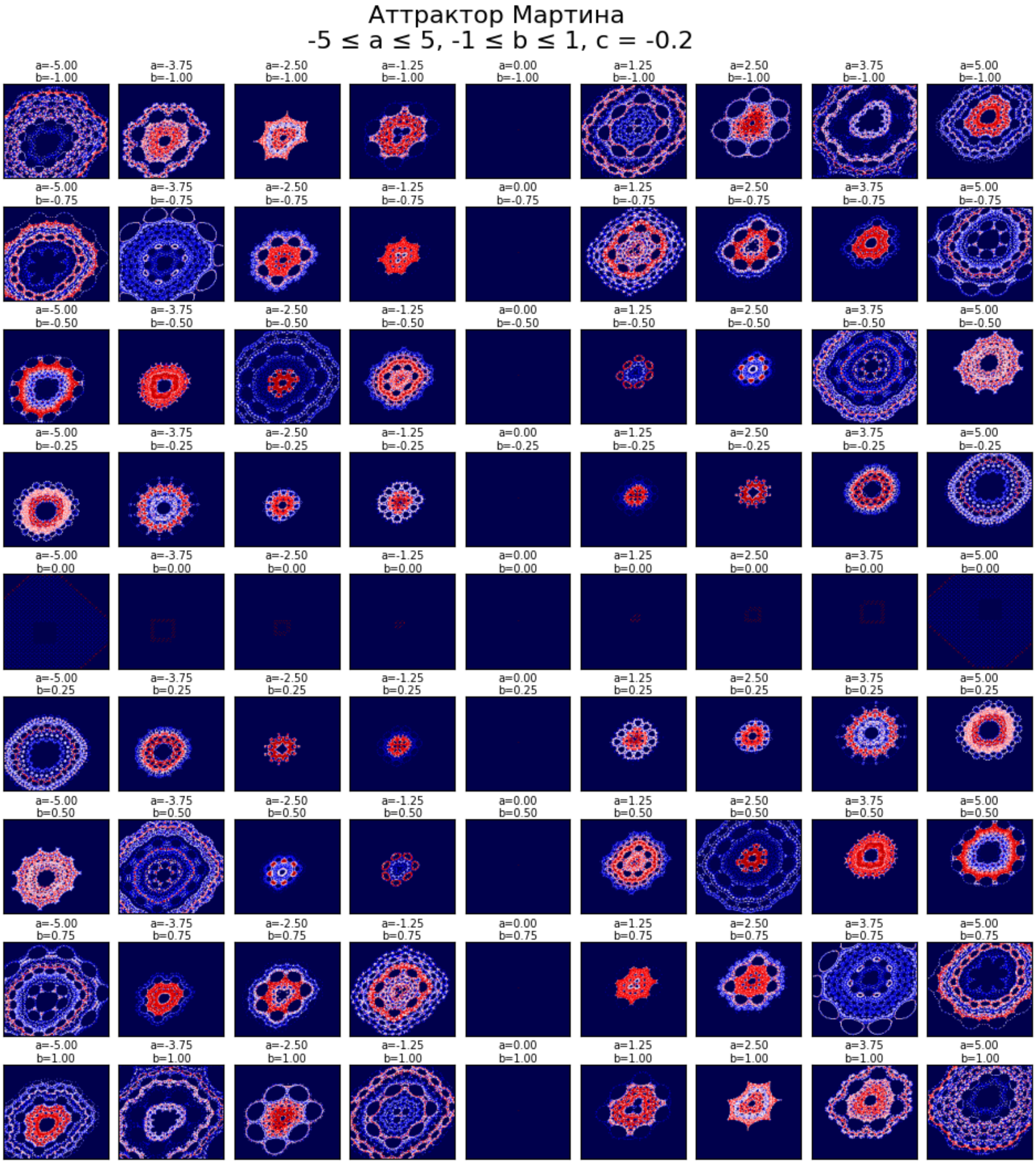

Рис. 5. Аттракторы Мартина для –5≤a≤+5, –1≤b≤+1, c=–0,2

