

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
СВОБОДНОВРАЩАЮЩЕГОСЯ ПЛОСКОГО ДИСКА С ПОЧВОЙ****Акимов А.П., Константинов Ю.В., Мазяров В.П.**

**Реферат.** При построении математической модели взаимодействия свободновращающегося плоского диска с почвой необходимо учитывать, что величина его кинематического параметра, равная отношению его окружной скорости к скорости поступательного движения диска, является не заданной величиной, а определяемой величиной. При равномерном вращении диска и его поступательном движении с постоянной скоростью кинематический параметр определяется из уравнения равновесия внешних сил, приложенных к диску. Предложенная ранее обобщенная математическая модель взаимодействия диска с почвой это учитывала, но в виду относительной сложности не нашла широкого применения. Целью исследования является построение более простой, но адекватной математической модели взаимодействия свободновращающегося диска с почвой. Модель строится в предположениях постоянства поступательной скорости движения диска, постоянства его заглубления и возможности замены давления на боковые поверхности диска его средним значением и замены усилия, приходящегося на единицу длины лезвия, его средним значением. Поскольку распределение элементарных сил реакций почвы в конечном счете определяется распределением абсолютных скоростей точек диска, контактирующих с почвой, то результирующая реакций почвы и их суммарный момент являются функциями кинематического параметра диска и его относительного заглубления. Эти функции задаются интегралами, не выражающимися через элементарные функции с помощью конечного числа операций. Однако близость кинематического параметра свободновращающегося диска к единице позволяет с помощью оценки этих интегралов получить приближенные выражения через элементарные функции для результирующей реакций почвы и их суммарного момента. Показано, что точность полученных приближений достаточна для инженерной практики.

**Ключевые слова:** математическая модель, свободновращающийся диск, взаимодействие с почвой, реакции почвы, силовые характеристики.

**Введение.** Одними из первых работ, посвященных взаимодействию свободновращающегося плоского диска с почвой, явились работы профессора Н.-Нерли [1, 2]. В них предполагалось, что диск движется в почве со скольжением, а сам диск заглублен до его середины и взаимодействует с почвой только боковыми поверхностями. Но как показали дальнейшие экспериментальные исследования, свободновращающийся диск может двигаться в почве не только со скольжением, но также и с буксованием. Кроме того, необходимо учитывать взаимодействие с почвой лезвия диска.

В математической модели взаимодействия диска с почвой, разработанной Г.Н. Синековым и Н.Д. Лучинским, основным предположением являлось предположение о том, что диск свободно катится в почве без скольжения и буксования [3, 4]. Это предположение, как правило, не соответствует действительности и приводит к существенным ошибкам при определении силовых характеристик диска.

В.И. Медведев и А.П. Акимов построили модель взаимодействия диска с почвой в предположении, что диск движется в режиме буксования [5], что характерно для дисков-двигателей.

Позднее была создана обобщенная всережимная модель взаимодействия плоского диска с почвой [6], позволившая снять ограниче-

ния предыдущих математических моделей. Эта модель учитывала взаимодействие с почвой как лезвия диска, так и его боковых поверхностей. Она позволила теоретически описать явление скольжения-буксования дискового ножа в почве и определить силовые характеристики лезвия и боковой поверхности диска, движущегося в произвольном режиме.

Современные исследователи также посвящают свои исследования взаимодействию свободновращающегося дискового ножа как с почвой и грунтом, так и с асфальтобетоном. Так, в работе Б.В. Туровского [7] исследуется зависимость энергоемкости обработки почвы диском в зависимости от режима его работы, но при этом режим работы считается заданным и не учитывается взаимодействие лезвия диска с почвой. В исследованиях И.Д. Кобякова [8-10] рассматривается взаимодействие с почвой свободновращающегося шестиугольного плоского диска, но не учитывается взаимодействие с почвой его боковых поверхностей. В работах Е.В. Курилова [11-14] рассматривается резание грунта и асфальта дисковым ножом, при этом также не учитывается взаимодействие его боковых поверхностей с почвой.

Отметим, что в указанных выше работах кинематический параметр, определяющий режим работы диска, считался заданным, в то

время как он является результатом взаимодействия диска с почвой и должен находиться из уравнения равновесия сил, приложенных к диску в случае его равномерного вращения и движения с постоянной поступательной скоростью. Такой подход к взаимодействию диска с почвой принят лишь в обобщенной модели взаимодействия диска с почвой [6]. Как показывают исследования, величина кинематического параметра даже свободновращающегося диска оказывает существенное влияние на его силовые характеристики [15, 16].