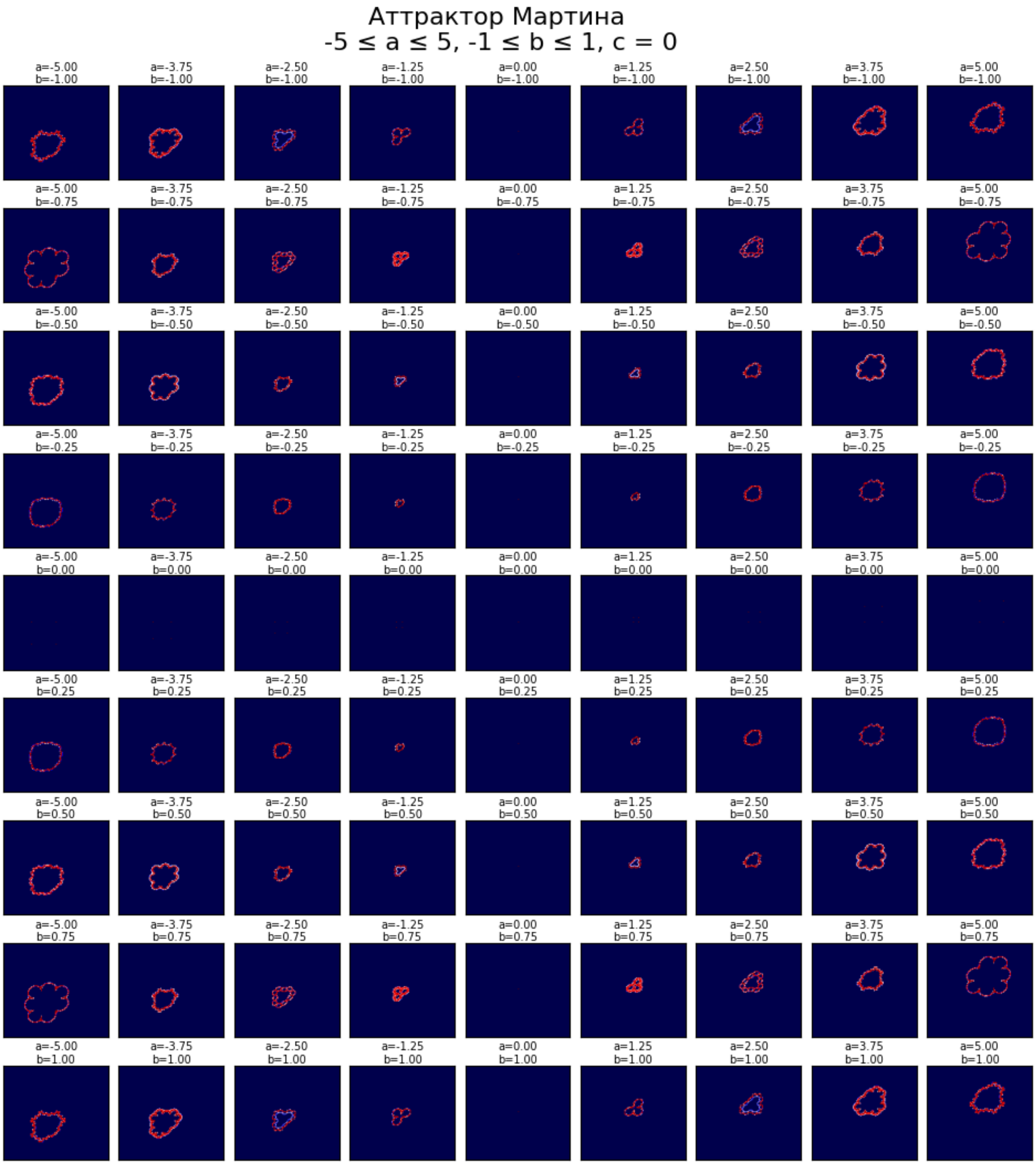

Рис. 6. Аттракторы Мартина для –5≤a≤+5, –1≤b≤+1, c=0