Однако обобщенная модель взаимодействия с почвой не нашла должного применения в связи со своей относительной сложностью: силовые характеристики диска определяются в ней с помощью эллиптических интегралов. Поэтому целью данной статьи является построение более простой приближенной модели взаимодействия свободновращающегося диска с почвой, позволяющей определять кинематический параметр диска и его силовые характеристики и в то же время обеспечивающей точность, достаточную для инженерной практики.

**Анализ и обсуждение результатов.** Поступательное и вращательное движения плоского почвообрабатывающего диска определяют его функционирование. Если его вращение осуществляется принудительно, через вал отбора мощности трактора, то такой диск называют активным ротационным рабочим органом. Если вращение дискового ножа возникает вследствие его взаимодействия с почвой, то его вращение обычно называют свободным, а сам диск – свободновращающимся. Если свободновращающийся диск притормаживается, то его называют приторможенным.

Пусть плоский дисковый нож радиуса  $r$ , погруженный в почву на глубину  $h$ , движется при постоянной поступательной скорости почвообрабатывающего орудия или машины, равной  $v_n$ , вращаясь при этом с угловой скоростью  $\omega$ .

Будем считать, что почва достаточно однородна, то есть ее давление на боковые поверхности сегмента ножа, расположенного в почве, почти одинаково во всех точках этого сегмента и может быть заменено его средним значением  $p$ , а сопротивление почвы резанию, приходящееся на единицу длины лезвия диска, сохраняется почти постоянным по всей режущей части лезвия, и его тоже можно заменить некоторым средним значением  $Q$ .

При постоянстве заглубления диска подвижная центроида представляет из себя окружность, а неподвижная – горизонтальную прямую.

Режим движения диска определяется кинематическим параметром диска  $\lambda$ , равным от-

ношению окружной скорости  $\omega \times r$  к поступательной  $v_n$  и остающимся, при сделанных предположениях, неизменным. В зависимости от значения этого коэффициента дисковый нож движется со скольжением ( $\lambda < 1$ ) или буксованием ( $\lambda > 1$ ), либо катится без скольжения и буксования ( $\lambda = 1$ ).

Свяжем с диском подвижную систему координат, поместив ее начало в центре диска и направив ось  $Ox$  в сторону его поступательной скорости, а ось  $Oz$  – вертикально вниз. Как показано в работе [17], результирующая сил трения, действующих на боковые поверхности диска, направлена горизонтально, а ее проекция на ось  $Ox$  равна:

$$\frac{F_{\text{от}}}{4fpr^2} = \int_0^l (\sqrt{\mu^2 - 2\mu\sqrt{1-t^2} + 1} - \sqrt{(1-\xi-\mu)^2 + t^2}) dt, \quad (1)$$

$$\text{где } m=1/\lambda, \quad l = \sqrt{2\xi - \xi^2}.$$

Интеграл, входящий в равенство (1), не выражается через элементарные функции с помощью конечного числа операций, но может быть выражен через нормальные эллиптические интегралы Лежандра [17]. На практике его проще вычислять одним из известных численных методов.

Положительным направлением момента сил будем считать направление вращения диска. В работе [17] показано, что главный момент сил трения, действующих на боковые поверхности диска, относительно его центра находится с помощью вычисления интеграла:

$$\frac{m_o}{4fpr^3} = -\frac{1}{2} \int_{1-\xi}^1 (\sqrt{1-t^2} \sqrt{\mu^2 - 2\mu t + 1} + (\mu-t)^2 \ln \frac{\sqrt{1-t^2} + \sqrt{\mu^2 - 2\mu t + 1}}{|\mu-t|}) dt - \frac{F_{\text{от}}}{4fpr^2 \lambda}. \quad (2)$$

Интегралы, входящие в правую часть равенства (2), также не выражаются через конечное число операций в элементарных функциях, но также могут быть выражены через эллиптические интегралы [17]. На практике удобнее находить момент  $m_o$  одним из известных численных методов.

В работе [15] показано, что проекция на ось  $Ox$  главного вектора сил реакций почвы на лезвие диска определяется следующим равенством:

$$\frac{R_{\text{от}}}{Qr} = -\frac{1}{2} \int_0^{\vartheta_0} \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \vartheta} d\vartheta + \frac{(\lambda^2 - 1)}{2} \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \vartheta}}, \quad (3)$$

где  $\vartheta_0 = \arccos(1-\xi)$ .

Интегралы, входящие в равенство (3), также можно выразить через эллиптические [17].

Для проекции на ось результирующей элементарных реакций на лезвие диска в той же работе [15] получено выражение:

$$\tilde{R}_{\varepsilon} = \frac{R_{\varepsilon}}{Qr} = |1 - \lambda| - \sqrt{(1 - \lambda)^2 + 2\lambda\xi}. \quad (4)$$

Можно показать, что главный момент элементарных реакций, действующих на лезвие диска, относительно его центра находится с помощью формулы [15]:

$$\frac{M_o}{Qr^2} = \frac{1 - \lambda^2}{2\lambda} \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \vartheta}} - \frac{1}{2\lambda} \int_0^{\vartheta_0} \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \vartheta} d\vartheta. \quad (5)$$

Интегралы, входящие в равенство (5), можно выразить через нормальные эллиптические интегралы [17] или вычислить одним из известных численных методов.

Из экспериментов многочисленных исследователей известно, что для свободновращающегося диска величина кинематического коэффициента очень близка к единице. Поэтому формулы для силовых характеристик боковой поверхности диска можно упростить, ограничиваясь разложением в ряд Тейлора в точке  $\lambda = 1$  правых частей равенств (1) и (2), с точностью до линейного члена. Это приводит к следующим приближенным формулам:

$$\tilde{F}_{\alpha} = \xi \left( \lambda - 1 - \frac{\xi}{2} \right) \ln \left( \sqrt{\frac{2}{\xi} - 1} + \sqrt{\frac{2}{\xi}} \right) + \frac{[6 - 2\lambda + (3 - 2\lambda)\xi]}{3} \sqrt{1 - \frac{\xi}{2}} + \frac{2\lambda - 6}{3}, \quad (6)$$

$$\tilde{m}_o = \frac{\xi(6 - 6\lambda + 3\xi - \xi^2)}{6} \ln \left( \sqrt{\frac{2}{\xi}} + \sqrt{\frac{2}{\xi} - 1} \right) + \frac{6\lambda - 2 + (6\lambda - 5)\xi - 3\xi^2}{9} \sqrt{1 - \frac{\xi}{2}} + \frac{2 - 6\lambda}{9}, \quad (7)$$

где безразмерная проекция  $\tilde{F}_{\alpha} = \frac{F_{\alpha}}{4 fpr^2}$  и

безразмерный момент  $\tilde{m}_o = \frac{m_o}{4 fpr^3}$ .

Отметим, что приближенная формула (6) при  $\xi=0,7$  и  $0,95 \leq \lambda \leq 1,05$  дает ошибку меньше 1%, а при  $\xi=0,3$  и  $0,95 \leq \lambda \leq 1,05$  она приводит к ошибке, меньшей 4,3%, причем при  $\lambda \rightarrow 1$  она стремится к нулю. А формула (7) при  $\xi=0,5$  и  $0,95 \leq \lambda \leq 1,04$  дает ошибку меньше 5%, которая также стремится к нулю при  $\lambda \rightarrow 1$ .

При  $\lambda = 1$  из формулы (6) для  $|\tilde{F}_{\alpha}|$  получается формула, с точностью до обозначений, совпадающая с формулой, приведенной в работах Г.Н. Синеокова [3] и Н.Д. Лучинского [4]. А из формулы (7) при

$\lambda = 1$  для  $\tilde{m}_o$  следует формула, являющаяся частным случаем формулы, полученной Н.

Нерли (с точностью до выбора положительного направления момента сил) [1].

Силовые характеристики лезвия диска выражаются через два интеграла(8).

$$I_1 = \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \vartheta}}, \quad I_2 = \int_0^{\vartheta_0} \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \vartheta} d\vartheta. \quad (8)$$

Сложность получения приближенных формул для силовых характеристик лезвия ножа заключается в оценке интеграла  $I_1$ , поскольку, как следует из (7),  $I_1 \rightarrow \infty$  при  $\lambda \rightarrow 1$ .