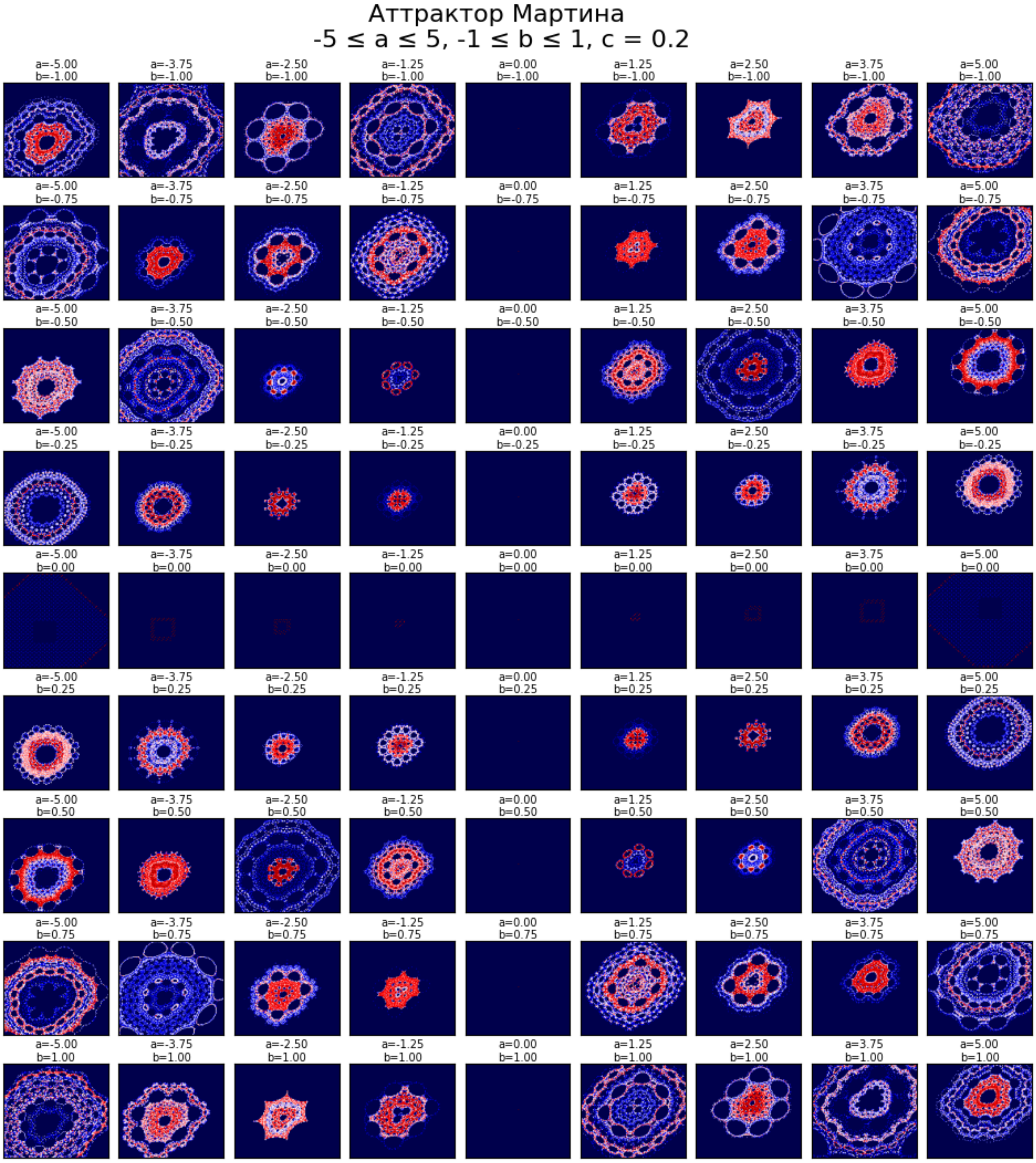

Рис. 7. Аттракторы Мартина для $-5 \leq a \leq +5$, $-1 \leq b \leq +1$, $c=+0,2$