Обозначив  $\varepsilon^2 = (1 - \lambda)^2/4\lambda$  из (8) получим такое выражение для  $I_1$ :

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\varepsilon^2 + \sin^2(\vartheta/2)}}. \quad (9)$$

Как легко видеть из (9), при  $\lambda \rightarrow 1$ , т.е. при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $I_1 \rightarrow \infty$ . Чтобы получить асимптотическую формулу для этого интеграла, представим его в виде

$$\int_0^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\varepsilon^2 + \sin^2(\vartheta/2)}} = I_3 + I_4, \quad (10)$$

где через  $I_3$  и  $I_4$  обозначены интегралы:

$$I_3 = \int_0^{\vartheta_0} \frac{2 \sin(\vartheta/2)}{\varepsilon^2 + 2 \sin^2(\vartheta/2)} d\vartheta \quad (11)$$

$$I_4 = \int_0^{\vartheta_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \sin^2(\vartheta/2)}} - \frac{2 \sin(\vartheta/2)}{\varepsilon^2 + 2 \sin^2(\vartheta/2)} \right] d\vartheta \quad (12)$$

Интеграл  $I_3$ , определяющий при  $\varepsilon \rightarrow 0$  главную часть асимптотического поведения интеграла  $I_1$ , вычисляется заменой переменной  $t = \cos(\vartheta/2)$ :

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2/2}} \ln \frac{[2 \sin^2(\vartheta_0/2) + \varepsilon^2] (\sqrt{1 + \varepsilon^2/2} + 1)^2}{[\varepsilon(1 + \cos(\vartheta_0/2))]^2} \quad (13)$$

Неотрицательный интеграл  $I_4$  является ограниченным, поскольку

$$I_4 \leq \int_0^{\vartheta_0} \frac{\varepsilon d\vartheta}{\varepsilon^2 + 2 \sin^2(\vartheta/2)} = \frac{2}{\sqrt{2 + \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{tg}(\vartheta_0/2) \sqrt{2 + \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right) \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Этот интеграл при  $\varepsilon \rightarrow 0$  стремится к пределу  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_4 = \ln(2)$ ,

который без труда находится численным методом. Заменяв интеграл  $I_4$  его предельным значением и положив  $\lambda \approx 1$ ,

$\sqrt{1 + \varepsilon^2/2} \approx 1$  из (9)–(13), получим окончательное приближенное выражение для интеграла  $I_1$ :

$$I_1 \approx \frac{1}{2} \ln \frac{8[8 \sin^2(\vartheta_0/2) + (1 - \lambda)^2]}{[(1 - \lambda)(1 + \cos(\vartheta_0/2))]^2} \quad (14)$$

Как следует из (10), ввиду ограниченности  $I_4$  относительная ошибка аппроксимации (14) стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Эта ошибка моно-

тонно убывает с убыванием  $\epsilon$ , и, как показывают расчеты, даже при  $\lambda=0,8$  и  $\lambda=1,2$  составляет величину, меньшую 0,25%.

Поскольку интеграл  $I_2$  является непрерывно дифференцируемой функцией при  $\lambda=1$ , то достаточно заменить  $I_2$  его значением при  $\lambda=1$ . Переходя для удобства от  $\theta_0$  к относительному заглублению  $\xi$  и удерживая только главные члены при  $\lambda \rightarrow 1$ , из (3), (5), (8) и (14), получим формулы:

$$\tilde{R}_{ex} = (\lambda - 1) \ln \frac{4\sqrt{8\xi + 2(1-\lambda)^2}}{|1-\lambda|(2 + \sqrt{4-2\xi})} + \sqrt{4-2\xi} - 2, \quad (15)$$

$$\tilde{M}_o = (1 - \lambda) \ln \frac{4\sqrt{8\xi + 2(1-\lambda)^2}}{|1-\lambda|(2 + \sqrt{4-2\xi})} + \sqrt{4-2\xi} - 2, \quad (16)$$

где безразмерная  $\tilde{R}_{ex} = \frac{R_{ex}}{Qr}$  проекция и безразмерный момент  $\tilde{M}_o = \frac{M_o}{Qr^2}$ .

Поскольку функции в (15) и (16) не определены при  $\lambda=1$ , их необходимо доопределить до непрерывности, то есть положить, что при  $\lambda=1$ :

$$\tilde{R}_{ex} = \sqrt{4-2\xi} - 2; \quad \tilde{M}_o = \sqrt{4-2\xi} - 2.$$

На рисунке 1, а изображены для  $\xi = 0,5$  графики зависимости безразмерной проекции  $\tilde{R}_{ex}$  от  $\lambda$  для точной формулы (3) – сплошной кривой, а для приближенной формулы (15) – пунктирной кривой. Как следует из этого рисунка, при значениях  $\lambda$ , близких к единице, эти кривые практически совпадают. На рисунке 1, б изображены для  $\xi = 0,5$  графики зависимости безразмерного момента  $\tilde{M}_o$  от  $\lambda$  для точной формулы (5) – сплошной кривой, а для приближенной формулы (16) – пунктирной кривой. И на этом рисунке при  $\lambda$ , близких к единице, эти кривые практически совпадают. Из этих рисунков также следует, что небольшие изменения кинематиче-

ского параметра  $\lambda$  в окрестности точки  $\lambda = 1$  приводят к существенным изменениям величин  $\tilde{R}_{ex}$  и  $\tilde{M}_o$  поэтому учет отличия величины от единицы необходим.

Если пренебречь трением в подшипнике дискового ножа, то кинематический параметр  $\lambda$ , определяющий режим движения диска, установленного свободно на оси и равномерно вращающегося вследствие его взаимодействия с почвой, определится из следующего уравнения равновесия моментов:

$$\tilde{M}_o + n\tilde{m}_o = 0, \quad (17)$$

где  $n=4fpr/Q$  – безразмерный коэффициент, зависящий от свойств почвы ( $p, Q$ ), материала диска, способа обработки его боковых поверхностей ( $f$ ), его конструктивного размера  $r$  и определяющий относительный вес суммарных безразмерных момента сил трения на боковых поверхностях ножа и момента реакций почвы на лезвие диска в результирующем безразмерном моменте реакций почвы.

С учетом принятых обозначений подстановка выражений (7) и (16) в равенство (17) приводит к трансцендентному уравнению, которое приходится решать относительно  $\lambda$  для различных значений  $n$  и  $\xi$  численно. Решение этого уравнения  $\lambda^* = \lambda^*(n, \xi)$  и определяет режим функционирования и силовые характеристики свободновращающегося дискового ножа.

Проекция на оси  $Ox$  и  $Oz$  главного вектора сил реакций почвы на диск равны суммам проекций на эти оси главных векторов ее реакций на боковые поверхности и на лезвие диска:

$$R_x = R_{e\bar{o}} + F_{d\bar{o}}, \quad R_z = R_{ez}.$$

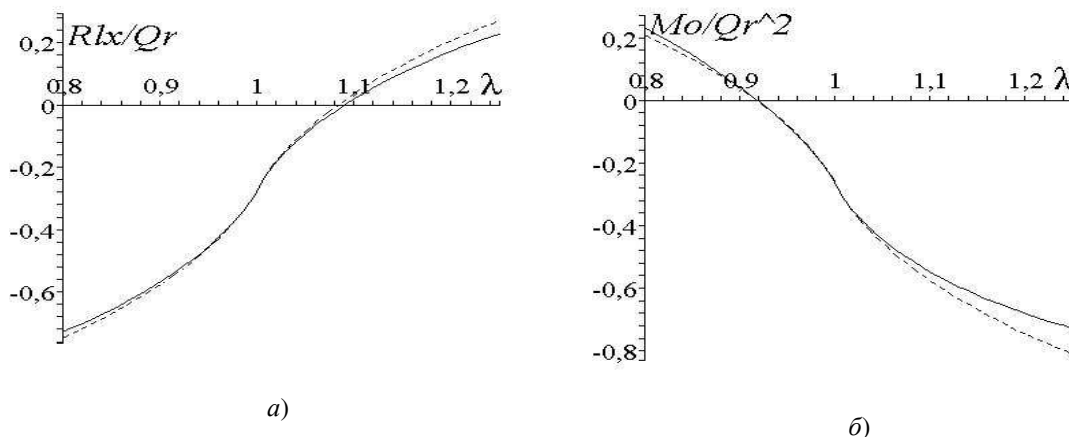


Рисунок 1 – Сравнение приближенных и точных зависимостей от  $\lambda$ :

а –  $\tilde{R}_{ex}$ ; б –  $\tilde{M}_o$

Вводя безразмерные величины:

$$\tilde{R}_x = \frac{R_x}{Qr}; \quad \tilde{R}_z = \frac{R_z}{Qr},$$

из предыдущих равенств получим:

$$\tilde{R}_x = \tilde{R}_{\dot{\theta}\theta} + n\tilde{F}_{\dot{\theta}\theta}, \quad (18)$$

$$\tilde{R}_z = \tilde{R}_{\dot{z}z}. \quad (19)$$

Подставляя функцию  $\lambda^* = \lambda^*(n, \zeta)$  вместо  $\lambda$  в формулы (4), (6), (15), (18) и (19), определяем зависимости проекций на оси координат безразмерной результирующей реакции почвы на свободновращающийся диск от относительного заглубления  $x$  и безразмерного коэффициента  $n$ , отражающего свойства почвы.