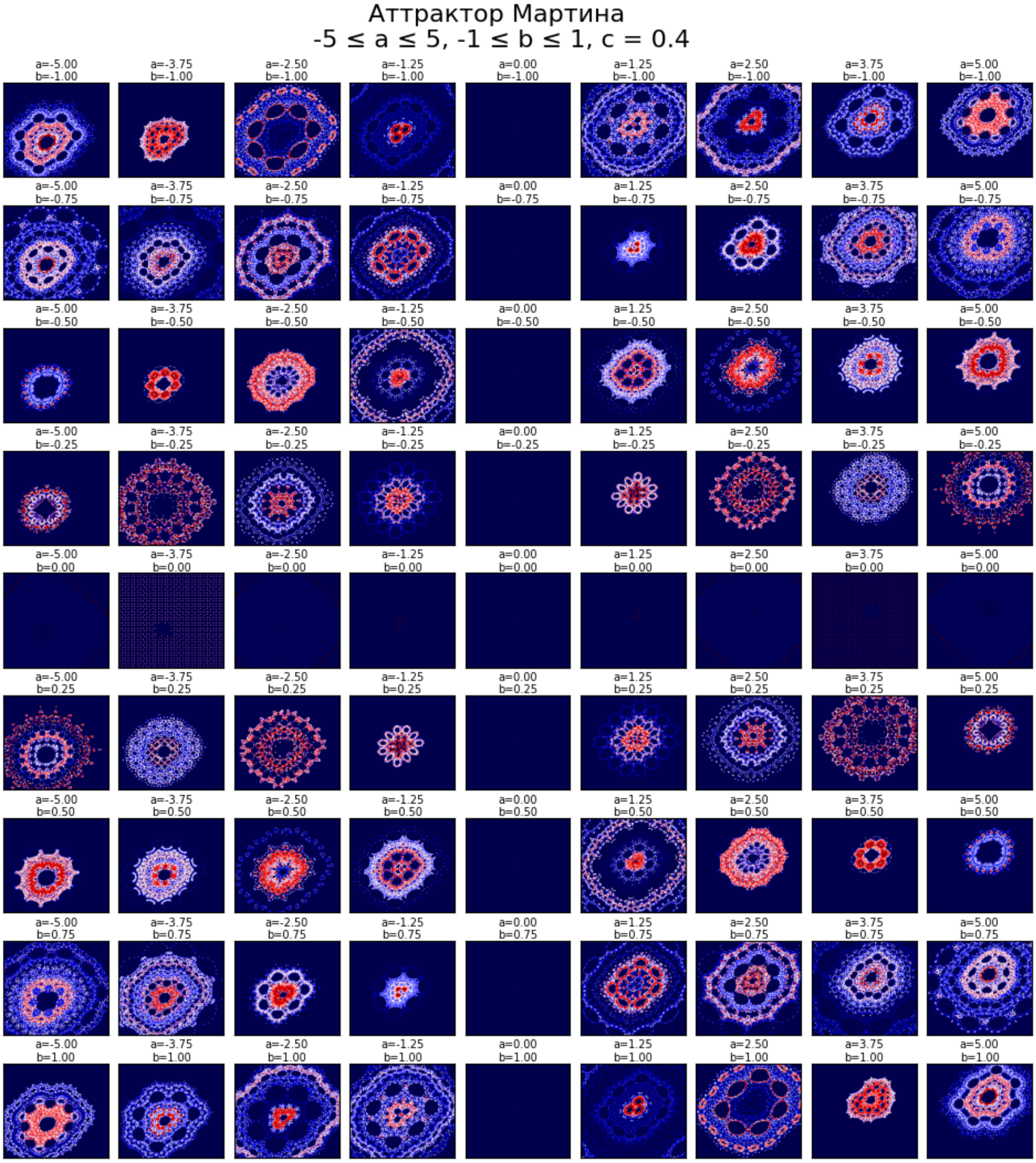

Рис. 8. Аттракторы Мартина для –5≤a≤+5, –1≤b≤+1, c=+0,4