**Выводы.** На основе обобщенной всеобщей модели взаимодействия плоского диска с почвой построена приближенная модель взаимодействия с почвой свободновращающегося диска. Для свободновращающегося диска его кинематический коэффициент очень близок к единице. Использование этого условия позволило значительно упростить расчетные формулы. Сравнение полученных приближенных формул с точными показало их достаточную для инженерной практики близость. Построенная математическая модель взаимодействия свободного вращающегося диска с почвой позволяет находить его кинематический коэффициент и рассчитывать его силовые характеристики в зависимости от свойств почвы и относительного заглубления. Эта модель позволяет проще ставить и решать задачу определения оптимальных параметров и режимов функционирования свободновращающегося диска.

#### Литература

1. Nerli N. Sul Problema dinamico dell' aratro a disco. Inostrato del Bolletino del R. Istituto. Supereire Agrogro di Pisa, 1930.
2. Nerli N. Sul vantaggio dinamico del coltro rotante. Собр. соч., изд. первое, том IV, с. 231, Сельхозгиз, 1940.
3. Синеоков, Г.Н. Дисковые рабочие органы почвообрабатывающих машин / Г.Н. Синеоков. – М.: Машгиз, 1949. – 86 с.
4. Лучинский, Н.Д. Некоторые вопросы земледельческой механики / Н.Д. Лучинский // Труды ВИМ. – М.: 1977. – Т. 75. – С. 3-77.
5. Медведев, В.И. Методика расчета движущей силы на плоском диске - движителе. / В.И. Медведев, А.И. Веденеев, А.П. Акимов // Тракторы и сельхозмашины. – 1974. – № 8. – С. 18–20.
6. Медведев, В.И. Обобщенная математическая модель взаимодействия дискового ножа с почвой / В.И. Медведев, Ю.В. Константинов, А.П. Акимов // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 2001. – № 2. – С. 34–37.
7. Туровский, Б.В. Зависимость энергоемкости дискового рабочего органа от режимов работы / Б.В. Туровский, В.Н. Ефремова // Техника и оборудование для села. – 2013. – №10. – С. 16–18.
8. Кобяков, И.Д. Исследование движения шестиугольного и круглого дисков рабочих органов почвообрабатывающих орудий / И.Д. Кобяков, А.В. Евченко // Тракторы и сельхозмашины. – 2016. – № 1. – С. 49–51.
9. Кобяков И.Д., Евченко А.В. Исследования моментов вращения дисковых ножей // Аэкономика: экономика и сельское хозяйство, 2017. № 5 (17)- URL: <http://aeconomy.ru/science/economy/issledovaniya-momentov-vrashcheniya/>
10. Нестяк, В.С. Деформация почвы плужным дисковым ножом / В.С. Нестяк, А.Ф. Кондратов, И.Д. Кобяков, А.С. Союнов // Вестник НГАУ. – 2012. – № 2(23), часть 2. – С. 112–115.
11. Курилов, Е.В. К вопросу эффективности косоого резания грунта дисковым ножом / Е.В. Курилов, А.С. Щербаков // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2010. – № 1(26). – С. 24–32.
12. Курилов, Е.В. Влияние износа режущей кромки дискового ножа на энергоемкость косоого резания грунта / Е.В. Курилов // Механизация строительства. – 2013. – № 10 (832). – С. 28–31.
13. Курилов, Е.В. Разработка дорожного асфальтобетона дисковым свободновращающимся инструментом / Е.В. Курилов, Д.В. Фурманов // Механизация строительства. – 2014. – № 8 (842). – С. 4–7.
14. Фурманов, Д.В. Теоретическое обоснование процесса резания асфальтобетона дисковым ножом / Д.В. Фурманов, Е.В. Курилов // Экология и научно-технический прогресс. Урбанистика. – 2013. – Том 2. – С.498–505.
15. Акимов, А.П. Скольжение-буксование дискового ножа в почве и его силовые характеристики / А.П. Акимов, Ю.В. Константинов // Тракторы и сельхозмашины. –2005. –№ 4. –С. 30–34.
16. Акимов, А.П. Кинематика и динамика ротационных почвообрабатывающих машин и агрегатов: монография /А.П. Акимов, Ю.В. Константинов, В.И. Медведев. – Чебоксары, 2017. – 248 с.
17. Константинов, Ю.В. Выбор оптимальных параметров и режимов функционирования ротационных рабочих органов: дис. ... канд. техн. наук / Ю.В. Константинов. – Чебоксары. – 2000. – 176 с.