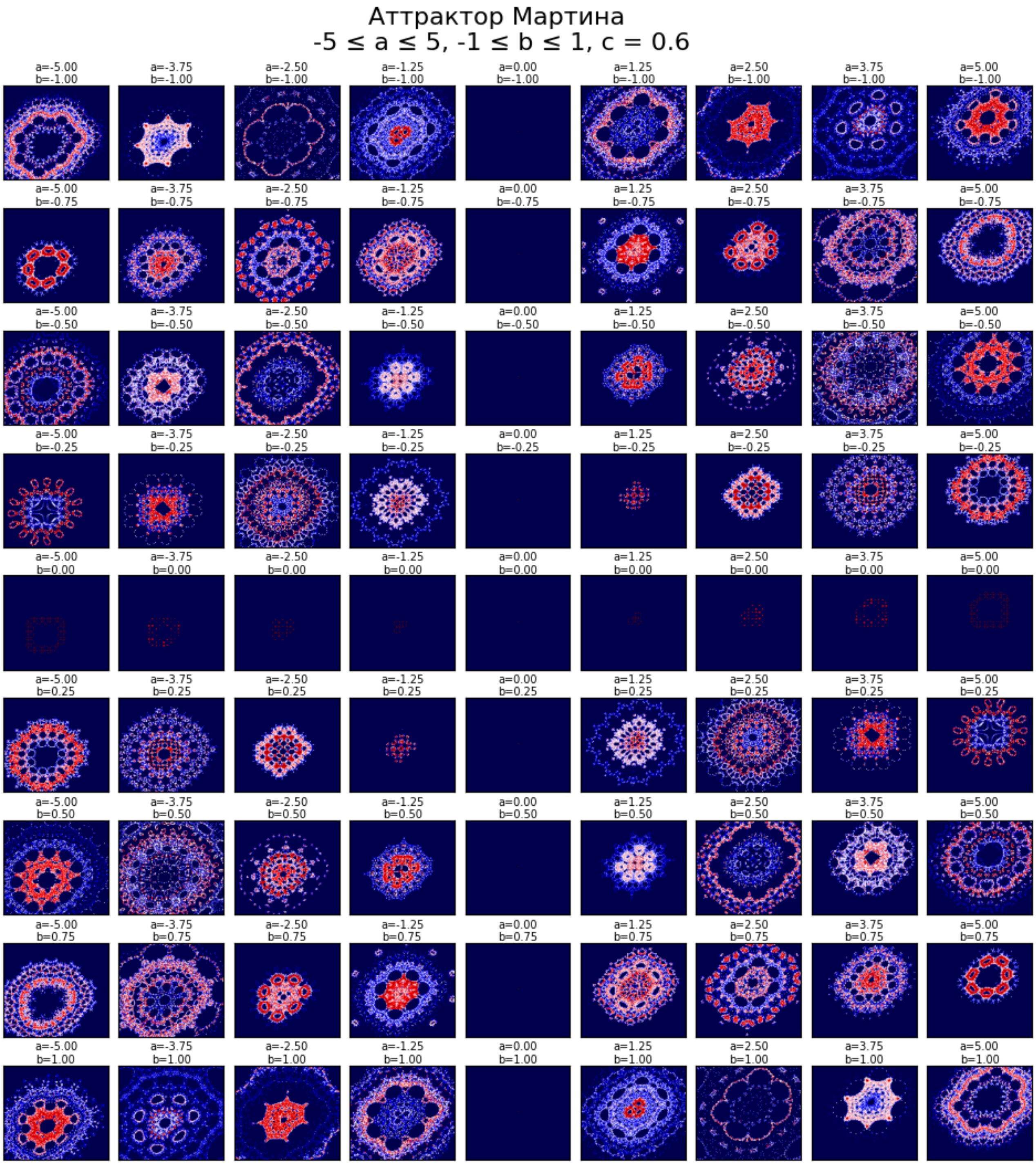

Рис. 9. Аттракторы Мартина для –5≤a≤+5, –1≤b≤+1, c=+0,6

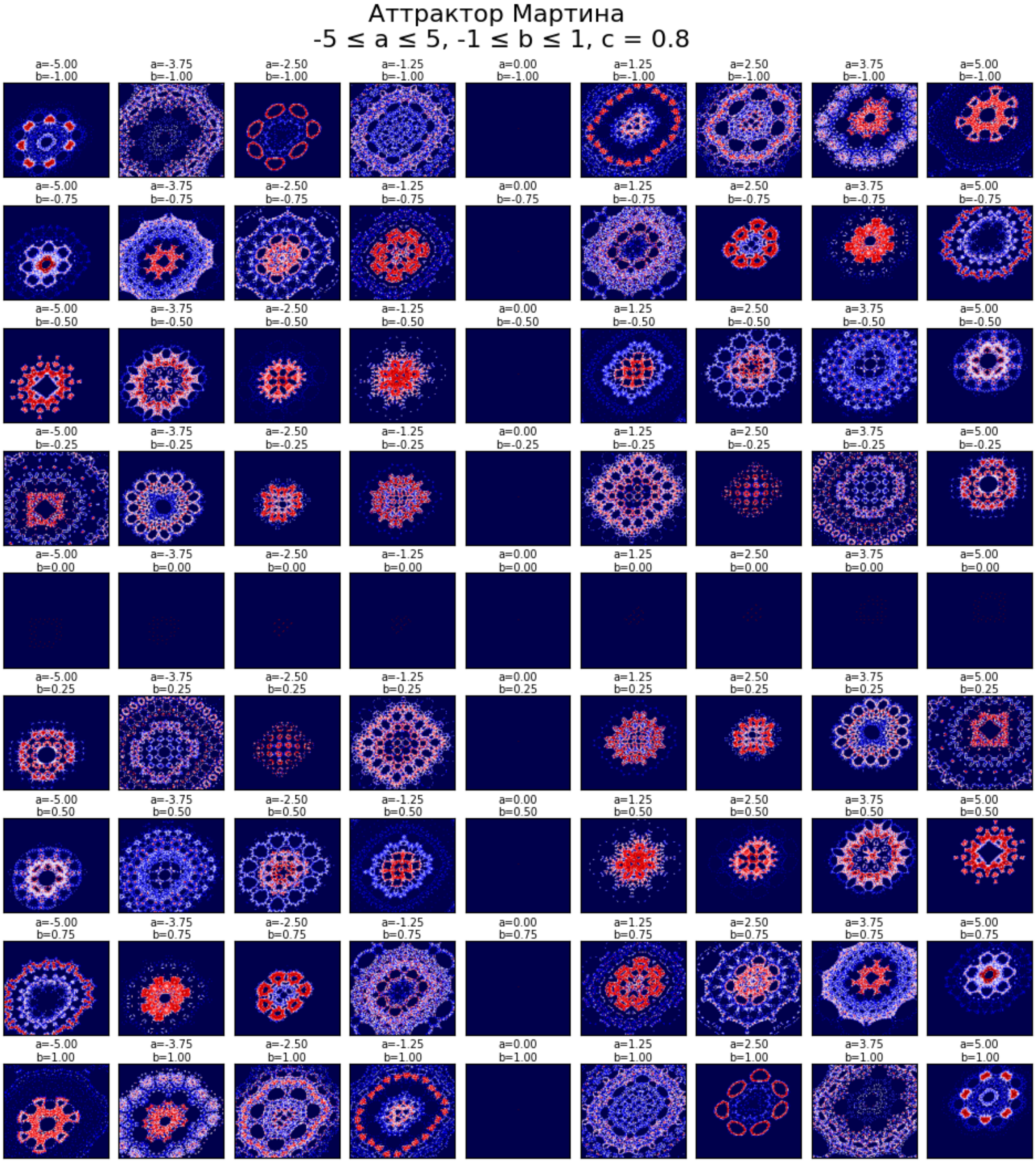

Рис. 10. Аттракторы Мартина для $-5 \leq a \leq +5$, $-1 \leq b \leq +1$, $c = +0{,}8$