#### Сведения об авторах:

Акимов Александр Петрович – доктор технических наук, профессор, e-mail: akimov\_mechfak@mail.ru  
 Константинов Юрий Валентинович – кандидат технических наук, доцент, e-mail: konstantinopov@polytech21.ru

Мазяров Владимир Порфирьевич – кандидат технических наук, доцент, e-mail: if7@academy21.ru  
 ФГБОУ ВО «Чувашская государственная сельскохозяйственная академия», г. Чебоксары, Россия.

## MATHEMATICAL MODEL OF INTERACTION OF FREE ROLLING FLAT DISK WITH SOIL

Akimov A.P., Konstantinov Yu.V., Mazyarov V.P.

**Abstract.** When constructing a mathematical model for the interaction of a free-rotating plane disk with soil, it is necessary to take into account that the magnitude of its kinematic parameter, equal to the ratio of its circumferential velocity to the speed of translational movement of the disk, is not a given quantity, but a definite quantity. With uniform rotation of the disk and its translational movement at a constant speed, the kinematic parameter is determined from the equilibrium equation of external forces, applied to the disk. The generalized mathematical model of disk-soil interaction, proposed earlier, was taken into account, but in view of relative complexity it was not widely used. The aim of the study is to construct a simpler, but adequate mathematical model for the interaction of a free-spinning disc with soil. The model is constructed under the assumptions of the constancy of the translational velocity of the disk, the permanence of its penetration and the possibility of replacing the pressure on the disc's lateral surfaces with its mean value and replacing the force per unit length of the blade with its mean value. Since the distribution of the elementary forces of soil reactions is ultimately determined by the distribution of the absolute velocities of the points of the disk in contact with the soil, the resultant reactions of the soil and their total moment are functions of the kinematic parameter of the disk and its relative burial. These functions are given by integrals, that are not expressed in terms of elementary functions by a finite number of operations. However, the proximity of the kinematic parameter of the free-spinning disk to unity makes it possible, with the help of an estimate of these integrals, to obtain approximate expressions in terms of elementary functions for the resultant reactions of the soil and their total angular momentum. It is shown that the accuracy of the approximations obtained is sufficient for engineering practice.