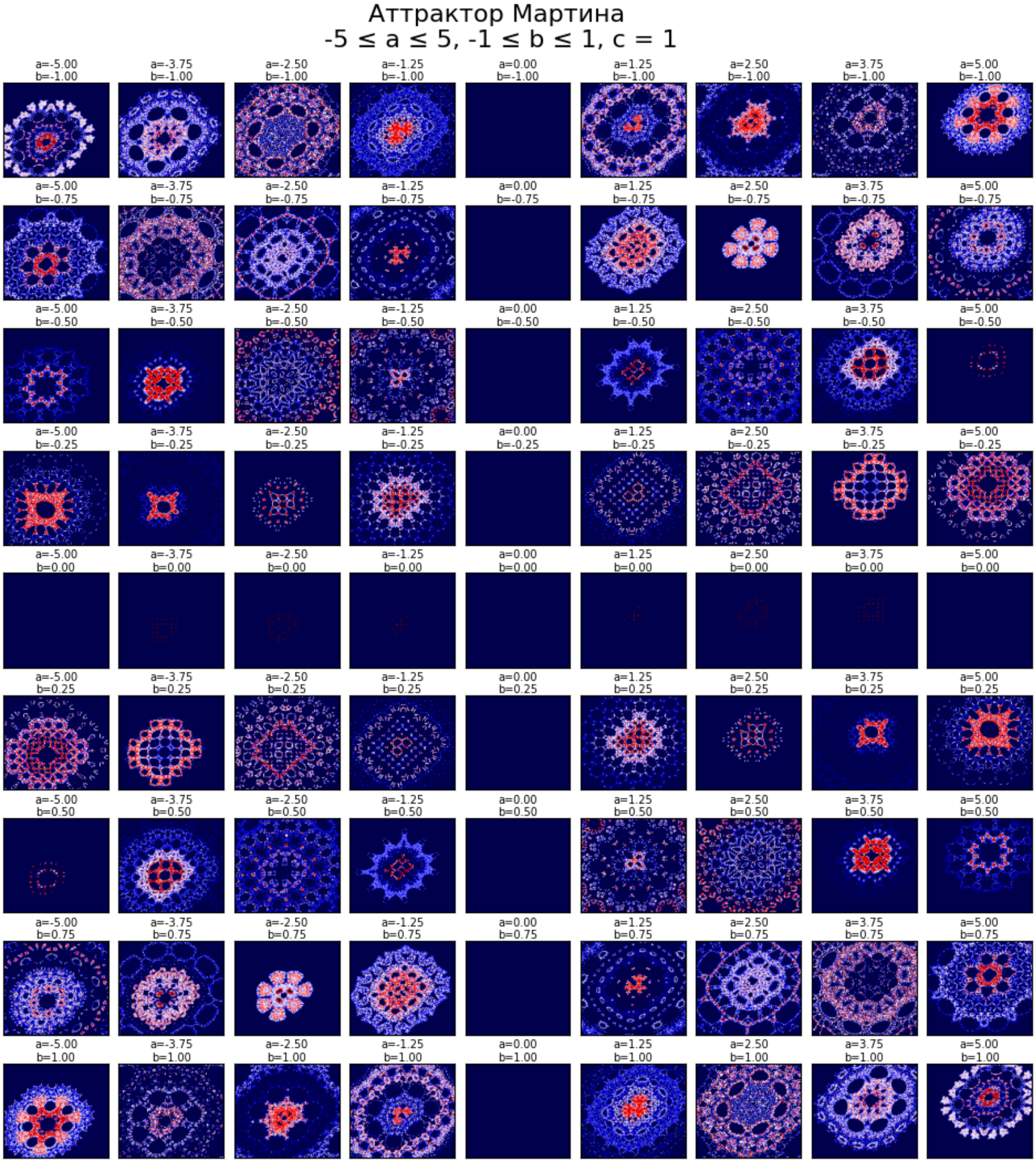

Рис. 11. Аттракторы Мартина для $-5 \le a \le +5$, $-1 \le b \le +1$, $c=+1$

Заключение и выводы

Данная студенческая научно-исследовательская работа проводилась в соответствии с практико-ориентированной методикой, подробно изложенной в [5, 7].

Были построены массивы фракталов для области пространства параметров в границах – $-5 \le a \le +5$, $-1 \le b \le +1$, $-1 \le c \le +1$.

Экспериментально установлено свойство центральной симметричности фрактальных изображений в пространстве параметров a,b,c относительно центрального фрактала $a=b=c=0$.

Это позволяет в дальнейшем рассматривать подробнее только положительный отсек пространства параметров для $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$.

Дальнейшее исследование может производиться в следующих направлениях:

- Расширение границ пространства параметров ($a>5$, $b>1$, $c>1$).

- Определение различных характеристик точек пространства параметров – скорость роста координат, площади и т.п.
- Проверка некоторых свойств пространства параметров.
- Применение фрактального метода [1].

Литература

1. Бойков А. А., Бойкова Н. А. О хопалонгах // Геометрия и графика. 2025. №2. С. 3-15. DOI: 10.12737/2308-4898-2025-13-2-30-15
2. Dewdney A.K. Computer recreations // Scientific American. 1986. Vol. 255, No. 3 (Sep tember). Pp. 14–23.
3. Martin B. Graphic Potential of Recursive Functions // Computers in Art, Design and Animation. New York: Springer-Verlag, 1989. e-ISBN-13: 978-1-4612-4538-4. Pp. 109–129.
4. Бойков А.А., Орлова Е.В., Чернова А.В., Шкилевич А.А. О создании фрактальных образов для дизайна и полиграфии и некоторых геометрических обобщениях, связанных с ними // Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации. Материалы VIII Международной научно-практической интернет-конференции, февраль – март 2019 г. – Пермь: ПНИПУ, 2019. – С. 325–339.
5. Бойков А. А., Ефремов А. В., Рустамян В. В. О студенческой научно-исследовательской работе на геометро-графических кафедрах // Геометрия и графика. 2023. №. 4. С. 61-75. DOI: 10.12737/2308-4898-2024-11-4-61-75
6. Pickover C.A. Strange Attractors: Creating Patterns in Chaos // New York: M&T Books, 1993. Pp. 50-74.
7. Вышнепольский В. И., Бойков А. А., Егиазарян К. Т., Ефремов А. В. Научно-исследовательская работа на кафедре «Инженерная графика» РТУ МИРЭА // Геометрия и графика. 2023. №. 1. С. 70-85. DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-70-85.