**Key words:** mathematical model, free-spinning disk, interaction with soil, soil reactions, power characteristics.

## References

1. Nerli N. Sul Problema dinamico dell' aratro a disco. Instratto del Bolletino del R. Istituto. Supereire Agrogro di Pisa, 1930.
2. Nerli N. Sul vantaggio dinamico del coltro rotante. Собр. соч., изд. первое, том IV, с. 231, Сельхозгиз, 1940.
3. Sineokov G.N. *Diskovye rabochie organy pochvoobrabatyvayuschikh mashin*. [Disk working units of soil-cultivating machines]. / G.N. Sineokov. – M.: Mashgiz, 1949. – P. 86.
4. Luchinskiy N.D. *Nekotorye voprosy zemledelcheskoy mekhaniki*. // *Trudy VIM*. [Some questions of agricultural mechanics. / N.D. Luchinsky // Proceedings of VIM]. – M.: 1977. – Vol. 75. – P. 3-77.
5. Medvedev V.I. The calculating method of driving force on a flat propulsion disk - thruster. [Metodika rascheta dvizhushchey sily na ploskom diske - dvizhitele. / V.I. Medvedev, A.I. Vedeneyev, A.P. Akimov // *Traktory i selkhoz mashiny. - Tractors and agricultural machinery*. – 1974. – № 8. – P. 18–20.
6. Medvedev V.I. Generalized mathematical model of the interaction of a disk knife with soil. [Obobshchennaya matematicheskaya model vzaimodeystviya diskovogo nozha s pochvoy]. / V.I. Medvedev, Yu.V. Konstantinov, A.P. Akimov // *Traktory i selkhoz mashiny. - Tractors and agricultural machinery*. – 2001. – № 2. – P. 34–37.
7. Turovskiy B.V. Dependence of the energy capacity of the disc working unit on the operating modes. [Zavisimost energoyemkosti diskovogo rabocheho organa ot rezhimov raboty]. / B.V. Turovskiy, V.N. Efremova // *Tekhnika i oborudovanie dlya sela. - Engineering and equipment for the village*. – 2013. – №10. – P. 16–18.
8. Kobyakov I.D. Study of the motion of hexagonal and circular disks of the working units of tillage implements. [Issledovanie dvizheniya shestiyugolnogo i kruglogo diskov rabochikh organov pochvoobrabatyvayuschikh orudiy]. / I.D. Kobyakov, A.V. Evchenko // *Traktory i selkhoz mashiny. - Tractors and agricultural machinery*. – 2016. – №1. – P. 49–51.
9. Kobyakov I.D., Evchenko A.V. *Issledovaniya momentov vrascheniya diskovykh nozhey*. // *Aekonomika: ekonomika i selskoe khozyaystvo*. (Research the rotation moments of disk knives. // *AEconomy: Economics and Agriculture*). 2017. №5 (17). – Available at: <http://aeconomy.ru/science/economy/issledovaniya-momentov-vrashcheniya/>
10. Nestyak V.S. Deformation of soil with a plow disc knife. [Deformatsiya pochvy pluzhnym diskovym nozhom]. / V.S. Nestyak, A.F. Kondratov, I.D. Kobyakov, A.S. Soyunov // *Vestnik NGAU. – The Herald of NSAU*. – 2012. – № 2 (23), Part 2. – P. 112–115.
11. Kurilov E.V. On the effectiveness of oblique cutting of soil with a disk knife. [K voprosu effektivnosti kosogo rezaniya grunta diskovym nozhom]. / E.V. Kurilov, A.S. Scherbakov // *Vestnik Belorussko-Rossiyskogo universiteta. – The Herald of Belarusian-Russian University*. – 2010. – №1 (26). – P. 24–32.
12. Kurilov E.V. Influence of the cutting edge wear of a disk knife on the energy capacity of oblique cutting of soil. [Vliyaniye iznosa rezhuschey kromki diskovogo nozha na energoyemkost kosogo rezaniya grunta]. / E.V. Kurilov // *Mekhanizatsiya stroitelstva. - Mechanization of construction*. – 2013. – №10 (832). – P. 28–31.
13. Kurilov E.V. Development of road asphalt concrete using a free-rotating tool. [Razrabotka dorozhnogo asfaltobetona diskovym svobodnovraschayuschimsya instrumentom]. / E.V. Kurilov, D.V. Furmanov // *Mekhanizatsiya stroitelstva. - Mechanization of construction*. – 2014. – № 8 (842). – P. 4–7.
14. Furmanov D.V. Theoretical substantiation of cutting process of asphalt concrete with a disk knife. [Teoreticheskoe obosnovanie protsessa rezaniya asfaltobetona diskovym nozhom]. / D.V. Furmanov, E.V. Kurilov // *Ekologiya i nauchno-tekhnicheskij progress. Urbanistika. - Ecology and scientific and technical progress. Urbanistics*. – 2013. – Vol. 2. – P. 498-505.
15. Akimov A.P. Slip-slippage of a disk knife in the soil and its power characteristics. [Skolzhenie-buksovanie diskovogo nozha v pochve i ego silovye kharakteristiki]. / A.P. Akimov, Yu.V. Konstantinov // *Traktory i selkhoz mashiny. - Tractors and agricultural machinery*. 2005. № 4, P 30–34.
16. Akimov A.P. *Kinematika i dinamika rotatsionnykh pochvoobrabatyvayuschikh mashin i agregatov: monografiya*. [Kinematics and dynamics of rotary tillers and aggregates: monograph]. / A.P. Akimov, Yu.V. Konstantinov, V.I. Medvedev. – Cheboksary, 2017. – P. 248.
17. Konstantinov Yu.V. *Vybor optimalnykh parametrov i rezhimov funkcionirovaniya rotatsionnykh rabochikh organov: dis. ... kand. tekhn.nauk*. (The choice of the optimal parameters and modes of operation of rotary tools: dissertation for a degree of Ph.D. of Technical sciences). / Yu.V. Konstantinov. – Cheboksary. – 2000. – P. 176.

## Authors:

Akimov Aleksandr Petrovich – Doctor of Technical sciences, Professor, e-mail: akimov\_mechfak@mail.ru  
 Konstantinov Yuriy Valentinovich – Ph.D. of Technical sciences, Associate Professor, e-mail: konstantinov@polytech21.ru  
 Turovskiy Boris Vladimirovich – Ph.D. of Technical sciences, Associate Professor, e-mail: boturovskij@yandex.ru  
 Chuvash State Agrarian University, Cheboksary, Russia.